

附录:152 个未解决的问题

著名数学家 Halmos, P. R. 指出:“问题是数学的心脏”,“解决问题的最困难的部分之一是提出正确的问题。”见[305]1980,87:519-524.

本书第1版提出了21个未解决的问题,第二版又提出了100个未解决的问题,均受到初学者的欢迎.据作者所知,在这100个问题中,已解决的有30个左右.第3版新提出的问题,仍只限于与新收入的不等式有关的问题.这些问题难易悬殊,受作者水平和资料之限,也不一定提得恰当,还有些问题可能已解决,仅供读者参考.读者可以从本书提出更多的问题.实际上,在不等式理论中未解决的问题和值得进一步研究的问题是没有止境的,一旦解决了一个特殊的问题,它的解决本身(或由它无解所产生的危机)又会提出其他有待解决的问题来取代它.

1. 第1章 §2(2.52) 与(2.53) 式中的条件 $Q < 1$ 或 $Q > 1$ 能否放宽?
2. 第1章 §3 二.N.5.(3.31) 与(3.32) 式中成立的最小 λ 是多少?
3. 第1章 §3 二.(二)N.10 单参数平均 $J_p(a, b)$ 不等式, $p \ln J_p(a, b)$ 是否为凸函数?
4. 第1章 §3.三(三)N.6.(5). 马统一关于混合 AG 不等式的猜想.
5. 第1章 §3 三(三)N10. 关开中关于广义 k 次对称平均不等式(3.150) 的猜想.
6. 第1章 §3 三.(三)N.10.(6) 中 $P_n(a, k)$, $P_n^*(a, k)$, $Q_n(a, k)$ 有什么关系?
7. 第1章 §3 三(三)Fan Ky 不等式的推广(3.165) 和(3.166) 式成立的条件是什么?
8. 第1章 §3.三(三). 陈计关于(3.169) 式、(3.170) 式成立条件.
9. 第2章 §1.一.N.1. $\sigma_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j}$ 的最优上界是什么?
10. 第2章 §2.七.N.1. 计数不等式的 Heilbron 不等式中, λ_n, z_n 的最好上、下界各是什么?当(2.78) 式成立时, c_1 的最大值和 c_2 的最小值是什么?
11. 第2章 §2.七.N1.(7)(2.82) 式中 α_n 的下确界是什么?
12. 第2章 §2.七.N2. $P_n(3)$, $P_n(4)$ 的最优上下界是什么?
13. 第2章 §3N.4.(3.36) 式中, $\Delta(x)$ 的阶是多少?
14. 第2章 §3N4(4) 中(3.38) 式是否成立?
15. 第2章 §3N.5. 关于 Möbius 函数不等式(3.49) 是否成立?它与著名的 Riemann 猜想等价.
16. 第2章 §3N.16 中 Montgomery 关于(3.111) 式的猜想, Diophantus 不等式的新旧猜想见 Bulletin(New Series) of AMS;1990,23(1):37-75.

17. 第2章 §3N21 中 Vinogradov 的猜想.
18. 第3章 N20 Lyons 猜想.
19. 第3章 §N34(19) 中的最优上、下界是什么?
20. 第3章 N35 马统一的猜想.
21. 第3章 N40, $|f_1|$ 和 $|\sum_k \sqrt{k}a_k|$ 的最优下界是什么?
22. 第3章 N65. 中常数 2 是否还可改进? 最佳常数是什么?
23. 第3章 N71. Keogh 猜想.
24. 第3章 N76. Alzer 提出的问题.
25. 第3章 N86(5)倪仁兴. 张森国关于幂指和排序不等式的猜想.
26. 第3章 N92 宋庆、宋光猜想.
27. 第3章 N102, 李康海猜想.
28. 第3章 N132. Briggs 关于初等对称多项式不等式的猜想.
29. 第3章 N134, 王挽澜, 王鹏飞提出的问题.
30. 第3章 N146 关于使得 (146.1) 式成立的关于 p, n 的充要条件是什么?
31. 第3章 N150, 设 $a_k > 0, \sum_{k=1}^n a_k = 1, p > 0, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k^p}{a_k + a_{k+1}}$ 的最优上、下界是什么?
32. 第3章 N156, 杨定华的猜想.
33. 第3章 N157(7) 中常数 $c(p, q)$ 的渐近性态是什么?
34. 第4章 §1.一. N1(4) 中使 $\sum a^2 \geq 4\sqrt{3}S + \lambda \sum (a-b)^2$ 成立的最大 λ 是什么?
35. 第4章 §1.一. N32 中 λ 的最小值是什么? 陈琦猜想.
36. 第4章 §1.一. N38 刘保乾—张小明的一系列猜想.
37. 第4章 §1.二. N9 的下界如何改进?
38. 第4章 §1.二. N52 中 $f(x, y, z)$ 的上下界是什么?
39. 第4章 §1.二. N98. $\sum |\operatorname{ctg} nA|'$ 的最佳下界是什么?
40. 第4章 §1.三. N13 的证明如何简化? 下界是什么
41. 第4章 §1.四(三)N35, 文家金、单增提出的两个问题.
42. 第4章 §1.四(五)N. 52 - 5. N53 中的几个问题.
43. 第4章 §1.六. N. 1. (3)(4) 中 Abi-Khuzam 问题.
44. 第4章 §1.六. N. 14. 陈计等的猜想.
45. 第4章 §1.六 N16(2) 中最优上界是什么?
46. 第4章 §1.六. N19(25) Caragea 猜想.
47. 第4章 §1.六 N19(28) $\sum (h_1 h_2)'$ 与 $\sum (ab)'$ 的大小关系如何?
48. 第4章 §1.六 N. 19. (28) 陈计李广兴猜想.
49. 第4章 §1.六. N19(42) $(h_a h_{a1})^\lambda + (l_b l_{b1})^\lambda + (t_a t_{a1})^\lambda$ 的上下界是什么?
50. 第4章 §1.六. N19(43) $l_4^\lambda + l_5^\lambda + l_6^\lambda$ 的上下界是什么?
51. 第4章 §1.七. N. 1. 尹华焱猜想.

52. 第4章 §2. 一. 二. N. 3. 凸四边形不等式问题.
53. 第4章 §2. 一. (二). N. 6. $\sum (p-a)^{-1}$ 的上下界是多少?
54. 第4章 §2. 三. N. 5 安振平猜想.
55. 第4章 §2. 三. (二) N. 6. 双圆 n 边形不等式的问题.
56. 第4章 §2. 三. (二) N. 7. B-L 不等式推广的猜想.
57. 第4章 §2. 三. (二) N. 8. 与凸 n 边形不等式有关的下界问题.
58. 第4章 §2. 三. (二) N. 12. 王振, 陈计的三个猜想.
59. 第4章 §2. 三. (二) N. 13. 凸 n 边形 C-B 角不等式的两个猜想.
60. 第4章 §2. 三. (二) N. 14. 两个 n 边形面积不等式问题.
61. 第4章 §2. 四. N. 2(8). 四面体不等式的猜想.
62. 第4章 §2. 四. N. 3. (7). 林祖成、朱火芬的猜想.
63. 第4章 §2. 四. N. 9. (8). 唐立华的两个猜想.
64. 第4章 §2. 七. (三) N. 1. n 维单形元素的不等式问题.
65. 第4章 §2. 七. (三) N. 3. 杨世国猜想.
66. 第4章 §3. 二. N. 9. 费叶思—托特问题.
67. 第4章 §3. 三. (二) N. 6. Riemann 几何学中的等周不等式问题. [19]P443 还提出了等周不等式的若干猜想.
68. 第5章 §1N104(5) Wilker 不等式中 c_1, c_2 的最佳值是什么?
69. 第5章 §3N. 37(2) 中 c 的最佳值是多少?
70. 第5章 §4. Stolarsky 关于双曲函数不等式四个未解决的问题.
71. 第6章 §1. N19 中 $p \neq 2$ 时, $c(n, p)$ 是否关于 n 递减?
72. 第6章 §1. N19. Zbigniew 猜想.
73. 第6章 §1. N27(4) 周颂平关于 Turan 不等式推广的问题.
74. 第6章 §1. N28. Schoenberg 与 Rahman 的两个猜想.
75. 第6章 §1. N39. (1. 14) 式当 $n > 3$ 时是否成立?
76. 第6章 §1. N47 中常数 c 的最佳值是多少? Smale 的两个猜想.
77. 第6章 §1. N49. S-B 猜想, Erdős 猜想, Newman 猜想.
78. 第6章 §3N60 Erdős 猜想.
79. 第7章 §1 中关于函数凸性的几十不同概念中, 哪些是最核心的概念? 这些概念之间有什么联系?
80. 第8章 §1. N37. 当 $8 \leq n \leq 12$ 时的结论是什么?
81. 第8章 §3. 二. Lindelöf 猜想.
82. 第8章 §3. 七. 中常数 K 的最佳值是什么?
83. 第9章 §1. N42. (4) 中的最佳下界是什么?
84. 第9章 §2. 四. N5. 胡克不等式中 Hayman 常数 d_n 的最佳上、下界是什么?
85. 第9章 §2. 四. N6. 中当 $n > 3$ 时 $|b_n|$ 的最佳上界是多少?
86. 第9章 §2. 四. N16. 胡克提出的两个问题.

87. 第9章 §2.四.N21. $K(f, r)$ 的精确上界是多少?
88. 第9章 §2.五.N35. Gabriel 不等式中常数 A 的最佳值是什么?
89. 第9章 §2.五.N50. Minda 猜想.
90. 第10章 §1.N16. Minkowski 猜想遗留的问题
91. 第10章 §2.一.N20. 的若干猜想.
92. 第11章 §1.N12 中的三个猜想.
93. 第11章 §1.N22 陈计提出的问题.
94. 第11章 §1.N29. $g(n)$ 的最优上下界是什么?
95. 第11章 §2.N10. 华罗庚不等式中的常数 c 的最佳值是多少?
96. 第11章 §2.N31 中常数 $K(p, c)$ 的最佳值是什么?
97. 第11章 §2.N37. (6) Hardy 不等式, 文家金、张日新的猜想.
98. 第11章 §2.N37(11) Johnson 提出的三个未解决的问题.
99. 第11章 §2.N42. (9) 中常数 c 的最佳值是多少?
100. 第11章 §2.N44 中定理3中 $c(p, q)$ 是否为最佳值?
101. 第12章 §2.N1. (2.9) 式中常数 42 是否为最佳值?
102. 第12章 §2.N4. (2.18) 式中的精确常数是多少?
103. 第12章 §3.N5. N-K 不等式未解决问题和若干猜想, 见 [303]2000, 3(1):15
-24.
104. 第12章 §3.N9. Wirtinger 不等式中常数 $c(n, k, p, q)$ 的最佳值问题.
105. 第12章 §3N47, 如何从 $f^{(n)}(x) \leq f(x)$ 推出 $f^{(k)}(x)$ 的上界? $1 \leq k \leq n-2$
106. 第12章 §3N53. 当 $n > 4$ 时 $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ 是否成立?
107. 第13章 N2(3). Hilbert-Riesz 不等式中 $c(p, q)$ 的最佳值是什么?
108. 第13章 N2(3) 中常数 $K(p, q)$ 的最佳值是多少?
109. 第13章 N2(5) 中常数 $c(p, q, \alpha, \beta)$ 的最佳值是多少?
110. 第13章 N3(9) 中常数 $c(p, q, \lambda)$ 的最佳值如何确定?
111. 第13章 N3(10) 中的最佳常数问题.
112. 第13章 N17(3) 当 $n > 7$ 时常数 A_n 的最佳值是多少?
113. 第13章 N29. Sobolev 不等式. (7) 中常数 c 的最佳值是多少?
114. 第13章 N39⑤中使得 $(-1)^{n+1-k} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} > 0$ 的充要条件是什么?
115. 第13章 N93 中的常数 $A(\beta, p, \alpha)$ 如何估计?
116. 第13章 N125, 126 中常数和 N128 中 $G(k, m)$ 的最佳上、下界是什么?
117. 第14章 §1.N3. 中 c 的最佳值是多少?
118. 第14章 §1.N4. 中 (4.3) 式成立与内积空间的关系问题.
119. 第14章 §2.N6. (5) 中常数 c 的最佳值是多少?
120. 第14章 §2.N7. (15) 谢庭藩一周颂平猜想.
121. 第14章 §2.N21. (3). Howell 猜想.

122. 第14章 §2. N24. GW 算子不等式中常数 c_1, c_2 的估计式是什么?
123. 第14章 §2. N25. Gamma 算子不等式中的最佳常数是什么?
124. 第14章 §2. N30(18)中 p 的范围能否改善?
125. 第14章 §2. N30. (21)H-L 嵌入不等式中邓东皋—韩永生提出的问题.
126. 第14章 §2. N32(2)分数次积分算子不等式中最佳常数问题.
127. 第14章 §2. N32(3)中的最佳常数问题.
128. 第14章 §2. N34(5), Pichorides 猜想.
129. 第15章 §1. N19. $E\{\min\{\xi, k\}\}$ 的上界问题.
130. 第15章 §1. N25. Moran 不等式中的下界问题.
131. 第15章 §1. N26 邵启满猜想.
132. 第15章 §1. N36 文家金关于方差平均 $D_r(x, p)$ 关于 r 递增的猜想.
133. 第15章 §2. N25(1)中最佳常数问题.
134. 第15章 §2. N49 鞅不等式中的最佳常数问题.
135. 第16章 §1. N2. 基数函数不等式, 在[94], 特别是其中第1-2章有大量不等式研究问题, 因为涉及过多专有名词, 有兴趣的读者可查阅原文.
136. 第16章 §2. N11. Behzad 全着色猜想.
137. 第16章 §2. N17. Ramsey 数的确定问题.
138. 第16章 §2. N17(4)中(2.4)式成立的条件是什么?
139. 第16章 §2. N21. Duke 猜想.
140. 第16章 §2. N22 图的重构猜想.
141. 第16章 §2. N24. 图的等周不等式, 除极少数重要的图类的最好的等周不等式外, 大多数图的等周不等式还不知道.
142. 设任意三角形位于闭单位正方形内, Funar 猜想: 该三角形内切圆半径 $r \leq (\sqrt{5} - 1)/4$. 见[305]1984, 81: 588.
143. Funar 猜想: 设任意三角形位于宽为 d 的闭凸图形 K 内, r_1, r_2 分别是三角形和 K 的内切圆半径, 猜想: $1/2 \leq \sup(r_1/r_2) \leq 1$. 已经证明 $1/4 \leq (\sup r_1)/d \leq 1/2$, 见[305]1984, 91: 588.
144. Garfunkel 关于三角形 Malfatti 圆不等式的猜想: $\Delta M_1 M_2 M_3$ 的 Malfatti 圆指与三角形的两边和其他两个圆相切的内切圆. 设这三个 Malfatti 圆的圆心分别为 O_1, O_2, O_3 , 若圆 O 是与这三个圆相外切并与 $\Delta G_1 G_2 G_3$ 的边相切的最小圆. $\Delta G_1 G_2 G_3, \Delta M_1 M_2 M_3, \Delta O_1 O_2 O_3$ 的周长分别记为 L_1, L_2, L_3 , 猜想 $L_1 \geq L_2 + L_3$, 仅当 $\Delta O_1 O_2 O_3$ 为等边时等号成立. 见[381]1986, 12: 108.
145. 设 a_k, b_k, S_1, S_2 分别是两个 n 边形的边长和面积. 令 $c_k = (a_k^q + b_k^q)^{1/q}, q \geq 1$, 则当 $2 \leq q \leq 4$ 时, 以 $\{c_k\}$ 为边长的 n 边形的最大面积 S 满足

$$S^{q/2} \geq S_1^{q/2} + S_2^{q/2}.$$
 $q > 4$ 时上式不成立. 问 $1 \leq q < 2$ 时上式是否成立? 见宁波大学学报 1991, 1: 17-20.

146. Erdős-Guy 关于格点不等式的猜想: 设 (x, y) 为格点, 即坐标均为整数的点, $1 \leq x, y \leq n$, 选择 k , 使得 $\left[\frac{k}{2} \right]$ 个格点之间的距离互不相同, 问 k 的最大值是什么? 容易看出, $k \leq n$, 而 Erdős-Guy 证明 $n^p < k < cn/(\ln n)^{1/4}$, 式中 $p = (2/3) - \epsilon, \epsilon > 0$, 并猜想 $k < cn^{2/3}(\ln n)^{1/6}$. 见[93]P132-133. F. 2. 该书还进一步提出了其他问题.

147. Erdős 关于欧拉函数 $\varphi(n)$ 不等式的猜想: 设 $\varphi(n)$ 是不超过 n 且与 n 互素的自然数的个数. (见第 2 章 § 3N3). 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{\varphi(n)}$ 是小于 n 且与 n 互素的整数.

Erdős 猜想: $\sum_k (a_{k+1} - a_k)^2 < \frac{cn^2}{\varphi(n)}$. 见[93]P54. B40.

148. 焦争鸣问题: 设 A 为 Hermite 矩阵, B 为斜 Hermite 矩阵, 是否成立 $\text{tr}(AB)^n \geq \text{tr}(A^n B^n)$ 当 A 也为斜 Hermite 矩阵时, 不等号是否反向? 当 $n = 2$ 时已证明, 见山东师大学报 1992, 4: 19-20.

149. 设 S 表示在区域 $1 < |z| < \infty$ 中单叶亚纯函数 $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ 所组成的函数类, G 是 $F \in S$ 的逆函数, 而 G 在 ∞ 邻域的展开式是 $G(\omega) = \omega - \sum_{n=1}^{\infty} B_k \omega^{-k}$.

1951 年 Springer, G. 证明 $|B_3| \leq 1$, 并猜想

$$|B_{2k-1}| \leq \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}. \quad (149.1)$$

Schober, G., 任福尧等证明 $k \leq 17$ 时 (149.1) 式成立. 1989 年王冠闽就所有 $b_k > 0$ 等一些特殊情形证明 (149.1) 式成立, 但对于 $|B_k|$ 的上界仍未解决. 见[335]1992, 2: 197-201.

150. 最优求积问题: 设 $f \in L[0, 2\pi]$,

$$\int_0^{2\pi} f = \sum_{k=1}^m a_k f(x_k) + R_m(f), \quad \text{式中 } 0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m < 2\pi.$$

若存在 $\{a_k^*\}$ 和 $\{x_k^*\}$, 使得

$$\int_0^{2\pi} f - \sum_{k=1}^m a_k^* f(x_k^*) = \inf_{\{a_k\}, \{x_k\}} \sup_{f \in [0, 2\pi]} R_m(f),$$

则称 $\sum_{k=1}^m a_k^* f(x_k^*)$ 为最优求积, 相应的 $R_m^*(f) = \int_0^{2\pi} f - \sum_{k=1}^m a_k^* f(x_k^*)$ 为最优误差.

对于不同函数类 f , 相应的最优求积公式的存在性、惟一性、及解析表达式, 看起来是简单的定积分逼近问题, 其解决方法往往需要非常深刻的分析技巧和泛函分析、拓扑等思想和方法, 这是一个值得进一步研究的问题, 可参看[68]. 和 MR99f: 26026.

151. 本书所涉及的积分, 一般指 (L) 积分, 由于 (L) 积分是一种绝对积分, 还不能完全包含黎曼积分和牛顿积分, 于是各种新的积分就成了研究中的一个热点. 如 Henstock 积分、Perron 积分、Denjoy 积分、Bochner 积分、A 积分等等, 将本书中涉及 (L) 积分的不等式换成其他积分, 原来的不等式还成不成立? 有什么新的结果? 例如第 13 章 N14 Gronwall 不等式对于 Henstock 积分也成立. 目前关于新积分不等式的结果还很少, 是一个值得关

注的新研究方向.

152. 许多经典不等式在本质上确定了各种不同的抽象空间中线性算子或线性泛函的范数, 反之, 许多函数空间的特征是用不等式刻划的, 美国数学评论(MR)2000 新的分类法增中了 39B62(泛函不等式), 39B72(泛函方程和不等式系统) 也是一个值得关注的研究方向.