

## 2011 年全国高中数学联合竞赛一试试题参考答案 (A 卷)

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档; 解答题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题第 9 题 4 分为一个档次, 第 10, 11 题 5 分为一个档次, 不要再增加其他中间档次.

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分. 把答案填在横线上.

1. 设集合  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 若  $A$  中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为  $B = \{-1, 3, 5, 8\}$ , 则集合  $A =$ \_\_\_\_\_.

解 显然, 在  $A$  的所有三元子集中, 每个元素均出现了 3 次, 所以

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = (-1) + 3 + 5 + 8 = 15,$$

故  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5$ , 于是集合  $A$  的四个元素分别为  $5 - (-1) = 6$ ,  $5 - 3 = 2$ ,  $5 - 5 = 0$ ,  $5 - 8 = -3$ , 因此, 集合  $A = \{-3, 0, 2, 6\}$ .

2. 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$  的值域为\_\_\_\_\_.

解 设  $x = \tan \theta$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 且  $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ , 则

$$f(x) = \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\tan \theta - 1} = \frac{1}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})}.$$

设  $u = \sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ , 则  $-\sqrt{2} \leq u < 1$ , 且  $u \neq 0$ ,

所以  $f(x) = \frac{1}{u} \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup (1, +\infty)$ .

3. 设  $a, b$  为正实数,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$ ,  $(a-b)^2 = 4(ab)^3$ , 则  $\log_a b =$ \_\_\_\_\_.

解 由  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$ , 得  $a+b \leq 2\sqrt{2}ab$ .

$$\text{又 } (a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2 = 4ab + 4(ab)^3 \geq 4 \cdot 2\sqrt{ab \cdot (ab)^3} = 8(ab)^2,$$

$$\text{即 } a+b \geq 2\sqrt{2}ab. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{于是 } a+b = 2\sqrt{2}ab. \quad \textcircled{2}$$

再由不等式①中等号成立的条件, 得  $ab=1$ . 与②联立解得  $\begin{cases} a = \sqrt{2}-1, \\ b = \sqrt{2}+1, \end{cases}$  或  $\begin{cases} a = \sqrt{2}+1, \\ b = \sqrt{2}-1, \end{cases}$

故  $\log_a b = -1$ .

4. 如果  $\cos^5 \theta - \sin^5 \theta < 7(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 那么  $\theta$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解 不等式  $\cos^5 \theta - \sin^5 \theta < 7(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$  等价于  $\sin^3 \theta + \frac{1}{7}\sin^5 \theta > \cos^3 \theta + \frac{1}{7}\cos^5 \theta$ ,

又  $f(x) = x^3 + \frac{1}{7}x^5$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的增函数, 所以  $\sin \theta > \cos \theta$ ,

故  $2k\pi + \frac{\pi}{4} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ .

因为  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 所以  $\theta$  的取值范围是  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ .

5. 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目, 要求甲、乙两同学不能参加同一个项目, 每个项目都有人参加, 每人只参加一个项目, 则满足上述要求的不同安排方案数为\_\_\_\_\_.(用数字作答)

解 由题设条件可知, 满足条件的方案有两种情形:

(1) 有一个项目有 3 人参加, 共有  $C_7^3 \cdot 5! - C_5^1 \cdot 5! = 3600$  种方案;

(2) 有两个项目各有 2 人参加, 共有  $\frac{1}{2}(C_7^2 \cdot C_5^2) \cdot 5! - C_5^2 \cdot 5! = 11400$  种方案;

所以满足题设要求的方案数为  $3600 + 11400 = 15000$ .

6. 在四面体  $ABCD$  中, 已知  $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60^\circ$ ,  $AD = BD = 3$ ,  $CD = 2$ , 则四面体  $ABCD$  的外接球的半径为\_\_\_\_\_.

解 设四面体  $ABCD$  的外接球球心为  $O$ , 则  $O$  在过  $\triangle ABD$  的外心  $N$  且垂直于平面  $ABD$  的垂线上. 由题设知,  $\triangle ABD$  是正三角形, 则点  $N$  为  $\triangle ABD$  的中心. 设  $P, M$  分别为  $AB, CD$  的中点, 则  $N$  在  $DP$  上, 且  $ON \perp DP$ ,  $OM \perp CD$ .

因为  $\angle CDA = \angle CDB = \angle ADB = 60^\circ$ , 设  $CD$  与平面  $ABD$  所成角为  $\theta$ , 可求得

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

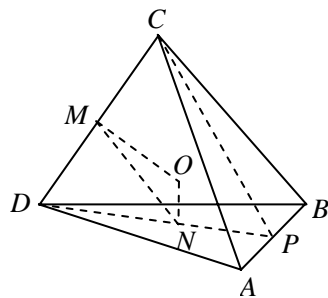
$$\text{在 } \triangle DMN \text{ 中, } DM = \frac{1}{2}CD = 1, DN = \frac{2}{3} \cdot DP = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \sqrt{3}.$$

$$\text{由余弦定理得 } MN^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2,$$

$$\text{故 } MN = \sqrt{2}.$$

$$\text{四边形 } DMON \text{ 的外接圆的直径 } OD = \frac{MN}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{故球 } O \text{ 的半径 } R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



7. 直线  $x - 2y - 1 = 0$  与抛物线  $y^2 = 4x$  交于  $A, B$  两点,  $C$  为抛物线上的一点,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,

则点  $C$  的坐标为\_\_\_\_\_.

解 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(t^2, 2t)$ , 由  $\begin{cases} x-2y-1=0, \\ y^2=4x, \end{cases}$

得  $y^2-8y-4=0$ , 则  $y_1+y_2=8$ ,  $y_1 \cdot y_2=-4$ .

又  $x_1=2y_1+1, x_2=2y_2+1$ , 所以

$$x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2=18, \quad x_1 \cdot x_2=4y_1 \cdot y_2+2(y_1+y_2)+1=1.$$

因为  $\angle ACB=90^\circ$ , 所以  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}=0$ , 即有

$$(t^2-x_1)(t^2-x_2)+(2t-y_1)(2t-y_2)=0,$$

$$\text{即 } t^4-(x_1+x_2)t^2+x_1 \cdot x_2+4t^2-2(y_1+y_2)t+y_1 \cdot y_2=0,$$

$$\text{即 } t^4-14t^2-16t-3=0,$$

$$\text{即 } (t^2+4t+3)(t^2-4t-1)=0.$$

显然  $t^2-4t-1 \neq 0$ , 否则  $t^2-2 \cdot 2t-1=0$ , 则点  $C$  在直线  $x-2y-1=0$  上, 从而点  $C$  与点  $A$  或点  $B$  重合.

所以  $t^2+4t+3=0$ , 解得  $t_1=-1, t_2=-3$ .

故所求点  $C$  的坐标为  $(1, -2)$  或  $(9, -6)$ .

8. 已知  $a_n = C_{200}^n \cdot (\sqrt[3]{6})^{200-n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$  ( $n=1, 2, \dots, 95$ ), 则数列  $\{a_n\}$  中整数项的个数为\_\_\_\_\_.

$$\text{解 } a_n = C_{200}^n \cdot 3^{\frac{200-n}{3}} \cdot 2^{\frac{400-5n}{6}}.$$

要使  $a_n$  ( $1 \leq n \leq 95$ ) 为整数, 必有  $\frac{200-n}{3}, \frac{400-5n}{6}$  均为整数, 从而  $6|n+4$ .

当  $n=2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80$  时,  $\frac{200-n}{3}$  和  $\frac{400-5n}{6}$  均为非负整数, 所以  $a_n$  为整数, 共有 14 个.

当  $n=86$  时,  $a_{86} = C_{200}^{86} \cdot 3^{38} \cdot 2^{-5}$ , 在  $C_{200}^{86} = \frac{200!}{86!114!}$  中,

$$200! \text{ 中因数 } 2 \text{ 的个数为 } \left[\frac{200}{2}\right] + \left[\frac{200}{2^2}\right] + \left[\frac{200}{2^3}\right] + \left[\frac{200}{2^4}\right] + \left[\frac{200}{2^5}\right] + \left[\frac{200}{2^6}\right] + \left[\frac{200}{2^7}\right] = 197,$$

同理可计算得  $86!$  中因数 2 的个数为 82,  $114!$  中因数 2 的个数为 110,

所以  $C_{200}^{86}$  中因数 2 的个数为  $197-82-110=5$ , 故  $a_{86}$  是整数.

当  $n=92$  时,  $a_{92} = C_{200}^{92} \cdot 3^{36} \cdot 2^{-10}$ , 在  $C_{200}^{92} = \frac{200!}{92!108!}$  中, 同样可求得  $92!$  中因数 2 的个数为

$88, 108!$  中因数 2 的个数为 105, 故  $C_{200}^{92}$  中因数 2 的个数为  $197-88-105=4$ , 故  $a_{92}$  不是整数.

因此, 整数项的个数为  $14+1=15$ .

二、解答题: 本大题共 3 小题, 共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本小题满分 16 分) 设函数  $f(x)=|\lg(x+1)|$ , 实数  $a, b(a < b)$  满足  $f(a)=f(-\frac{b+1}{b+2})$ ,  $f(10a+6b+21)=4\lg 2$ , 求  $a, b$  的值.

$$\text{解 } \because f(a)=f(-\frac{b+1}{b+2}), \therefore |\lg(a+1)|=|\lg(-\frac{b+1}{b+2}+1)|=|\lg(\frac{1}{b+2})|=|\lg(b+2)|,$$

$$\therefore a+1=b+2 \text{ 或 } (a+1)(b+2)=1,$$

$$\text{又 } \because a < b, \therefore a+1 \neq b+2, \therefore (a+1)(b+2)=1.$$

又由  $f(a)=|\lg(a+1)|$  有意义知  $0 < a+1$ , 从而  $0 < a+1 < b+1 < b+2$ ,

于是  $0 < a+1 < 1 < b+2$ .

$$\text{所以 } (10a+6b+21)+1=10(a+1)+6(b+2)=6(b+2)+\frac{10}{b+2} > 1.$$

$$\text{从而 } f(10a+6b+21)=|\lg[6(b+2)+\frac{10}{b+2}]|=|\lg[6(b+2)+\frac{10}{b+2}]|.$$

$$\text{又 } f(10a+6b+21)=4\lg 2, \text{ 所以 } \lg[6(b+2)+\frac{10}{b+2}]=4\lg 2,$$

$$\text{故 } 6(b+2)+\frac{10}{b+2}=16.$$

$$\text{解得 } b=-\frac{1}{3} \text{ 或 } b=-1 \text{ (舍去).}$$

$$\text{把 } b=-\frac{1}{3} \text{ 代入 } (a+1)(b+2)=1 \text{ 解得 } a=-\frac{2}{5}.$$

$$\text{所以 } a=-\frac{2}{5}, b=-\frac{1}{3}.$$

10. (本小题满分 20 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1=2t-3$  ( $t \in \mathbf{R}$  且  $t \neq \pm 1$ ),

$$a_{n+1}=\frac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $t > 0$ , 试比较  $a_{n+1}$  与  $a_n$  的大小.

$$\text{解 } (1) \text{ 由原式变形得 } a_{n+1}=\frac{2(t^{n+1}-1)(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}-1,$$

$$\text{则 } \frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1}=\frac{2(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}=\frac{\frac{2(a_n+1)}{t^n-1}}{\frac{a_n+1}{t^n-1}+2}.$$

$$\text{记 } \frac{a_n+1}{t^n-1}=b_n, \text{ 则 } b_{n+1}=\frac{2b_n}{b_n+2}, b_1=\frac{a_1+1}{t-1}=\frac{2t-2}{t-1}=2.$$

$$\text{又 } \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}, \frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}, \text{ 从而有 } \frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2},$$

故  $\frac{a_n+1}{t^n-1} = \frac{2}{n}$ , 于是有  $a_n = \frac{2(t^n-1)}{n} - 1$ .

$$\begin{aligned}
 (2) \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{2(t^{n+1}-1)}{n+1} - \frac{2(t^n-1)}{n} \\
 &= \frac{2(t-1)}{n(n+1)} [n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n) - (n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})] \\
 &= \frac{2(t-1)}{n(n+1)} [nt^n - (1+t+\cdots+t^{n-1})] = \frac{2(t-1)}{n(n+1)} [(t^n-1) + (t^n-t) + \cdots + (t^n-t^{n-1})] \\
 &= \frac{2(t-1)^2}{n(n+1)} [(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1) + t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1) + \cdots + t^{n-1}],
 \end{aligned}$$

显然在  $t > 0 (t \neq 1)$  时恒有  $a_{n+1} - a_n > 0$ , 故  $a_{n+1} > a_n$ .

11. (本小题满分 20 分) 作斜率为  $\frac{1}{3}$  的直线  $l$  与椭圆  $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$  交于  $A, B$  两点 (如图

所示), 且  $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$  在直线  $l$  的左上方.

(1) 证明:  $\triangle PAB$  的内切圆的圆心在一条定直线上;

(2) 若  $\angle APB = 60^\circ$ , 求  $\triangle PAB$  的内切圆的面积.

解 (1) 设直线  $l: y = \frac{1}{3}x + m$ ,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ .

将  $y = \frac{1}{3}x + m$  代入  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$  中, 化简整理得

$$2x^2 + 6mx + 9m^2 - 36 = 0.$$

于是有  $x_1 + x_2 = -3m$ ,  $x_1 x_2 = \frac{9m^2 - 36}{2}$ ,

$$k_{PA} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 3\sqrt{2}}, k_{PB} = \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 3\sqrt{2}}.$$

$$\text{则 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 3\sqrt{2}} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 3\sqrt{2}} = \frac{(y_1 - \sqrt{2})(x_2 - 3\sqrt{2}) + (y_2 - \sqrt{2})(x_1 - 3\sqrt{2})}{(x_1 - 3\sqrt{2})(x_2 - 3\sqrt{2})},$$

上式中, 分子  $= (\frac{1}{3}x_1 + m - \sqrt{2})(x_2 - 3\sqrt{2}) + (\frac{1}{3}x_2 + m - \sqrt{2})(x_1 - 3\sqrt{2})$

$$= \frac{2}{3}x_1 x_2 + (m - 2\sqrt{2})(x_1 + x_2) - 6\sqrt{2}(m - \sqrt{2})$$

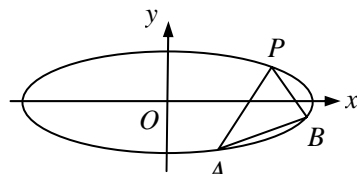
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{9m^2 - 36}{2} + (m - 2\sqrt{2})(-3m) - 6\sqrt{2}(m - \sqrt{2})$$

$$= 3m^2 - 12 - 3m^2 + 6\sqrt{2}m - 6\sqrt{2}m + 12 = 0,$$

从而,  $k_{PA} + k_{PB} = 0$ .

又  $P$  在直线  $l$  的左上方, 因此,  $\angle APB$  的角平分线是平行于  $y$  轴的直线, 所以  $\triangle PAB$  的内切圆的圆心在直线  $x = 3\sqrt{2}$  上.

(2) 若  $\angle APB = 60^\circ$  时, 结合 (1) 的结论可知  $k_{PA} = \sqrt{3}, k_{PB} = -\sqrt{3}$ .



直线  $PA$  的方程为:  $y - \sqrt{2} = \sqrt{3}(x - 3\sqrt{2})$ , 代入  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$  中, 消去  $y$  得

$$14x^2 + 9\sqrt{6}(1 - 3\sqrt{3})x + 18(13 - 3\sqrt{3}) = 0.$$

它的两根分别是  $x_1$  和  $3\sqrt{2}$ , 所以  $x_1 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{18(13 - 3\sqrt{3})}{14}$ , 即  $x_1 = \frac{3\sqrt{2}(13 - 3\sqrt{3})}{14}$ .

$$\text{所以 } |PA| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} \cdot |x_1 - 3\sqrt{2}| = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} + 1)}{7}.$$

$$\text{同理可求得 } |PB| = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)}{7}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot |PA| \cdot |PB| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} + 1)}{7} \cdot \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{117\sqrt{3}}{49}.$$