2011 年全国高中数学联合竞赛一试

试题参考答案（B 卷）

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；解答题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题第 9 题 4 分为一个档次，第 10,11 题 5 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分．把答案填在横线上．

1．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_{2010}-S_1=1$，则$S_{2011}=$____________.

解　因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$S_{2010}-S_1=S_{2010}-a_1=2009(\frac{a_2+a_{2010}}{2})=2009a_{1006}=1$，

于是$a_{1006}=\frac{1}{2009}$，所以 $S_{2011}=2011(\frac{a_1+a_{2011}}{2})=2011a_{1006}=\frac{2011}{2009}$.

2．已知复数z的模为 1， 若$z=z_1$和$z=z_2$时$|z+1+\mathrm{i}|$分别取得最大值和最小值，则$z_1-z_2=$____________.

解　易知$|1+\mathrm{i}|-|z|\leqslant|z+1+\mathrm{i}|\leqslant|1+\mathrm{i}|+|z|$，即$\sqrt{2}-1\leqslant|z+1+\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{2}+1$.

当$|z+1+\mathrm{i}|$取得最大值（最小值）时，z与 1+i 共线且方向相同（相反）.

又 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$，所以$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$，$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}$，

所以 $z_1-z_2=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}-[\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}]=\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$.

3．若正实数a,b满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则$\log_a b=$________.

解　由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，得$a+b\le 2\sqrt{2}ab$.

又 $(a+b)^2=4ab+(a-b)^2=4ab+4(ab)^3\ge 4\cdot 2\sqrt{ab\cdot(ab)^3}=8(ab)^2$，

即 $a+b\ge 2\sqrt{2}ab$. ①

于是 $a+b=2\sqrt{2}ab$. ②

再由不等式①中等号成立的条件，得$ab=1$．与②联立解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}-1,\\ b=\sqrt{2}+1,\end{cases}$或$\begin{cases}a=\sqrt{2}+1,\\ b=\sqrt{2}-1,\end{cases}$

故$\log_a b=-1$.

4．把扑克牌中的$A,2,\cdots,J,Q,K$分别看作数字 1, 2, …，11, 12, 13．现将一幅扑克牌中的

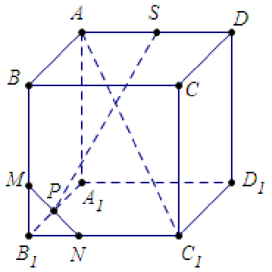
黑桃、红桃各 13 张放在一起，从中随机取出 2 张牌，其花色相同且两个数的积是完全平方数的概率为______________________.

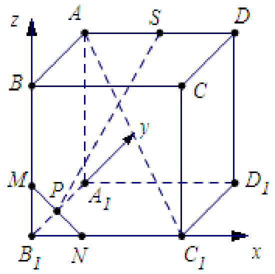
解　从 26 张牌中任意取出 2 张，共有 $C_{26}^2=325$ 种取法．牌的花色相同且积是完全平方数的有 $4=1\times4,\ 9=1\times9,\ 16=2\times8,\ 36=3\times12=4\times9$，共有 10 对．因此，所求概率为 $\frac{10}{325}=\frac{2}{65}$．

5．若△ABC 的角 A,C 满足 $5(\cos A+\cos C)+4(\cos A\cos C+1)=0$，则 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=$______.

解　因为 $\cos A=\dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$，$\cos C=\dfrac{1-\tan^2\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}}$，代入已知等式并化简整理，得 $\tan^2\frac{A}{2}\cdot\tan^2\frac{C}{2}=9$．又因为 $\frac{A}{2},\frac{C}{2}$ 均为锐角，所以 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}>0$，故 $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}=3$．

6．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 6，M,N 分别是 BB_1,B_1C_1 上的点，$B_1M=B_1N=2$，S,P 分别是线段 AD,MN 的中点，则异面直线 SP 与 AC_1 的距离为______.





解　建立如图所示的空间直角坐标系，则

$A(0,6,6),C_1(6,0,0),S(3,6,6),P(1,0,1)$．

可求得：$\overrightarrow{AC_1}=(6,-6,-6),\ \overrightarrow{PS}=(2,6,5)$．

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 满足 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PS}=0,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x-y-z=0,\\ 2x+6y+5z=0,\end{cases}$ 取 $\vec{n}=(1,-7,8)$．

而 $\overrightarrow{AS}=(3,0,0)$，则异面直线 SP 与 AC_1 的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AS}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(3,0,0)\cdot(1,-7,8)|}{\sqrt{1^2+(-7)^2+8^2}}=\frac{3}{\sqrt{114}}=\frac{\sqrt{114}}{38}.$$

7．在△ABC 中，E,F 分别是 AC,AB 的中点，$AB=\frac{2}{3}AC$．若 $\frac{BE}{CF}<t$ 恒成立，则 t 的最小值为__________.

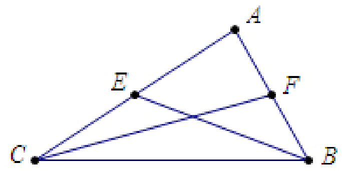
解　由余弦定理得

$$BE^2=AE^2+AB^2-2AE\cdot AB\cdot\cos A=\frac{1}{4}AC^2+\frac{4}{9}AC^2-\frac{2}{3}AC^2\cdot\cos A=\left(\frac{25}{36}-\frac{2}{3}\cos A\right)AC^2,$$

$$CF^2=AF^2+AC^2-2AF\cdot AC\cdot\cos A=\frac{1}{9}AC^2+AC^2-\frac{2}{3}AC^2\cdot\cos A=\left(\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos A\right)AC^2,$$

所以 $$\frac{BE^2}{CF^2}=\frac{\frac{25}{36}-\frac{2}{3}\cos A}{\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos A}=\frac{25-24\cos A}{40-24\cos A}=1-\frac{15}{40-24\cos A}<1-\frac{15}{40+24}=\frac{49}{64},$$

故 $\dfrac{BE}{CF}<\dfrac{7}{8}$，从而 $t\geq\dfrac{7}{8}$，即 t 的最小值为 $\dfrac{7}{8}$.



8．抛物线 $y^2=2p(x-\dfrac{p}{2})$ $(p>0)$ 上动点 A 到点 $B(3,0)$ 的距离的最小值记为 $d(p)$，满足 $d(p)=2$ 的所有实数 p 的和为____________.

解　设 $A(x,y)$，则

$$AB^2=(x-3)^2+y^2=(x-3)^2+2p(x-\frac{p}{2})=x^2+2(p-3)x+(9-p^2) \qquad ①$$

$$=(x+p-3)^2-2p^2+6p,(x\geq\frac{p}{2}) \qquad ②$$

（1）若 $3-p\geq\dfrac{p}{2}$，即 $0<p\leq2$，则当 $x=3-p$ 时，AB^2 取得最小值，$[d(p)]^2=-2p^2+6p$．又 $d(p)=2$，所以 $-2p^2+6p=4$，解得：$p_1=1,p_2=2$.

（2）若 $3-p<\dfrac{p}{2}$，即 $p>2$，则当 $x=\dfrac{p}{2}$ 时 AB^2 取得最小值，$[d(p)]^2=\dfrac{(p-6)^2}{4}$.

又 $d(p)=2$，所以 $\dfrac{(p-6)^2}{4}=4$，解得 $p_3=10$.

因此，满足 $d(p)=2$ 的所有实数 p 的和为：$p_1+p_2+p_3=1+2+10=13$.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9．（本小题满分 16 分）已知实数 x,y,z 满足：$x\geq y\geq z$，$x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2=3$．求实数 x 的取值范围．

解　令 $x=1+t$．由 $x+y+z=1$ 得 $z=-t-y$，代入 $x^2+y^2+z^2=3$，得

$$y^2+ty+t^2+t-1=0, \qquad ①$$

方程①有实数根，所以 $\Delta=t^2-4(t^2+t-1)\geq0$，解得 $-2\leq t\leq\dfrac{2}{3}$.

由①及 $y>z$ 可得　$y=\dfrac{-t+\sqrt{4-4t-3t^2}}{2},z=\dfrac{-t-\sqrt{4-4t-3t^2}}{2}$.

又 $x\geq y$，所以 $1+t\geq\dfrac{-t+\sqrt{4-4t-3t^2}}{2}$，即 $2+3t\geq\sqrt{4-4t-3t^2}$，解得 $t\geq0$.

综合可知，$0\leq t\leq\dfrac{2}{3}$，从而 $1\leq x\leq\dfrac{5}{3}$.

因此，所求实数 x 的取值范围是 $\left[1,\ \dfrac{5}{3}\right]$.

10．（本小题满分 20 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2t-2\ (t\in R$ 且 $t\neq\pm1)$，$a_{n+1}=\dfrac{2(t^{n+1}-1)a_n}{a_n+2t^n-2}\ (n\in N^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若$t>0$，试比较a_{n+1}与a_n的大小．

解　（1）由原式变形得，$\dfrac{a_{n+1}}{t^{n+1}-1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2(t^n-1)}=\dfrac{\dfrac{2a_n}{t^n-1}}{\dfrac{a_n}{t^n-1}+2}$．

记$\dfrac{a_n}{t^n-1}=b_n$，则$b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{b_n+2}$，$b_1=\dfrac{a_1}{t-1}=\dfrac{2t-2}{t-1}=2$．

又 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{2}$，从而有$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$，

故 $\dfrac{a_n}{t^n-1}=\dfrac{2}{n}$，于是有 $a_n=\dfrac{2(t^n-1)}{n}$．

（2）$a_{n+1}-a_n=\dfrac{2(t^{n+1}-1)}{n+1}-\dfrac{2(t^n-1)}{n}$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n)-(n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[nt^n-(1+t+\cdots+t^{n-1})\right]=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[(t^n-1)+(t^n-t)+\cdots+(t^n-t^{n-1})\right]$$

$$=\frac{2(t-1)^2}{n(n+1)}\left[(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)+t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1)+\cdots+t^{n-1}\right],$$

显然在$t>0$时恒有$a_{n+1}-a_n>0$，故$a_{n+1}>a_n$．

11．（本小题满分 20 分）已知$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$是抛物线$y^2=2px(p>0)$上不同的三点，△$A_1A_2A_3$有两边所在的直线与抛物线$x^2=2qy(q>0)$相切，证明：对不同的$i,j\in\{1,2,3\}$，$y_iy_j(y_i+y_j)$为定值．

证　依题意有$y_i^2=2px_i, i=1,2,3$．　y_1,y_2,y_3互不相等．

不妨设A_1A_2,A_2A_3所在的直线与抛物线$x^2=2qy$相切．因为抛物线$x^2=2qy$的过原点O的切线与抛物线$y^2=2px$只有一个公共点，所以原点O不能是所设内接三角形的顶点，即$(x_i,y_i)\neq(0,0),\ i=1,2,3$．

因为A_1A_2所在的直线与抛物线$x^2=2qy$相切，所以A_1A_2不能与y轴平行，即$x_1\neq x_2$，$y_1\neq -y_2$．

直线A_1A_2的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$，把$x_1=\dfrac{y_1^2}{2p},x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$代入，整理得

$$y=\frac{2p}{y_1+y_2}x+\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}.$$

直线A_1A_2与抛物线$x^2=2qy$的交点的横坐标满足

$$x^2-\frac{4pq}{y_1+y_2}x-\frac{2qy_1y_2}{y_1+y_2}=0\ . \qquad ①$$

由于 A_1A_2 所在的直线与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，所以方程①的判别式

$$\Delta=\left(-\frac{4pq}{y_1+y_2}\right)^2+4\left(\frac{2qy_1y_2}{y_1+y_2}\right)=0\ ,$$

化简整理得

$$y_1y_2(y_1+y_2)=-2p^2q\ . \qquad ②$$

由于 A_2A_3 所在的直线也与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，同理可得

$$y_2y_3(y_2+y_3)=-2p^2q\ . \qquad ③$$

②−③得 $y_2(y_1-y_3)(y_1+y_2+y_3)=0$.
又 $y_2\neq 0, y_1\neq y_3$，所以 $y_1+y_2+y_3=0$，从而 $y_2=-y_1-y_3$.

把 $y_2=-y_1-y_3$ 代入②式，整理得 $y_1y_3(y_1+y_3)=-2p^2q$.

因此，对不同的 $i, j\in\{1, 2, 3\}, i\neq j$， $y_iy_j(y_i+y_j)$ 为定值 $-2p^2q$.