2011 年全国高中数学联合竞赛加试

试题参考答案（B 卷）

说明：

1．评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要再增加其他中间档次.

一、（本题满分 40 分）

求所有三元整数组 (x,y,z)，使其满足

$$\begin{cases}x^3+y^3+z^3-3xyz=2011,\\ x\ge 15,\\ y\ge 15.\end{cases}$$

解 由 $x^3+y^3+z^3-3xyz=2011$，得

$$(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]=4022\ . \qquad ①$$

因 $4022=2011\times 2$ 且 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$，

所以①等价于 $\begin{cases}x+y+z=1,\\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=4022.\end{cases}$ ②

或 $\begin{cases}x+y+z=2011,\\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2.\end{cases}$ ③

对于方程组②，消去 z 得 $(x-y)^2+(x+2y-1)^2+(2x+y-1)^2=4022$，

即 $x^2+y^2+xy-x-y=670\ .$ ④

（1）若 $x=15,y=15$，则

$x^2+y^2+xy-x-y=645<670$，与④矛盾.

（2）若 $x\ge 16,y\ge 15$，则

$x^2+y^2+xy-x-y=x^2+(y-1)(x+y)\ge 256+434=690>670$，与④矛盾.

（3）若 $x\ge 15,y\ge 16$，则

$x^2+y^2+xy-x-y=(x-1)(x+y)+y^2\ge 434+256=690>670$，与④矛盾.

综上，方程组②无解.

对于方程组③，因为 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$，所以 $|x-y|,|y-z|,|z-x|$ 中有两个为 1，一个为 0.

（1）若 $|x-y|=|y-z|=1,|z-x|=0$，则 $y+1=x=z$ 或 $y-1=x=z$.

当 $y+1=x=z$ 时，代入③的第一个方程，无解.

当 $y-1=x=z$ 时，代入③的第一个方程，得 $3y=2013$，解得 $y=671, x=z=670$.

（2）若 $|x-y|=|z-x|=1, |y-z|=0$，同理可得 $x=671, y=z=670$.

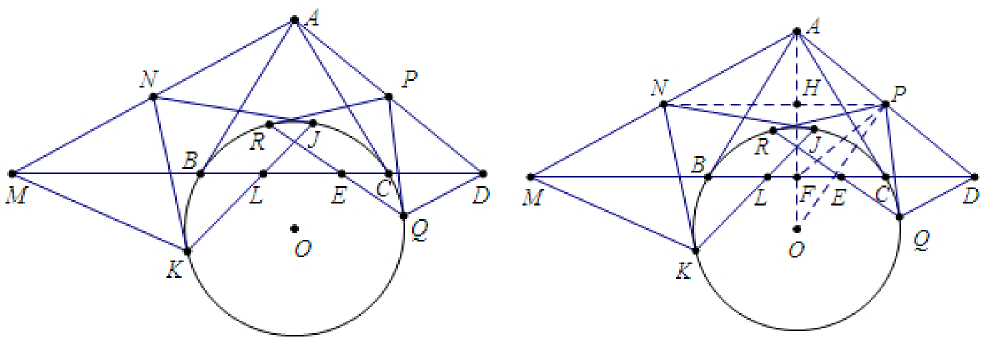
（3）若 $|z-x|=|y-z|=1, |x-y|=0$，同理可得 $z=671, x=y=670$.

综上，满足条件的三元整数组为 $(671,670,670), (670,671,670), (670,670,671)$.

二、（本题满分 40 分）

如图，过⊙O 外一点 A 作⊙O 的两条切线，切点分别为 B,C . 点 D 在线段 BC 的延长线上，$CD=\frac{1}{2}BC$. P 为 AD 的中点，过点 P 作⊙O 的两条切线，切点分别为 Q,R，QR 与 BC 交于点 E . 点 M 在线段 CB 的延长线上，$BM=BC$. N 为 AM 的中点，过点 N 作⊙O 的两条切线，切点分别为 J,K，JK 与 BC 交于点 L .

证明：（1）A,R,Q,D 四点共圆；（2）$\frac{MC}{CL}=\frac{BE}{CE}$.



证明：（1）连接 OA 交 BC 于点 F，过点 P 作 $PH\perp OA$ 于点 H，则由题意有 $BC\perp OA$，$BF=CF, AH=FH$.

因为 P 是 $Rt\triangle AFD$ 的斜边 AD 的中点，所以 $PA=PD=PF$.

由 PQ, PR 为⊙O 的切线得 $PQ=PR$.

设⊙O 的半径为 r，则

$$PQ^2=OP^2-r^2=OH^2+PH^2-r^2=OH^2+PF^2-HF^2-r^2$$

$$=PF^2+(OH+HF)(OH-HF)-r^2=PF^2+OA\cdot OF-r^2=PF^2,$$

可得 $PQ=PF$，于是可得五点 A,R,F,Q,D 共圆.

（2）由相交弦定理有 $DE\cdot FE=RE\cdot QE=BE\cdot CE$.

又由 $DF\cdot EF=DE\cdot EF+EF^2=BE\cdot CE+EF^2=(CF+EF)(CF-EF)+EF^2=CF^2$ 及 $BC=2CF$ 可得 $BC^2=4DF\cdot EF$.

故有 $\frac{2DF}{BC}=\frac{BC}{2EF}$，即 $\frac{DB+DC}{DB-DC}=\frac{BE+CE}{BE-CE}$，故 $\frac{BE}{CE}=\frac{DB}{DC}=3$，所以 $BE=3CE$.

同理可得 $\frac{BL}{CL}=\frac{BM}{CM}=\frac{1}{2}$，故 $BL=\frac{1}{2}CL$，从而 $MC=3CL$.

因此，$\frac{MC}{CL}=\frac{BE}{CE}$.

三、（本题满分 50 分）

设实数 $a,b,c\ge 1$，且满足 $abc+2a^2+2b^2+2c^2+ca-cb-4a+4b-c=28$，求 $a+b+c$ 的最大值.

证明　由已知等式可得，$(a-1)^2+(b+1)^2+c^2+\frac{1}{2}(a-1)(b+1)c=16$．　　①

令 $a'=a-1,b'=b+1$，则 $a=a'+1,b=b'-1$，则①式等价于

$$a'^2+b'^2+c^2+\frac{1}{2}a'b'c=16. \qquad ②$$

易知 $\min\{a',b',c\}<4$．

令 $l=a'+b'+c$，则 $a+b+c=(a-1)+(b+1)+c=a'+b'+c=l$．

设 $f(x)=(x-a')(x-b')(x-c)=x^3-lx^2+(a'b'+b'c+ca')x-a'b'c$，则

$$f(4)=4^3-l\cdot 4^2+\frac{l^2-(a'^2+b'^2+c^2)}{2}\times 4-a'b'c=64-16l+2l^2-2(a'^2+b'^2+c^2+\frac{1}{2}a'b'c)$$

$$=64-16l+2l^2-32=2l^2-16l+32.$$

当 $x>\min\{a',b',c\}$ 时，由平均值不等式得

$$(x-a')(x-b')(x-c)\le\frac{1}{27}(3x-l)^3, \qquad ③$$

所以　$f(4)=(4-a')(4-b')(4-c)\le\frac{1}{27}(12-l)^3$．

从而　$2l^2-16l+32\le\frac{1}{27}(12-l)^3$，

整理得　$l^3+18l^2-27\times 32\le 0$，即　$(l-6)(l^2+24l+6\times 24)\le 0$，所以　$l\le 6$．

③式中等号成立的条件是 $x-a'=x-b'=x-c$，即 $a'=b'=c$，代入②得 $a'=b'=c=2$．

因此，当 $a'=b'=c=2$ 时，$l_{\max}=6$．

所以 当 $a=3,b=1,c=2$ 时，$(a+b+c)_{\max}=6$．

四、（本题满分 50 分）

给定 n 个不同实数，其所有全排列组成的集合为 A_n，对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，若恰有两个不同的整数 $i,j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_i>a_{i+1},a_j>a_{j+1}$ 成立，则称该排列为“好排列”．求 A_n 中“好排列”的个数.

解　首先定义：

对于 A 中的一个排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，如果满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则称该排列为自然排列.

对于 A 中的一个排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，若有整数 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $a_i>a_{i+1}$，则称 a_i 和 a_{i+1} 构成一个“相邻逆序”.

对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A$，如果它恰有一个“相邻逆序”，则称该排列为“一阶好排列”，A 中所有“一阶好排列”的个数记为 $f_1(n)$；如果它恰有两个“相邻逆序”，则称该排列为“二阶好排列”，A 中所有“二阶好排列”的个数记为 $f_2(n)$．依题意知，$f_2(n)$ 恰好是要求的 A 中“好排列”的个数.

由题意知：$f_1(1)=0,\ f_1(2)=1,\ f_2(1)=f_2(2)=0,\ f_2(3)=1$．

以下为了叙述简便，我们把由给定的 k 个不同实数的所有全排列构成的集合记为 $A_k\,(k=1,2,\cdots,n)$．

其次求 $f_1(n)$．

我们先来考查 $f_1(k+1)$ 与 $f_1(k)$ 之间的递推关系.

对于 A_{k+1} 中的每一个“一阶好排列”（记为 a），我们考虑从中取出最大的数 a_{k+1} 后剩下的 k 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 按原来顺序构成的排列（记为 b）.

如果排列 b 是 A_k 中的“一阶好排列”，且“相邻逆序”为 $a_i>a_{i+1}$，那么，在排列 a 中，a_{k+1} 的位置只能在 a_i,a_{i+1} 之间或最后；

如果排列 b 不是 A_k 中的“一阶好排列”，则排列 b 中“相邻逆序”的个数不为 1，显然排列 b 中“相邻逆序”的个数不能大于 1（否则排列 a 不是“一阶好排列”，理由是：因为 a_{k+1} 是 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$ 中最大的数，所以排列 a 中“相邻逆序”的个数一定不少于排列 b 中“相邻逆序”的个数），从而排列 b 中“相邻逆序”的个数为 0，此时排列 b 是一个自然排列，而排列 a 是“一阶好排列”，所以 a_{k+1} 的位置不能在最后（有 k 种可能的位置）.

综合上面的分析可知：$f_1(k+1)=2f_1(k)+k \quad (k\in N^*)$.

则 $f_1(k+1)+(k+1)+1=2[f_1(k)+k+1]$，

所以数列 $\{f_1(k)+k++1\}$ 构成以 $f_1(2)+2+1=4$ 为首项、2 为公比的等比数列，所以

$f_1(n)+n+1=4\cdot 2^{n-2}$，即 $f_1(n)=2^n-n-1$.

最后求 $f_2(n)$.

我们先来考查 $f_2(k+1)$ 与 $f_2(k)$ 之间的关系.

对于 A_{k+1} 中的每一个“二阶好排列”（记为 c），我们考虑从中取出最大的数 a_{k+1} 后剩下的 k 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 按原来顺序构成的排列（记为 d）.

如果排列 d 是 A_k 中的“二阶好排列”，且“相邻逆序”为 $a_i>a_{i+1},a_j>a_{j+1}$，那么，在排列 c 中，a_{k+1} 的位置只能在 a_i 和 a_{i+1} 之间，或者在 a_j 和 a_{j+1} 之间，或者排在最后；

如果排列 d 不是 A_k 中的二阶“好排列”，则它一定是 A_k 中的“一阶好排列”，设“相邻逆序”为 $a_i>a_{i+1}$，因为排列 c 是“二阶好排列”，所以 a_{k+1} 的位置不能在 a_i 和 a_{i+1} 之间，也不能在最后，其余位置都可以，有 $k-1$ 种可能.

综合上面的分析可知：$f_2(k+1)=3f_2(k)+(k-1)f_1(k) \quad (k\in N^*)$.

又 $f_1(n)=2^n-n-1$，所以 $f_2(k+1)=3f_2(k)+(k-1)(2^k-k-1)$，变形可得

$$f_2(k+1)+(k+2)\cdot 2^{k+1}=3[f_2(k)+(k+1)\cdot 2^k]-k^2+1,$$

$$f_2(k+1)+(k+2)\cdot 2^{k+1}-\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=3[f_2(k)+(k+1)\cdot 2^k-\frac{1}{2}k(k+1)],$$

所以数列 $\{f_2(k)+(k+1)\cdot 2^k-\frac{1}{2}k(k+1)\}$ 构成以 $f_2(3)+(3+1)\cdot 2^3-\frac{1}{2}\times 3\times(3+1)=27$ 为首项、3 为公比的等比数列，所以

$$f_2(n)+(n+1)\cdot 2^n-\frac{1}{2}n(n+1)=27\cdot 3^{n-3},$$

即 $f_2(n)=3^n-(n+1)\cdot 2^n+\frac{1}{2}n(n+1)$.

因此，A 中“好排列”的个数为 $3^n-(n+1)\cdot 2^n+\frac{1}{2}n(n+1)$ 个.