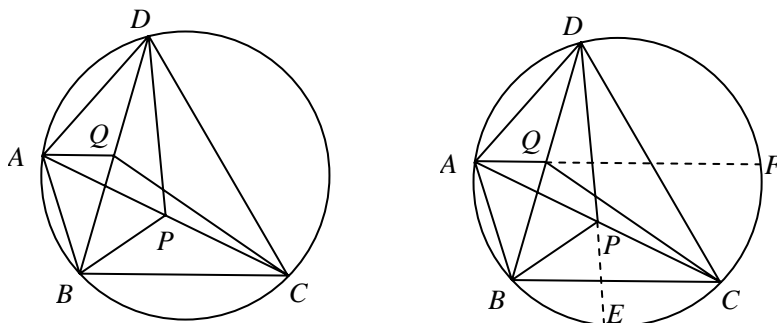


# 2011 年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案 (A 卷)

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分;
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不要再增加其他中间档次.

**一、(本题满分 40 分)** 如图,  $P, Q$  分别是圆内接四边形  $ABCD$  的对角线  $AC, BD$  的中点. 若  $\angle BPA = \angle DPA$ , 证明:  $\angle AQB = \angle CQB$ .



**证明** 延长线段  $DP$  与圆交于另一点  $E$ , 则  $\angle CPE = \angle DPA = \angle BPA$ , 又  $P$  是线段  $AC$  的中点, 故  $\widehat{AB} = \widehat{CE}$ , 从而  $\angle CDP = \angle BDA$ .

又  $\angle ABD = \angle PCD$ , 所以  $\triangle ABD \sim \triangle PCD$ , 于是  $\frac{AB}{BD} = \frac{PC}{CD}$ , 即

$$AB \cdot CD = PC \cdot BD$$

从而有  $AB \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AC \cdot (\frac{1}{2} BD) = AC \cdot BQ$ ,

即  $\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{CD}$ .

又  $\angle ABQ = \angle ACD$ , 所以  $\triangle ABQ \sim \triangle ACD$ , 所以  $\angle QAB = \angle DAC$ .

延长线段  $AQ$  与圆交于另一点  $F$ , 则  $\angle CAB = \angle DAF$ , 故  $\widehat{BC} = \widehat{DF}$ .

又因为  $Q$  为  $BD$  的中点, 所以  $\angle CQB = \angle DQF$ .

又  $\angle AQB = \angle DQF$ , 所以  $\angle AQB = \angle CQB$ .

二、(本题满分 40 分) 证明: 对任意整数  $n \geq 4$ , 存在一个  $n$  次多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

具有如下性质:

- (1)  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  均为正整数;
- (2) 对任意正整数  $m$ , 及任意  $k$  ( $k \geq 2$ ) 个互不相同的正整数  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , 均有

$$f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k).$$

**证明** 令

$$f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) + 2, \quad \text{①}$$

将①的右边展开即知  $f(x)$  是一个首项系数为 1 的正整数系数的  $n$  次多项式.

下面证明  $f(x)$  满足性质 (2).

对任意整数  $t$ , 由于  $n \geq 4$ , 故连续的  $n$  个整数  $t+1, t+2, \dots, t+n$  中必有一个为 4 的倍数, 从而由①知  $f(t) \equiv 2 \pmod{4}$ .

因此, 对任意  $k$  ( $k \geq 2$ ) 个正整数  $r_1, r_2, \dots, r_k$ , 有

$$f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k) \equiv 2^k \equiv 0 \pmod{4}.$$

但对任意正整数  $m$ , 有  $f(m) \equiv 2 \pmod{4}$ , 故

$$f(m) \not\equiv f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k) \pmod{4},$$

从而  $f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)$ .

所以  $f(x)$  符合题设要求.

**三、(本题满分 50 分)** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 4$ ) 是给定的正实数,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . 对任意

正实数  $r$ , 满足  $\frac{a_j - a_i}{a_k - a_j} = r$  ( $1 \leq i < j < k \leq n$ ) 的三元数组  $(i, j, k)$  的个数记为  $f_n(r)$ .

证明:  $f_n(r) < \frac{n^2}{4}$ .

**证明** 对给定的  $j$  ( $1 < j < n$ ), 满足  $1 \leq i < j < k \leq n$ , 且

$$\frac{a_j - a_i}{a_k - a_j} = r \quad (1)$$

的三元数组  $(i, j, k)$  的个数记为  $g_j(r)$ .

注意到, 若  $i, j$  固定, 则显然至多有一个  $k$  使得①成立. 因  $i < j$ , 即  $i$  有  $j-1$  种选法, 故  $g_j(r) \leq j-1$ .

同样地, 若  $j, k$  固定, 则至多有一个  $i$  使得①成立. 因  $k > j$ , 即  $k$  有  $n-j$  种选法, 故  $g_j(r) \leq n-j$ . 从而

$$g_j(r) \leq \min\{j-1, n-j\}.$$

因此, 当  $n$  为偶数时, 设  $n = 2m$ , 则有

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \sum_{j=2}^{n-1} g_j(r) = \sum_{j=2}^{m-1} g_j(r) + \sum_{j=m}^{2m-1} g_j(r) \\ &\leq \sum_{j=2}^m (j-1) + \sum_{j=m+1}^{2m-1} (2m-j) = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} \\ &= m^2 - m < m^2 = \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

当  $n$  为奇数时, 设  $n = 2m+1$ , 则有

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \sum_{j=2}^{n-1} g_j(r) = \sum_{j=2}^m g_j(r) + \sum_{j=m+1}^{2m} g_j(r) \\ &\leq \sum_{j=2}^m (j-1) + \sum_{j=m+1}^{2m} (2m+1-j) \\ &= m^2 = \frac{n^2}{4}. \end{aligned}$$

**四、(本题满分 50 分)** 设  $A$  是一个  $3 \times 9$  的方格表, 在每一个小方格内各填一个正整数. 称  $A$  中的一个  $m \times n$  ( $1 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 9$ ) 方格表为“好矩形”, 若它的所有数的和为 10 的倍数. 称  $A$  中的一个  $1 \times 1$  的小方格为“坏格”, 若它不包含于任何一个“好矩形”. 求  $A$  中“坏格”个数的最大值.

**解** 首先证明  $A$  中“坏格”不多于 25 个.

用反证法. 假设结论不成立, 则方格表  $A$  中至多有 1 个小方格不是“坏格”. 由表格的对称性, 不妨假设此时第 1 行都是“坏格”.

设方格表  $A$  第  $i$  列从上到下填的数依次为  $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, 9$ . 记

$$S_k = \sum_{i=1}^k a_i, T_k = \sum_{i=1}^k (b_i + c_i), k = 0, 1, 2, \dots, 9, \text{ 这里 } S_0 = T_0 = 0.$$

我们证明: 三组数  $S_0, S_1, \dots, S_9; T_0, T_1, \dots, T_9$  及  $S_0 + T_0, S_1 + T_1, \dots, S_9 + T_9$  都是模 10 的完全剩余系.

事实上, 假如存在  $m, n, 0 \leq m < n \leq 9$ , 使  $S_m \equiv S_n \pmod{10}$ , 则

$$\sum_{i=m+1}^n a_i = S_n - S_m \equiv 0 \pmod{10},$$

即第 1 行的第  $m+1$  至第  $n$  列组成一个“好矩形”, 与第 1 行都是“坏格”矛盾.

又假如存在  $m, n, 0 \leq m < n \leq 9$ , 使  $T_m \equiv T_n \pmod{10}$ , 则

$$\sum_{i=m+1}^n (b_i + c_i) = T_n - T_m \equiv 0 \pmod{10},$$

即第 2 行至第 3 行、第  $m+1$  列至第  $n$  列组成一个“好矩形”, 从而至少有 2 个小方格不是“坏格”, 矛盾.

类似地, 也不存在  $m, n, 0 \leq m < n \leq 9$ , 使  $S_m + T_m \equiv S_n + T_n \pmod{10}$ .

因此上述断言得证. 故

$$\sum_{k=0}^9 S_k \equiv \sum_{k=0}^9 T_k \equiv \sum_{k=0}^9 (S_k + T_k) \equiv 0 + 1 + 2 + \dots + 9 \equiv 5 \pmod{10},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=0}^9 (S_k + T_k) \equiv \sum_{k=0}^9 S_k + \sum_{k=0}^9 T_k \equiv 5 + 5 \equiv 0 \pmod{10},$$

矛盾! 故假设不成立, 即“坏格”不可能多于 25 个.

另一方面, 构造如下一个  $3 \times 9$  的方格表, 可验证每个不填 10 的小方格都是“坏格”, 此时有 25 个“坏格”.

1	1	1	2	1	1	1	1	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	10	1	1	1	1	2

综上所述, “坏格”个数的最大值是 25.