数学圈丛书
MATHEMATICAL CIRCLES

无法解出的方程

——天才与对称

The Equation That Couldn't Be Solved

[美]马里奥·利维奥
译者 / 王志标
校译 / 尹怀琼

湖南科学技术出版社
Hunan Science & Technology Press

约翰·塞巴斯蒂安·巴赫的音乐、自然界的基本力、魔方、配偶的选择有无共通之处？它们共同的特点是都具有某种对称性。对称性概念为科学和艺术之间、理论物理世界和我们日常生活的世界之间架起了桥梁。然而关于对称的“语言”——数学中的群论——却产生于最意想不到的来源：一种无法解出的方程式。

几千年来，在遇到现在所说的五次方程之前，数学家已经逐渐解决了越来越困难的代数方程。但几个世纪过去了，五次方程仍然没有解，最后，两个数学天才彼此独立地发现了它不能用通常的方法解出，群论由此产生。这两个年轻的天才是挪威数学家尼尔斯·亨里克·阿贝尔和法国数学家埃瓦利斯特·伽罗瓦，他们最后都悲剧性地死去。事实上，伽罗瓦(时年 20 岁)在他致命的决斗前夕，草草地记录了他的证明的另一份简要总结，笔记本的边上有一句话：“我没有时间。”

无法解出的方程的故事是一本关于才华横溢的数学家的故事，也叙述了数学如何为其他学科添光增彩。在这本栩栩如生、曲折动人的书中，马里奥·利维奥以一种容易被人接受的方式展示了，群论是如何解释自然界和人造世界的对称性和秩序的。

数学圈丛书

无法解出的方程

The Equation That Couldn't Be Solved

■ [美]马里奥·利维奥
■ 译者 / 王志标
■ 校译 / 尹怀琼

——天才与对称

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

前　言

自从高中时代我就被埃瓦利斯特·伽罗瓦吸引。一个20岁的人能创造一门令人激动的新的数学分支，这一事实成为我真正的灵感之源。然而，到我大学快毕业时，那个浪漫的法国年轻人也已经让我深感挫折：当认识到自己23岁时仍然没有完成任何可与之比拟的事情时，你会做何想？由伽罗瓦引入的概念——群论——今天已经被视为所有对称性的“正宗”语言。而且，自从对称性从视觉艺术和音乐学渗透到心理学和自然科学中，它的重要性就不言而喻了。

直接或间接对本书有所贡献的人员名单完全可以列好几页。这里，我只能提一些人，没有他们的帮助，我就很难完成手稿。感谢弗里曼·戴森、罗嫩·普勒瑟、纳丹·赛伯格、斯蒂文·温伯格和埃德·威腾，他们谈到了对称性在物理学中的作用；迈克尔·阿蒂亚爵士、彼得·纽曼、约瑟夫·罗特曼、罗恩·所罗门，特别是希勒尔·高赫曼，他们总体上为数学，特别为伽罗瓦理论提供了他们的真知灼见和批评性意见；约翰·奥康纳和艾德蒙·罗伯

特森提供了数学史方面的帮助；西蒙·康维·莫丽丝和大卫·派利特在有关进化和进化心理学的主题上为我指出了正确的方向；我与艾伦·维纳广泛地讨论了创造力主题；菲利普·查普蓝、让-鲍尔·奥弗雷、诺伯特·威德尔为我提供了关于伽罗瓦的宝贵材料和信息；维克托·利维奥特帮助我理解了伽罗瓦的验尸报告；史蒂芬洛·柯瑞兹、卡尔拉·卡奇亚里和蕾蒂西亚·斯堂何里尼提供了关于博洛尼亚数学家的有用信息；同样地，艾玛诺·比安科尼圣提供了圣色波克罗数学家的信息；劳拉·加布利诺、莉维亚·加卡蒂和弗兰科·帕斯宙恩向我提供了数学史的基本材料；帕特利加·莫斯卡特利和比安卡斯特拉·安托尼奥提供了来自博洛尼亚大学图书馆的重要文献；如同扬格瓦尔·雷切尔特所做的那样，亚理德·斯塔布豪格帮助我理解了尼尔斯·阿贝尔生活的一些方面，并且提供了重要的文献。

我特别感谢帕特里克·高登、维克托·利维奥特和伯尔纳德·利维奥特帮助翻译了法语材料；感谢托迈·威克林德和席勒莎·威格尔特帮助翻译了挪威语材料；感谢史蒂芬洛·卡瑟塔诺、尼诺·潘拿加和玛西摩·斯蒂亚维里帮助翻译了意大利语和拉丁语材料；伊丽莎白·弗雷瑟和莎拉·斯蒂汶斯-雷伯恩为我提供了宝贵的目录和语言帮助；如果没有沙龙·图兰熟练的准备工作和科利斯塔·威尔德特的绘图，书稿就无法付诸印刷。

研究和写作这样一本书给我的家庭生活带来了不可避免的负担。没有我的妻子苏菲和我的孩子沙龙、奥仁和玛亚的不断支持和无尽耐心，很难想像我能完成本书。我希望母亲道罗茜·利维奥会喜欢这本有关对称性的书，她的生活一直并仍将以音乐为中心。

最后，我诚挚地感谢代理商苏桑·雷宾纳所做的令人难以置信的工作和给予我的鼓励；感谢西蒙 & 舒斯特公司的编辑鲍勃·本德尔的敬业和百般支持；感谢约翰娜·李、罗勒塔·登纳、维克托利亚·迈耶和西蒙 & 舒斯特的整个团队在出版和宣传本书方面所给予的帮助。

目 录

第一章

对称

一张纸上的一滴墨水不是特别吸引眼球，但是如果在墨干之前将纸对折，你可能得到如图 1 所示的图形，这是非常迷人的图形。事实上，对于相似墨斑的解释构成了自 20 世纪 20 年代以来由瑞士精神病学家荷曼・罗夏（Hermann Rorschach）发展的著名的罗夏实验的基础。该实验所宣称的目的是，对于想要解释二重或多重形状的人，引出他们内心所隐藏的害怕、狂野的幻想和深层思考。实验的实际价值作为一种"心理的 X 射线"在心理学流派中备受争议。正如艾墨蕾大学心理学家斯考特・利林费尔德曾经说的："谁的想法，受测者还是测试者?"然而，毫无疑问，类似图 1 的图像传递了某种富有吸引力和令人着迷的形象。为什么?

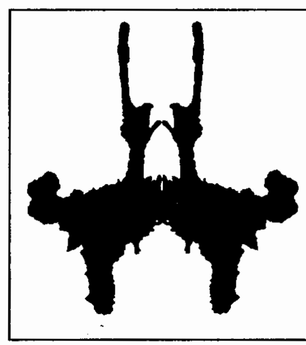


图 1

这是因为人类身体、大部分动物和很多人造物品都拥有一种相似的两侧对称性吗？那么为什么乍看起来，所有那些人类虚构的动物特征和创作物都展示了这样一种对称性呢?

大部分人察觉到像波蒂切利（Botticelli）所创作的《维纳斯的诞生》（图 2）这样和谐的作品是对称的。艺术史家恩斯特・H・贡布里希（Ernst H. Gombrich）甚至注意到，"为了获得一种优美的外观，波蒂切利发乎本性的自由增加了设计的美丽与和谐。"然而，数学家会告诉你，绘画中色彩和形式的安排在数学意义上根本不是对称的。相反地，大多

数非研究数学的观察者没有察觉到图3所示的图案是对称的，虽然根据正式的数学定义，它实际上也是对称的。那么，何为真正的对称性？如果有对称性，它在感觉上起着什么作用？它是如何与我们的美感相联系的？在科学王国中，为什么对称性成为我们对于宇宙的想法和努力解释它的基本理论中关键的概念？既然对称性跨越了这么广阔的学科，那么我们使用什么语言、什么语法来描述和概括对称性以及它们的特点？还有，如何创造那种世界语？说点轻松的，“你认为我性感吗？”是摇滚歌星罗德·史都华（Rod Stewart）的一首歌名，对称性能为由“你认为我性感吗？”引起的非常重要的问题提供一个答案吗？

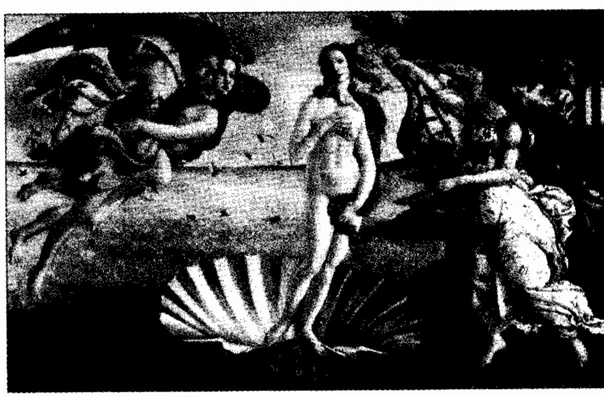


图2

我将试着为所有这些问题，甚至更多的问题提供至少部分答案。沿着这个思路，我希望本书整体上将既描写数学的人文主义一面，甚至更重要的是，也描写数学家人性的一面。正如我们将看到的，对称性对于沟通科学与艺术、心理学与数学是极为重要的工具。它充满了从波斯人地毯到生命中的分子结构，从西斯廷教堂到广受欢迎的“万物至理”的对象和概念。然而，群论，这门描述对称性的本质和探究其特点的数学语言，根本未从对对称性的研究中产生。而且，这种令人惊奇的现代思潮的统一思想产生于一个最出人意料的来源——一种无法解出的方程

式。这种方程式戏剧性的和曲折的历史是其智慧传奇的一个基本部分。同时，这个故事将清楚地揭示面对似乎难以克服的挑战时天才的孤独和人类智慧的坚韧。我已经竭尽全力尝试揭开两个世纪前本书主人公——天才的数学家埃瓦利斯特·伽罗瓦（Évariste Galois）的死亡之谜。我相信自己已经比以往更接近了真相。

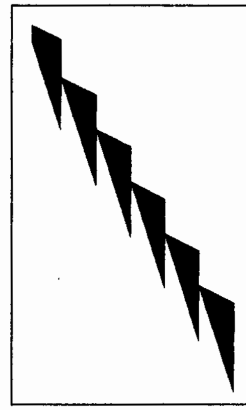


图 3

风趣的剧作家乔治·伯纳德·肖（George Bernard Shaw）曾经说过："理性的人让自己适应世界；不理性的人坚持让世界适应自己。因此，所有的进步取决于不理性的人。"在本书中，我们会遇到许多不理性的男人和女人。创新的过程，本质上依赖于无法言传的智力和情感因素。通过简要的数学抽象，可以窥见创造力的真正本质。长话短说，开始步入对称的奇境吧。

不发生改变

单词"symmetry"有古老的词根，源自希腊的"sym"和"metria"，它们合起来的意思是"同样的尺寸"。当希腊人为一件艺术作品或一项对称的建筑设计贴上标签时，他们意在说明，一个人可以识别那件作品的一小部分，而所有其他部分的尺寸与那部分存在准确的倍数关系（各部分是"可以比较的"）。这种早期的定义更符合我们现在对比例而非对称的感觉。然而，伟大的哲学家柏拉图（Plato，公元前 428/427～前 348/347)和亚里士多德（Aristotle，公元前 384～前 322）很快将对称和美联系起来。用亚里士多德的话说："美的主要形式是有序排列（希腊语 taxis），比例（symmetria）和有限性（horismenon），这些尤其在数学中得到了展现。"追随希腊传统，有影响的罗马建筑师维特鲁威（Vitruvius，约公元前 70～前 25）随后宣扬通过"恰当的比例"

来认识对称性，这种观念一直延续到文艺复兴时期。在他的《De Architectura Libri Decem》（《建筑十书》）——欧洲几个世纪以来实际上的建筑圣经中，维特鲁威写道：

> 教堂的设计要讲究对称，建筑师必须认真遵守对称原理。它们应归于比例。比例就是一件完整作品的各部分尺寸之间、整体与被选做标准的某部分之间的一致性。此即对称原理。

在精确的数学意义上，对称的现代意思（在18世纪晚期引入）其实是"一点儿都不改变"。或者，像数学家赫尔曼·外尔（Hermann Weyl，1885～1955）曾经说的："如果有一样可以加工的东西，你加工后它如前一样，那么这件东西是对称的。"例如下面这首诗：

不对称是"对称"，奇怪吗？
"对称"是不对称。
多么奇怪。[①]

如果逐字从后向前阅读，这首诗内容不变——它是与反读有关的对称。如果设想把这些单词像珠子一样串在一根绳子上，你会认为这种逆向阅读[②]是该诗的一种（不是字面上的）镜面反射。当在上面的意义下

本书注释皆为参考原注之上的译者注

① 原文是
Is it odd how asymmetrical
Is "symmetry"?
"Symmetry" is asymmetrical.
How odd it is.

② 如果采用反读，则这首诗是
is it odd How. asymmetrical
is "Symmetry"?
"symmetry" Is asymmetrical
how odd it Is

被镜面反射时，这首诗不会变化——对于这样的镜面反射而言，它是对称的。或者，如果你喜欢以大声阅读的方式思考，那么按照一定的时间间隔进行反读有点像重新绕一个录像带（仍然不是字面上的，因为每个音节并非颠倒的）。具有这种特点的短语称为回文。

一般认为回文是由玛罗涅亚（Maronea）的淫秽诗人苏塔德斯（Sotades）发明的，他生活在公元前 3 世纪希腊统治下的埃及。回文极为许多文字游戏大师，如英国人 J. A. 林顿（J. A. Lindon）和超级娱乐数学作者马丁·加德纳（Martin Gardner）所崇尚。林顿的一首可笑的以单词为单位的回文是："穿着比基尼游泳的女孩望着男孩，发现男孩正望着游泳女孩穿的比基尼。①" 其他回文在逐个字母从后向前阅读时是对称的——"Able was Iere I saw Elba"（被戏谑地认为是拿破仑说的），或者一个著名的 NOVO 项目②的标题："A Mam, a Plan, a Canal, Panama."

奇怪的是，回文不仅出现在风趣的文字游戏中，而且出现在决定男性性别的 Y 染色体结构中。Y 的全部基因组排序只是在 2003 年才完成。这是一种艰苦努力的集体成果，并且它揭示了，这种性别染色体的保存作用被大大低估了。其他人类"染色体对"通过交换基因与破坏性的突变进行斗争。因为 Y 染色体缺少一个伴，基因组生物学家目前已经估计，它的基因载体也许在 500 万年左右会缩减。然而，令人惊异的是，测序组的研究者发现，该染色体通过回文方式与衰亡抗争。在 5 千万 DNA 字母中大约有 600 万形成了回文序——在两条双螺旋线上向前和向后读是一样的。基因复制不仅在遭遇恶性变异时能提供支持，而且允许染色体在某种程度上与自己发生性交换——螺旋的两臂能交换位置，从而能改变基因。正如基因组负责人麻省理工学院（MIT）的大卫·帕基（David Page）所说："Y 染色体恰似经过镜面反射的长廊。"

当然，在镜面反射对称中最著名的例子是两侧对称，两侧对称是动

① 原文是：Girl, bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl.

② 意为创新项目。

物王国所具有的特征。从蝴蝶到鲸，从鸟到人，如果你在一个镜子中反射左半部，那么你会得到和右半部几乎相同的东西。即便令人焦虑的外部差异确实存在，我也将暂时忽略这个细节，同时要忽略一个事实，这个事实就是，无论大脑的内部解剖还是其功能，都不具备两侧对称性。

对于许多人来说，单词“对称”实际上就是两侧对称。甚至在《韦伯斯特第三部新国际词典》中，对“对称”的定义之一是：“居于分界线或界面的两侧相对的部分在尺寸、形状和各部分相对位置之间的相似性。”反射对称的数学精确描述使用了与之相同的概念。拿一个两侧对称的蝴蝶画，并且在图中间标一条直线。如果你沿正中线对折那幅画，完美的重叠会发生。在关于中心线的反射中，蝴蝶保持不变——也就是说它具有反射不变性。

两侧对称在动物中是如此普遍，以致它几乎不能归于偶然。事实上，如果你把动物看作成万亿计的巨大的分子集合，那么从这些结构单元中有更多的方法构建不对称结构而非对称结构。一个破花瓶碎片能以许多种组合堆成一堆，但是只有一种排列可使其复原为完整的（并且通常是两侧对称的）花瓶。然而，出自澳大利亚埃迪卡拉山的化石记录表明，上溯至新原生纪第三个时期（6.5 亿至 5.4 亿年前）的软体组织（斯普里格蠕虫）已经显示出了两侧对称性。

地球上的生命形态通过无数个世纪的演变和自然选择才定型，不管何故，在演变过程中它们一定是优选了两侧或镜面对称。在所有可以拿来参照的不同外观的动物中，两侧对称型动物具有优越性。藉此可得出结论，这种对称性是生物增长的一种可能结果。我们会理解这种特殊眷爱的原因吗？至少，我们可以努力依据机械原理找到它的一些工程道理。这里关键的一点是；地球表面的各个方向创造得不均等。上与下（生物术语里动物的背与腹）之间的清楚的区别是由地球重力引发的。在大多数情况下，上升者必然下降，反之则不然。另一方面，前与后的区别，是由动物的移动造成的。

如果前部不同于后部，任何动物无论在海里，陆地上，天空中相对

快速地移动都具有明显的优势。前部具有所有感觉器官，是光、声、气味、口味的主要探测器，明显地帮助了动物决定去哪里和怎样最好地到那里。前部的一个“雷达”也提供了一种预警，以化解潜在的危险。前部的嘴可以首先明辨是否够得着食物。同时，在地球重力作用下的实际运动结构明确地区分了底部和顶端。一旦从海里出现在陆地上，某种机械装置——腿——就得发展起来，以使动物可以到处走动。顶部不需要这样的附属肢体，因此顶部与底部之间的区别甚至变得更显著。飞行（仍然在地球重力下）的空气动力学配以登陆传动装置加某些方式的地面运动，引出了鸟类顶部一底部的差别。

然而，这里有一个重要的认识：*无论在海里、陆地上、空中，没有一种主要的生物区分左和右*。鹰向右所看到的环境与向左看到的是相同的。对于上和下则不然——上，鹰在空中甚至飞得更高；下，鹰则着陆，筑巢。其实，地球上左和右实际上没有大的区别，因为没有强的水平力。可以肯定，地球绕着它的轴旋转对于地球的磁场（事实是，地球像一块条形磁铁一样作用于它的周围）的确引入了一种不对称性。然而，这些效应在宏观水平上不如重力对于快速的动物运动的效应那么重要。

到此为止的描述解释了为何活的生物体的两侧对称在机械学上有意义。两侧对称也是经济的——通过一套系统同时造就两个器官。这种对称性或缺乏对称性如何在进化生物学（基因学），甚或更基本地在物理规律中出现，是一个更加困难的问题，在第 7 章和第 8 章我将详细讲述这些问题。此时还是看看多细胞动物吧，它们有一种缺乏两侧对称性的早期胚体。随着胚胎发育，在修改“上帝造物”背后的驱动力可能确实是灵活性。

并非所有生物都快节奏地生活。固定在某个地方或无法自愿移动的生命形式，如植物和固着动物，的确有非常不同的顶部和底部，但没有前与后，或左与右的差别。它们有类似圆锥体的对称性——它们在任何通过它们中央垂直轴中的镜子里产生对称反射。一些动物，如水母，移

动得很慢，有相似的对称性。

显然地，一旦在活的生物中已经形成了两侧对称性，到处都可以找到理由保持其完整。无论失去一个耳朵或一只眼睛，都会使一只动物在不注意时更易受到捕猎者的偷袭。

一个人总想知道自然所赋予人类的独特的标准形体是否最佳。举个例子，罗马神灵杰纳斯（Janus）门神，也是掌管新的开始（包括新年第一月）之神。因此，在艺术上他总被描绘成有两张脸，一张朝前（象征着来年），一张朝后（朝着过去的一年）。人类的这种安排，在某些方面是有用的，但可能不会给处理非感觉系统的大脑部分留下空间。马丁·加德纳在他精彩的书《新的灵巧宇宙》中讲了一个芝加哥演员的故事，那个演员有一个讨论让各种感官长在身体上不寻常部位所带来的优势的习惯。举个例子，腋窝下的耳朵可以在寒冷的芝加哥冬天保暖。很清楚，这样的一种配置也会带来缺点——如果你不让你的胳膊一直抬着，腋窝下耳朵的听力会严重受损。

科幻片总是放映两侧对称的外星人。如果生物学上已经进化的外星球智慧生物存在，那么他们拥有反射对称性的可能性有多大呢？可能性很大。如果物理规律，尤其是引力和运动规律是普遍的，太阳系外行星上的生命形态会面对与地球人同样的环境挑战。引力仍然使每一样东西都停留在行星表面上，并且在上与下之间创造出一种明显的不同。运动相似地分成了前和后。外星人很可能有或者曾经有过灵巧的双手和大脑。这并不是说访问我们的某个外星人代表会和我们有什么相似之处。任何进化到能做星际旅行的文明可能早就把智慧生命与更优越的计算技术产生的生命融合在一起了。那种以计算机为基础的超级智能很可能是微观的东西。

一些在字母表中的大写字母属于人类创造的无数与镜面反射有关的对称物之一。如果你把一张写有字母 A，H，I，M，O，T，U，V，W，X，Y 的纸举到一面镜子前，镜里的字母看起来（与纸上的）是同样的。由这些字母组成并垂直印刷的单词（甚或整个短语），如以下不

太深奥的指令

Y
O
U

M
A
Y

W
A
X

I
T

T
I
M
O
T
H
Y

在镜面反射时仍不变。瑞典流行音乐组合艾巴乐队，它的名字“A ᗺ B A”在拼写上煞费心机，使名字成为镜面对称的，他们的音乐剧《妈妈咪呀[1]》获得了巨大成功（垂直书写的 MAMMA MIA 也是镜面对称的）。像 B，C，D，E，H，I，K，O，X 这样的字母，如果从中间部位横向截开它们，它们也是镜面对称的。由这些字母组成的单词，如

---

① Mamma Mia

COOKBOOK，BOX，CODEX，或者熟悉的拥抱和接吻的符号 XOXO，上下颠倒后举到镜子前仍然不变。

镜面反射对称对我们的感觉与审美鉴赏，对对称的数学理论，对物理规律，和对一般科学的重要性，怎么强调都不为过，后面我仍有几次要回到镜面对称上来。当然，其他对称确实存在，并且它们是同样重要的。

雪的欢乐建筑

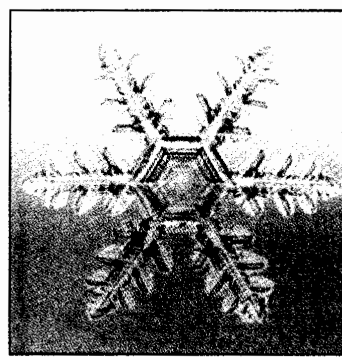


图 4

本节所选择的标题源自美国诗人和散文家拉尔夫·华都·爱默生（Ralph Waldo Emerson，1803～1882）的《暴风雪》。它表达了一个人目睹了迷人的雪花形状后所感到的困惑（图 4）。尽管通常所说的“没有两瓣雪花是相同的”在肉眼水平不确切，但在不同环境下形成的雪花确实是不同的。发现了行星运动规律的著名天文学家约翰尼斯·开普勒（Johannes Kepler，1571～1630）对雪花的奇迹那样入迷，以致他写了一篇完整的论文《六角形雪花》，希望以此解释雪花的对称性。除了镜面对称外，雪花还拥有旋转对称——你可以绕着一条铅直轴线沿着它们的平面（过中心）通过某些角度旋转它们，它们仍然是同样的。由于水分子的特点和形状，雪花典型地有 6 个（几乎）相同的角。因此，保持形状不变的最小旋转角（除非根本不转）是 60°。其他造成无法分辨的最终图形的角是这个角的简单倍数：120°、180°、240°、300°和 360°（最后一个角使雪花返回原位，等价于根本没有旋转）。雪花因此有 6 重旋转对称性。相类似地，海星有 5 重旋转对称性：他们可以旋转 72°、144°、

216°、288°和360°而无可体察到差异。许多花，如菊花、英国雏菊、金鸡菊，显示出一种近似的旋转对称性。无论旋转任何角度，它们看起来基本是一样的（图5）。对称，当与丰富的色彩与醉人的芳香搭配时，具有一种赋予鲜花美学吸引力的特性。也许没有人能比画家詹姆斯·麦克尼尔·惠斯勒（James McNeil Whistler，1834～1903）更好地表达在花与艺术作品之间的紧密联系：

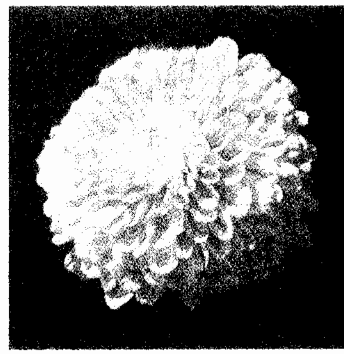


图5

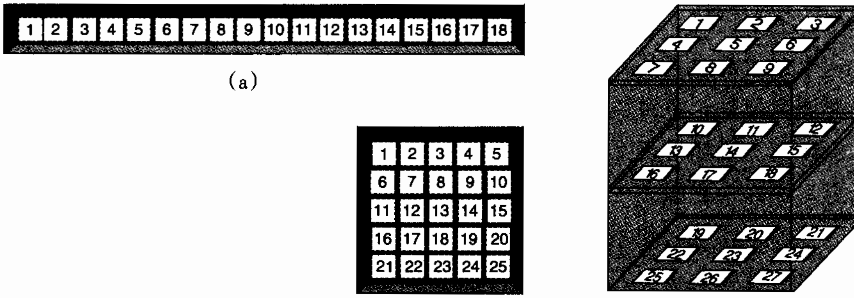
> 杰作应似花儿之于画家——花蕾似花儿绽放时一样美——这无需解释——也不用人去实现——也似一件乐事之于艺术家，一个幻想之于慈善家，一个困惑之于植物学家，一种偶然拾得的情感和韵律之于文学青年一样平常。

在一种对称样式中是什么激起了这样一种情感反应？这真的是艺术作品激发的那种兴奋吗？注意，即使后一个问题的答案是毫不含糊的"yes"，这也不一定会给我们带来任何接近前一问题的答案。那个"艺术作品中到底是什么触发了一种情感反应"问题的答案还远未弄清楚。的确，什么品质为像杨·维米尔（Jan Vermeer）的《戴珍珠耳环的少女》、巴伯罗·毕加索（Pablo Picasso）的《格丽尼卡》和安迪·沃霍尔（Andy Warhol）的《玛丽莲复制图》这样不同的杰作所拥有？克里弗·贝尔（Clive Bell，1881～1964），一位艺术批评家和布卢姆斯伯里文学团体的成员［顺便提一下，小说家维吉尼亚·伍尔芙（Virginia Woolf）也参加了该团体］建议，所有真正的艺术作品所共有的一种品质是他所称的"重要的形式"。他这里的意思是一种激发我们感情的线条、颜色、

形式和不同形式之间的关系的独特结合。这并不是说所有的艺术作品都会触发同样的感情。恰恰相反，每一件艺术作品可能触发完全不同的感情。事实上，共同点是，所有的艺术作品都会触发某种感情。如果我们接受这种审美假说，那么对称可以简单地代表这种（定义相当含糊的）重要形式的一个要素。在这种情况下，我们对对称模式的反应不会（也许，即使可能不那么强烈地）太偏离我们一般的审美取向。并非所有人都能同意这种断言。美学理论家哈罗德·奥斯伯恩（Harold Osborne）把这说成人类对单个元素或物体——如雪花的反应："它们能唤起兴趣，好奇心和赞赏。但是视觉趣味是短命的和肤浅的：和一件艺术杰作的震撼相比，知觉上的注意很快就会游移，永远不会深入。知觉不会强化。"实际上，像我将在下一章和第 8 章所表明的，对称与知觉关系密切。不过，暂时我们还是把注意力集中在对称的纯粹美学"价值"上吧。

达特茅斯学院心理学家彼得·G·史基勒齐（Peter G. Szilagyi）和约翰·C·贝尔德（John C. Baird）在 1977 年进行了一次有趣的实验，旨在定量地考察所设计的对称量与审美观之间的关系。20 个大学生（实验心理学中最经常的受测对象）被要求完成 3 项简单的任务。首先，他们被邀请把 8 个中心有黑点的方块排列在有 18 个单元的一行里，每个单元的尺寸与方块相同（图 6a）。对这些受测对象的要求是，以他们觉得"看起来令人愉快的"方式排列那些方块。每个方块必须完全覆盖一个单元，并且所有的方块必须被使用。第二个和第三个任务本质上是相似的：在第二个任务里，11 个方块必须被排列成一个 5×5 的栅格（图 6b）；在第三个任务里，20 个立方体必须被放在一个三维透明结构的孔里，该结构有 3 个水平面，每个平面有 9 个方孔（图 6c）。结果表明了一种对对称设计的毫不含糊的审美偏好。例如，在第一项任务里，65%的对象创造了完美的镜面反射对称样式。事实上，对称是大多数对象（在一维，二维和三维）设计中首要的部分，完美的对称就是最优的。

对称与艺术品位之间的联系不只在实验中体现，也在一种由著名的



(a)　(b)　(c)

图 6

哈佛数学家乔治·大卫·伯克霍夫（George David Birkhoff，1884～1944）发展的最引人深思的美学理论中得以展现。伯克霍夫最知名的是，他在 1913 年证明了一个由法国数学家亨利·庞加莱（Henri Poincaré）阐明的著名的几何猜想，以及他的遍历性定理（出版于 1931～1932 年）——这个贡献对于气体论和概率论意义重大。在他的大学时代，伯克霍夫开始对音乐结构感兴趣，并且大约在 1924 年他将兴趣延伸到一般美学。在 1928 年，他花费半年时间遨游了欧洲和远东，以吸收尽可能多的艺术、音乐和诗歌。他对发展一门美学价值的数学理论的努力在 1933 年达到顶点，出版了《美学测度》。伯克霍夫特别讨论了由艺术作品激发的直觉情感的价值，这种情感“明显地不同于感觉上的，情绪上的，道德上的或智力上的感情”。他把美学体验划分为 3 个阶段：①必要地专注地努力感知；②实现了以某种次序区分客体；③回报精神努力的价值欣赏。伯克霍夫进一步分配了对三个阶段的数量测度。他宣称，初始努力随着作品的复杂性而增加（由 C 表示）。对称在刻画客体的次序（由 O 表示）中起着关键的作用。最后，情感价值是伯克霍夫所称的艺术作品的“美学测度”（由 M 表示）。

伯克霍夫理论的本质可以总结如下。在美学客体的每一种类别，如装饰、花瓶、专辑或诗歌中，一个人可以定义一种次序 O 和一种复杂性 C。接着，可以简单地用 C 分割 O 来计算分类中的任何客体的美学测

度。换句话说，伯克霍夫提出了一个美学情感价值的公式：$M=O\div C$。这个公式的意思是：对于给定的复杂性程度，客体拥有的次序越多，美学测度越高。也可以这么说，如果指定次序的量，客体越简单，美学测度越高。既然对于大多数实际的效果来说，次序首先由客体的对称性决定，那么伯克霍夫的理论就宣布了对称是一种至关重要的美学元素。

伯克霍夫起先承认他的元素 O，C 和 M 的精确定义是投机取巧的。然而，他在为各种艺术形式的测量计算提供详细规定方面做出了勇敢的尝试。特别地，他从图 7 所示的简单几何形状入手，继之以装饰和中国花瓶，再推广到全音阶的谐振，最后还研究了丁尼生（Tennyson）、莎士比亚（Shakespeare）和艾米·洛威尔（Amy Lowell）的诗。

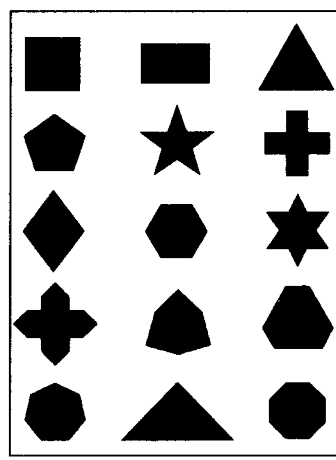


图 7

没有人会声称美学乐趣的复杂能完全简化为一个纯粹的公式，伯克霍夫自己更是如此。然而，用伯克霍夫的话说，“在伴随着创造过程的不可避免的分析中，美学测度理论能完成双重服务：它给出了一种简单的、统一的美学体验量，并且它为典型美学领域的对称分析提供了方法。”

现在从这个美学领域的简短插曲回到旋转对称的具体例子中，我们注意到，在平面里最简单的旋转对称图形是圆（图 8a）。如果你绕它的中心旋转它，比如说 37°，它仍然不变。事实上，你可以通过它的中心绕着一个铅直轴旋转任何角度，并且会注意到它没有什么不同。因此，圆有无限多的旋转对称图形。这不是圆拥有的唯一的对称性质。在所有关于过直径（图 8b）的轴的反射也使圆无变化。

因此，同样的系统也能有多重对称性，或者在一系列对称变换下都

是对称的。使用任何方向的一根轴绕中心旋转一个理想球，它看起来正好是相同的。或者，例如，检查图9a的等边三角形（所有边相等）。我们既不能改变三角形的形状或尺寸，也不能移动它。那么，我们做什么变换才能使它不变？我们可以绕着一根通过点 O（图9b）的相对于图形平面铅直的轴将其旋转120°，240°和360°。这些变换的确交换了顶点的位置，但是如果在某人旋转时背过身去，你不会注意到有何差异。注意，一次360°的旋转相当于什么也没做，或者等同于旋转0°。这被认为是恒等变换。为何要这么麻烦地定义这样一种变换呢？正如我们稍后在本书中要看到的，恒等变换起着与数字0在加法运算中和数字1在乘法运算中相似的作用——当你对一个数字加0或乘以1，这个数字仍然不变。我们也可沿着图9c所示的3条虚线镜面反射三角形。因此，准确地说，等边三角形有6种对称变换——3种旋转变换和3种反射变换。

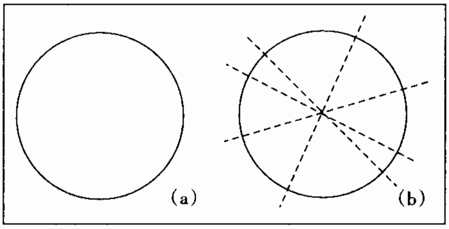


图 8

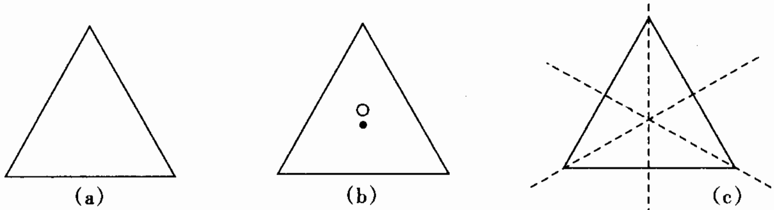


图 9

把这样的一些变换再组合，比如在一次反射后接着一次旋转，会怎么样？他们不会增加三角形对称性变换的数量吗？我将在对称性的语言部分再谈这个问题。不过，暂时有另一重要的对称性等待说明。

莫里斯，莫扎特，公司

所有对称模式中最著名的一种是重复、循环主题。从古典神庙的中楣和宫殿的柱子到地毯，甚至鸟叫声，重复模式的对称总能产生一种非常亲切的熟悉感与一种安心的效果。这种对称类型的一个基本的例子列在了图 10① 中。

这种对称变换被称为平移，是指沿着某一直线隔一定距离进行的一次取代或移动。如果沿不同的方向替换它而看起来并没有什么不同，则这种模式被称为对称。换句话说，如果在规则设计中同样的主题以固定的间隔重复自身，则这种设计拥有平移对称性。具有平移对称性的装饰可以一直追溯到公元前 17000 年（旧石器时代）。在乌克兰发现的一只巨大的象牙手镯以重复的 Z 字形样式为标志。已发现的其他平移对称设计具有各种艺术形式，包括西班牙格兰纳达的阿罕布拉宫（图 10a）、文艺复兴时期的印刷样式、稀奇古怪的荷兰形象艺术家 M・C・埃舍尔（M. C. Escher，1898～1972；图 10b）的作品。大自然也提供了平移对称生物的例子，如蜈蚣，它的同样的体节可能重复多达 170 次。

维多利亚时代的艺术家，诗人兼印刷工威廉・莫里斯（William Morris，1834～1896）是一位多产的装饰艺术创作者。他的许多作品实际上是平移对称性的体现。莫里斯早年痴迷于中世纪建筑，并在 27 岁时开了一家装饰公司，这家公司后来成了闻名遐迩的莫里斯公司。

为了强烈反对英国 19 世纪越来越多的工业化，莫里斯寻找方法复兴艺术技能和中世纪杰出的装饰艺术。莫里斯公司和后来莫里斯于 1890 年创办的凯尔姆斯科特出版社，设计了大气的瓷砖、餐具、纺织品和中世纪风格的插图稿。但是，在墙纸设计中莫里斯第一次成功地令人难以置信地掌握了平移-对称的重复模式。他的几个华丽的主题列在了图 11

① 原文为图 3，疑为作者疏忽。

中。尽管和同时代的一些人，如克里斯多佛·德雷塞（Christopher Dresser）或A·W·N·普金（A. W. N. Pugin）相比，莫里斯的设计可能不是最创新的，但他的影响和遗产是巨大的。莫里斯本人对提高艺术和工艺而非对对称数学感兴趣。在《生命之美》中他这样概括他的社会审美哲学：

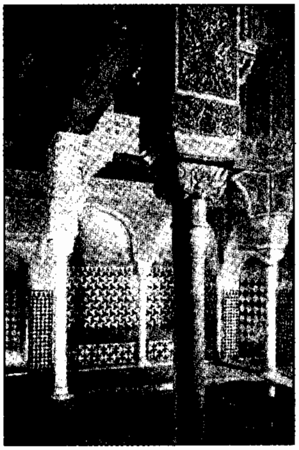
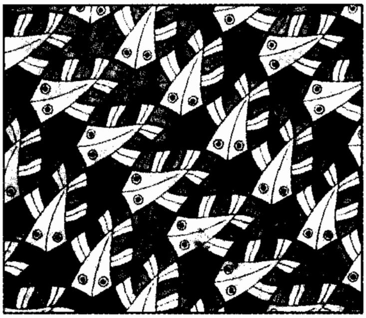

(a)

(b)

图 10

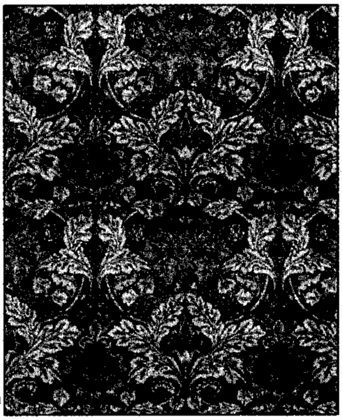

(a)

(b)

图 11

> 你可以用挂毯而非白色涂料或纸来装饰墙壁；或者你可以用嵌花覆盖它们；或者请一位伟大的画家在上面做上壁画；如果这样做是为了美而非炫耀，那么所有这些并不昂贵：它不违背黄金律：在你的房间里的所有东西，你都知道它们是否有用，或清楚它们是否美丽。

一个有趣的问题是，与平移有关，事实上与反射和旋转也有关的对称，是仅局限于视觉艺术，还是可以拓广到其他艺术形式，如音乐作品。很明显，如果我们考虑声音，而非书写乐谱的布局，正如我们对回文所做的那样，我们将不得不用除了纯几何以外的术语定义对称运算。然而，一旦我们这样做了，那“我们能否找到平移对称音乐”这个问题的答案就彻底是“yes”了。像俄罗斯晶体物理学家G·V·乌尔夫（G. V. Wulff）在1908年所写的：“音乐的精神是旋律。它包括有规则地、周期性地重复乐曲的各部分……同一部分的有规则地重复构成了对称的实质。”的确，在乐曲中非常普遍的重复主题与莫里斯设计和平移对称的作用实际上是等价的。甚至更一般地，乐曲经常建立在最初引入的，然后经历了各种变形的基本主题上。

平移对称在音乐中的简单例子包括莫扎特（Mozart）著名的G小调第40交响乐（图12），以及一些具有共同音乐形式的整个结构。在这个例子中你可以看出，不仅乐谱的每一行（以短的下降的姿势表示），而且在第一行和第二行之间（以a和b表示），都是平移对称的。在全部设计方面，如果我们用符号A、B和C描述一个运动的所有部分，那么，例如，一首回旋曲的模式整体上可以表达为ABACA或ABACABA，其中的平移对称是明显的。莫扎特与数学对象的联系应在意料之中。他的姐姐娜奈尔（Nannerl）回忆，他曾经把数字涂在楼梯的很多墙壁上和家里的所有房间，并且在没有地方涂鸦时，他继续在邻居家的墙上涂写数字。莫扎特甚至在所写的C大调幻想曲和赋格曲手稿的页边空白处也写满了赢得博彩的概率计算。那么，英国音乐学者和作

曲家多纳德·托维（Donald Tovey）认为，莫扎特乐曲对美丽和对称的平衡处理是它们受到欢迎的关键原因之一，这样的看法也就不足为奇了。

图 12

另一个以沉迷于数字、智力比赛和它们在复杂音乐形式中的运用而著称的伟大作曲家是约翰·塞巴斯蒂安·巴赫（Johann Sebastian Bach，1685～1750）。反射和平移在巴赫音乐的许多方面起着重要作用。一个包括水平“镜子”反射的例子是巴赫的 E 大调二声部第 6 创意曲的开始（图 13）。设想一面镜子位于两条乐谱线中间的空间里。由 a 表示的上升趋势（稍后）被下降趋势 b 所反射，并且再稍后整个手势（起于 d）又被反射和重复。另一例子可以由巴赫的一部最著名的作品《音乐的奉献》的整个大比例结构来说明。这部作品包括了以下音乐形式：

利卡切尔①　5 首卡农曲②　三重奏鸣曲　5 首卡农曲　利卡切尔

---

① 利卡切尔（Ricercar），在 16 至 18 世纪指的是赋格曲和卡农风格的对位精致的器乐曲，其本意是“寻求”的意思，在《音乐的奉献》中指的是赋格曲。

② 卡农（Canon），复调音乐之一种，原意为“规律”。同一旋律以同度或五度等不同的高度在各声部先后出现，造成此起彼伏连续不断的模仿，即严格的模仿对位。第一次出现的声部称“起句”，相隔一小节或两小节后出现的重复声部称“应句”，用卡农手法写成的乐曲称“卡农曲”，声乐曲中的“轮唱”亦即“卡农曲”的一种。卡农出现于 13～14 世纪，后人常采用古代曲调作为卡农主题。

作品展示了反射对称（显然不是一段段的音乐的简单串连）。

利卡切尔（源自 ricercare——“研究，或寻找”）是一个古老的术语，广泛地适用于任何类型的前奏，通常用于赋格风格的前奏。伟大的人道主义者、物理学家和哲学家阿尔伯特·史怀哲（Albert Schweitzer，1875～1965）也是一位伟大的巴赫狂热者。在《约翰·塞巴斯蒂安·巴赫》一书中，他写道：“这个单词（ricercar）表示一种音乐，在这种音乐中我们必须寻求一些东西——即一个主题。”《音乐的奉献》也包括 10 首卡农曲，卡农在构造上涉及了平移的操作。在任何卡农（cannon 这个词语的意思是“规律”）曲中，一条旋律线决定了下一个或更多声音的规律（根据谱线或节奏）。

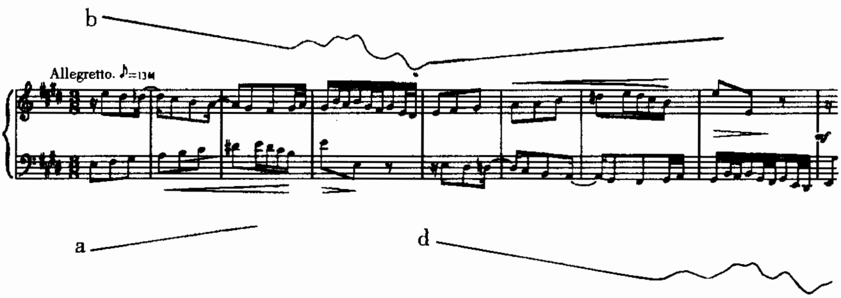


图 13

第二个声音遵循同样的时间间隔——一种时间平移。一个简单、熟悉的例子是

划啊划，划着你的小船	Row row row your boat
轻轻地沿着河流	Gently down the stream
高兴啊，高兴啊，高兴啊高兴	Merrily merrily merrily merrily
生活只是一场梦	Life is but a dream

在这首歌中，当第一段节拍到达单词“轻轻地”时，第二段节拍开始。

围绕《音乐的奉献》的故事本就真实迷人。在死前 3 年，巴赫动身

前往柏林，去看望他的儿媳约翰娜·玛利亚·丹纳曼 [Johanna Maria Dannemann，作曲家卡尔·菲力普·伊曼纽·巴赫（Carl Philipp Emanuel Bach）的妻子]，约翰娜当时想要一个孩子。因长途旅行而疲惫不堪，上了年纪的作曲家停在了波茨坦，那时普鲁士国王腓特力二世在位，这位国王也雇佣了卡尔·菲力普·伊曼纽。巴赫来到王宫的消息促使国王取消了一场计划中的音乐晚会，他让巴赫在 7 架新玩意“fortepiano[①]”上即兴独奏，自己则吹起了长笛。这些“fortepiano”由戈特弗里德·西尔伯曼（Gottfried Silbermann），德国主要的巴洛克式管风琴制造师制作。在宫廷的 7 个不同房间里进行了鉴赏式的表演后，巴赫按照国王陛下所建议的主题为兴高采烈的观众即兴创作了一首赋格曲。回到家后，巴赫由即兴创作的赋格曲发展成《音乐的奉献》。他加了一套华丽复杂的卡农曲和一首三重奏鸣曲，并且精心制作了其他对位[②]乐章。奏鸣曲以一支长笛（腓特力国王的乐器），一架钢琴和键盘乐器低音部分（键盘和大提琴）为主要特征。至于乐曲的标题，曾经喜欢把玩文字的巴赫选择了 Regis iussu cantio et reliqua canonica arte resoluta（依照国王要求的主旋律与附属一些卡农风格的乐曲），缩写成 RICERCAR（利卡切尔）。

在《音乐的奉献》中甚至有更多的对称性。在卡农 I（变奏卡农）中，每一把后面的小提琴都重复演奏前面的声部，造成在一个垂直镜面中（乐谱）的反射对称。最后，一般认为，卡农在时间上是某种对称难题。设计者提供主题，但是音乐家要考虑如何使用某种他打算采用的对称手段来表现该主题。在《音乐的奉献》的案例中，巴赫在三重奏鸣曲前伴奏的两首卡农曲都有题字“Quaerendo inventis”，意即“寻找，那么我们会找到”。正如我们将在第 7 章看到的，这在概念上与宇宙加给

---

① 18 世纪末流行的钢琴。

② 赋格所用的一种表现手法。对位法是在音乐创作中使两条或者更多条相互独立的旋律同时发声并且彼此融洽的技术。对位法是音乐史上最古老的创作技巧之一，其名称（contrapuntal）来源于拉丁文 punctus contra punctum，音符对音符。

我们的难题没有什么不同——它把自己所有的奥秘公开，以接受检查——要我们找到潜在的模式和对称性。巴赫所面临的智力挑战，甚至在尝试揭示“万物至理”时遇到的不确定性和模糊性，都与其有类似之处。你知道，在《音乐的奉献》中的一首卡农曲就有三种可能的解答。

平移和反射可以归并为一种对称运算，即为人熟知的滑移反射。交替左一右一左一右行走所产生的脚步表现了滑移反射对称（图 14）。这个运算简单地包括了一个平移（滑移），然后是在一条平行于置换方向的线（图中的虚线）上的反射。同样地，你可以把滑移反射看作后面跟着一次平行于镜子的平移的镜面反射。滑移反射对称在古典建筑中楣中和在新墨西哥土著美洲人的制陶业里是很常见的。平移对称模式倾向于在一个方向上传递动感，而滑移反射对称创造了一种蛇形视觉。真正的蛇是通过交替收缩和放松身体两侧的肌肉组织来完成这些模式的——当它们收缩右边的一个组织时，左边的相应组织则是放松的，反之亦然。

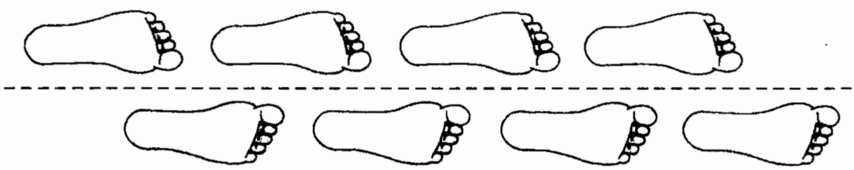


图 14

到此为止，我们已经遇到了所有造成二维对称的刚性变换。所谓“刚性”是指变换后任意两点的距离与它们在变换之前的距离相等——对于这样的图形，我们不能收缩、膨胀或扭曲。

在三维空间中，除了经过平移、旋转、反射和滑移反射而产生的对称外，我们还可以找到另一种对称，即通常所说的螺旋对称。这是一种螺旋形的对称，在这种对称中，绕某轴旋转要与绕其平移相结合。一些植物的茎拥有这种对称，这些植物的叶子在围绕着茎生长一圈后，又以同样的规律同样的间隔在下一圈出现。

以上这些是存在的全部对称性吗？当然不是。

都相等，但是……

艺术和科学充满了有关平移对称、旋转对称、反射对称和滑移反射对称的有趣例子，在后续章节中，我们将重述这些例子。在自然界中，一个有趣的非几何变换涉及了置换——物体、数字或概念的不同重排。例如，为了测试四个不同品牌轮胎的磨损程度，你可能要规划一个策略，以保证让每个轮胎占据一个位置，你每月互换所有轮胎的位置，一共进行四个月。如果你贴上牌子 A，B，C，D 和位置 FL（前左），FR（前右），RL（后左）和 RR（后右）的标签，那么四个月的计划可能看起来如下：

月份	FL	FR	RL	RR
一月	A	B	C	D
二月	B	A	D	C
三月	C	D	A	B
四月	D	C	B	A

每行或每列代表了字母 A，B，C，D 的一种置换。注意，为了完成该测试，行或列不能包括同样的标签两次。列在此处的 4×4 的方形即为“拉丁方块”，著名的瑞士数学家列昂哈德·欧拉（Leonhard Euler，1707～1783）曾广泛地研究过拉丁方块。顺便提一下，你会为解决如下 18 世纪流行的扑克难题而感到开心：在一个方块里排列一副牌里所有的杰克（J）、王后（Q）、国王（K）和至尊（A），要求不能有同色牌或同等大小的牌在任意行、列或两条主对角线上出现两次。如果你对解决这个巴洛克式的难题有困难，我将在附录 1 中给出一个解。

不论是在苏格兰民族舞蹈中的交换舞伴，还是洗牌，置换总是在很多不同的环境下起作用。置换的关键，不是哪个对象放到哪个位置，而

是哪个对象替换哪个对象的位置。例如，在置换 1 2 3 4→4 1 3 2 中，数字 1 被数字 4 取代，2 被 1 取代，3 不变，4 被 2 取代。这通常表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

其中，上一行的每个数字被正对着的下一行数字所取代。同样的置换运算也可以写作

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

因为发生了正好相同的置换，所以数字书写顺序就不重要了。你是否想知道一个系统在置换运算下怎样才对称（也就是说不变）？显然，如果你在一个书架上有 10 本书，并且它们是全然不同的，任何非同等（未碰书）置换都会改变顺序。可是又比如，如果你有同样的书的三本复制品，显然一些置换会使顺序不变。以“真情流露的生活观察”而著称的英国散文家和批评家查理·兰姆（Charles Lamb，1775～1834），对一些这样的书的“重排”有一种相当强烈的观点。他写道：“根据我能构建的最好的理论，人类可分为截然不同的两类——借用人与出借人……书的借用人——是那珍藏本的破坏者、书本排列次序的捣乱者和零星残书的创造者。”

置换下的对称可以在更抽象的情况下出现。检查短语“拉切尔是大卫的堂兄弟”的内容，如果我们交换大卫和拉切尔，意思仍然不变；而对于短语“拉切尔是大卫的女儿”，交换后结果迥然不同。相似地，两个数相等，即 $a=b$，由于 $b=a$ 表示同样的联系，所以这种相等关系在交换 a 和 b 时是对称的。尽管这样叙述似乎罗嗦，但关系“大于”（通常由符号“＞”表示）却不具有这种特点。关系 $a>b$ 意思是“a 大与 b”，交换字母导致 $b>a$，即“b 大于 a”，则这两种关系互相排斥。

很多数学公式在置换下也可能是对称的。表达式 $ab+bc+ca$ 的值（其中，ab 意思是“a 倍的 b”，等等）在任意置换 a，b，c 的情况下都仍是不变的。随后我将更详尽地讨论，准确地说，这 3 个字母有 6 种可

能的置换，6 种置换包括了一种恒等置换（下面第一个），让每个字母与自身映射，6 种置换如下：

$$\binom{abc}{abc}\ \binom{abc}{acb}\ \binom{abc}{bca}\ \binom{abc}{cab}\ \binom{abc}{cba}\ \binom{abc}{bac}$$

你可以很容易地看出，通过这些置换，表达式 $ab+bc+ca$ 的值不变。例如，第三种置换把 a 换成 b，把 b 换成 c，以及把 c 换成 a。整个公式因此变为：$bc+ca+ab$。然而，既然在任何顺序中我们要么乘了相同的数字，要么将它们加总，所以结果总是相同的，新的表达式与原来等同。

在赌场中玩轮盘赌的人提供了置换对称的一种有趣例子。轮盘赌由一个旋转的轮子组成，在轮子中有 18 个红槽、18 个黑槽和 2 个一般贴有 0 或 00 标签的绿槽，一个白球落在旋转的轮子上，在沿轮缘快速旋转几次后，白球弹起，最后落下，并停在一个槽中。当轮子制作完美时，对于任何玩家，轮盘赌都是绝对对称的。每个人有绝对相同的机会赢或输，而不管他们是赌场的老手还是初学乍练者，是概率论的专家还是乡野白痴。赢的期望（相对于输，平均大约每一美元赌资赢的期望为 5.3 美分）不取决于赌注多少或玩家的策略。尽管可能没有机械轮盘是真正完美的，但数世纪以来赌场的利润证明了，不管可能存在多么小的偏差，它们不会造成对置换对称的重大违背。

不是所有的赌博活动对于所有玩家都是对称的。21 点是一种扑克游戏，在这种扑克游戏中，在游戏桌上的每个玩家与庄家玩牌。每个有数字的牌都有它的面值，所有有图画的牌面值为 10，至尊（A）可以由玩家选择计为 1 或 11。目标是，让所有发到手里的牌的总面值比庄家手中的牌更接近 21，但是不要超过 21。策略是重要的，使 21 点游戏关于不同玩家不对称的原因恰恰是这点。在 19 世纪 60 年代，赌场好不容易才发现了策略的重要性。数学家爱德华·奥·索普（Edward O. Thorp）使用在赌场中计算牌减小的概率的方法找到了一个漏洞。他由此发明了一种特别赚钱的玩法。可能你对此会感到惊讶，但赌场自那以后已经采取了补救行动。然而，在 21 点游戏中策略确实造成了差异。事实上，

有6个麻省理工学院的学生通过交流算牌信息于20世纪90年代在拉斯维加斯赢取了几百万美元。

置换对称及其相关学科对于亚原子世界的物理学有深远的影响，我们将在第7章详谈这个话题。这里我只简单地提一个例子，这个例子解释了一个原本复杂的事实——不同元素的原子的尺寸都是大体相同的。

原子有点像缩微的太阳系。原子中的电子绕中央的原子核飞旋，正如行星绕太阳公转一样。只不过，让电子停留在它们的轨道上的力是电磁力，而非引力。原子核包括了带正电荷的质子（和中性的中子），而轨道电子（在数量上与质子相等）是带负电荷的。异性电荷互相吸引。不像行星系统可以有任何尺寸的轨道，原子必须遵从亚原子王国——量子力学中的规则。找到电子的最高的概率是沿着某个具体的“量子化”的轨道，这些轨道局限于一种特别序列的离散尺寸。容许轨道的特征主要以它们的能量来刻画。从广义上讲，与轨道联系的能量越高，轨道的尺寸越大。这种情况有点类似于一段楼梯，原子核代表了楼梯底部，而较高的能量水平对应于逐渐增高的阶梯。然而，这里的困惑便接踵而来。物理学，事实上也是我们的日常生活，系统在它们最低的可能的能量状态处最稳定（例如，一个球滚下阶梯，在底部达到了稳定状态）。这将意味着，不管我们讨论的是有1个电子的氢原子还是有8个电子的氧原子或是有92个电子的铀原子，所有的电子都会云集在最小的可能轨道上。因为含有电子和质子的原子越多，在原子核与电子之间的电荷吸引力越强，所以我们可能预期，氧原子会比氢原子较小，而铀原子将更小（如示意图15所描绘的）。然而，实验显示，这种想法与事实有较大出入。相反地，实验表明，不管电子数多少，原子具有大概相同的尺寸。这是为什么？

著名的物理学家沃夫刚·保利（Wolfgang Pauli，1900～1958）给出了解释。他在1925年提出了一种强大的自然规律（这使他于1945年获得了诺贝尔奖），即举世公认的保利不相容原理。这个原理谈到了一些同类基本粒子，如电子。在宇宙中的所有电子按照它们的内在属性是

正好相同的——无法区分彼此。除了电子云和电荷外，电子有另一种所谓“自旋”的基本特性。在某方面，可把自旋想象为好像电子是一个绕其轴旋转的微球。量子力学——描述原子、光和亚原子粒子的理论——告诉我们，电子自旋只有两种状态（粗略地类似于在一个方向或相反方向以某种速度自旋的球）。保利不相容原理断言，没有两个电子完全处

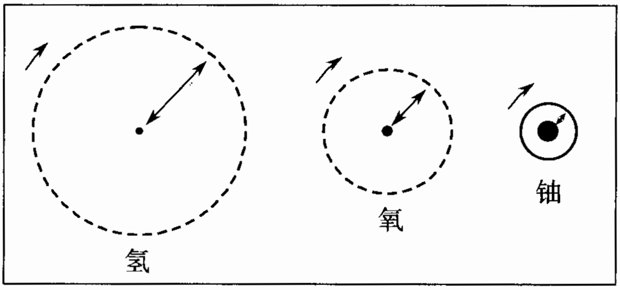


图 15

于同样的状态；也就是说，没有两个电子会有正好相同的轨道和旋转方向。这如何与对称联系起来呢？为了更精确地表达不相容原理，我们需要认识到，量子力学是以概率的语言表述的。我们永远也无法精确地判定原子中一个电子的位置。相反地，我们只能确定在各个位置发现它的不同概率。所有这些概率的集合就是通常所说的概率函数。概率函数起着一种映射的作用，向我们展示了在哪里最可能找到电子。因此，保利也按照一种描述原子中电子运动的概率函数的特性将不相容原理公式化。他陈述道，概率函数关于相互交换的任何电子对是反对称的。如果两个沿同样轨道运动且自旋方向相同的电子的变换仅仅改变了函数符号（例如从正变为负），而不改变函数值，那么这样的函数就是反对称的。例如，设想以字母 a 表示第一个电子的一些属性值，并以字母 b 表示第二个电子的同样属性的值。既然 $a+b=b+a$，那么一个采用 $a+b$ 的函

数在交换两个电子的情况下是对称的。另一方面，既然把 a 变为 b 和把 b 变为 a 使得 $a-b$ 变为 $b-a$，并且 $b-a$ 完全是负的 $a-b$（例如，$5-3=2$；$3-5=-2$），那么一个由 $a-b$ 表示的函数是反对称的。

因此，保利的陈述是问题症结所在。一方面，我们知道，如果我们交换两个相同的电子，无论什么这都没有差别，并且概率函数应该仍然不变。另一方面，不相容原理告诉我们，在这样的置换下概率函数应该改变符号（如从正到负）。什么数字加了负号后仍不变？只有一个这样的数——0。在 0 前改变符号绝不会改变其值；负 0 等于正 0。换句话说，找到沿同样轨道进行同样自旋的两个电子的概率是 0——即这样的情形不存在。

保利的不相容原理告诉我们，具有相同属性的电子不喜欢在同一地方扎堆。因此，在任何给定的轨道仅允许有两个电子（每个电子各有自旋方向）。不是所有电子都拥有最小的（最低能量的）轨道，而是，电子被迫连续地进入更高能量的、更大尺寸的轨道。剩下的结果是，即使重（富有较多质子的）原子的所有量子化轨道的尺寸都较小，电子除了占据一个尺寸逐渐递增的轨道外也别无选择。令人吃惊的是，原子在尺寸上几乎是相等的，而不像图 15 那样。概率函数在电子置换下的特性为此提供了解释。

现在回到一般的置换，颜色变换可能被认为是近亲。对于任何超过一种颜色的模式，例如棋盘，颜色可以交换。严格地讲，在颜色变换下实际的模式通常不是对称的——它们的确变化了。M·C·埃舍尔的几个富有想象力的设计几乎想人之所能想地接近于颜色对称（图 16）。注意，当黑和白调换后，这种图形仍然不真正相同，棋盘也

图 16

是这样。然而在一般的视觉印象中这仍然是相同的。

埃舍尔本人从来都不十分确信，是什么让他拥有平移对称的、颜色对称的风格。用他自己的话说：

> 我经常想知道我自己（为何）狂热地设计周期画。我曾经问过我的一个朋友，他是一位心理学家。可他回答说，我一定是由一种原始的原型本能所驱动，但这个回答没有解释任何事情。什么是我待在这个领域的原因？为什么我的同行艺术家中似乎没有人像我一样痴迷于这些连锁的形状？然而他们的准则是纯客观的，即每一位艺术家都可以使用展示他个性的方法！

埃舍尔的反省沉思涉及了两个重要的主题："原始的"感知过程中的对称和潜藏于对称之后的规则。后一主题将是以后几章的主要内容。然而，既然我们得到的关于世界的所有的信息来自于我们的感知，对称作为感知中一种潜在因素的问题便立刻呈现出来。

第二章

想象中的对称

在人类所有的意识中，视觉一直是感知世界的最重要的工具。然而，眼睛只是可选的一种工具；感知需要大脑的参与。在大脑中的视觉感知是许多过程的一种复合，大脑结合了来自外部世界的多种感觉，以生产一种可提供信息的形象。我们的环境产生了大量超出我们分析能力的信号。因此，感知牵涉到筛选大量数据和选择最有用的特征。当棋手考虑下一步的走法时，他们不会在内心检查棋盘上的每一种可能走法。在考查了已有的大量知识（我们称之为回忆）的基础上，他们专注于几种似乎最有利的走法。在伍迪·艾伦（Woody Allen）的电影《玉蝎子的魔咒》中，丹·艾克罗伊德（Dan Aykroyd）扮演一家保险公司的老板。在一个镜头中，他告诉他的一个调查者C·W·布里格（伍迪·艾伦饰），“你知道，对于那些认为每个人都在谋算他们的人来说有一个单词表示。”伍迪·艾伦回答道：“是——perceptive（可感知的）！”当然，事实上，妄想症代表了一种扭曲的感知。

当面对它时，视觉感知必须完成一种不可能的任务。它需要把眼睛背面感受器上的单位光能（称为光子）的物质碰撞转换成物体的精神图片。正如我们很快要看到的，对称提供了达到这个目标的一种重要手段。

然而，首先，我们必须辨别出要克服什么类型的困难。天文学能帮助阐明涉及对称这个过程的许多障碍中的一种——特别是距离的感知。图17显示了由哈勃太空望远镜所拍摄的一幅图片，通过围绕仙女座大星系（就是天文学家所说的M31）的恒星的球状光晕可以观察到它。一个星系是由几千亿个像太阳一样的恒星组成的巨大星团。距离地球250

万光年的 M31 是离我们的银河系最近的星系。（1 光年大约为 6 万亿英里。）从图 17 中的图片的背景中可以看到 M31 中的约 1 万颗恒星和约几百个其他的星系（其中的一些像伸展着绒毛的物质）。然而，这里产生了问题。相对而言，只看图片，没有办法说明那些

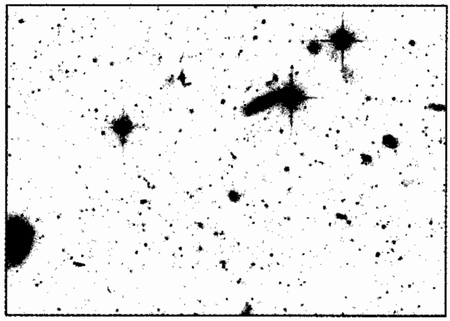


图 17

恒星是在我们自己的后院（距离我们 250 万光年），而一些星系更是距离我们 100 亿光年之遥！相似地，当我们凝视我们周围的世界时，眼睛只能认识光子运动而形成的光线传播的方向。既然形象投射在一个二维表面（视网膜）上，如果没有额外的信息，大脑没有光子起源于多远的线索。对于相对近的恒星，天文学家使用一种被称为三角视差的方法解决距离判定问题。他们从地球绕太阳公转轨道的两个不同的点观察恒星（图 18）。在一年的过程中，近地恒星似乎相对于背景中的恰当远的（固定的）恒星群有前后移动。由于地球轨道直径已知，通过测量与这种显然的移动相联系的角度，并运用简单的中学三角函数知识，一个人可以计算该恒星的距离。

人类使用他们的两只眼睛以正好相同的方法来产生空间意识。你可以通过做简单的实验发现这种被称为立体视觉的机理。伸开胳膊，竖起一支手指，并且对着一些背景观察手指。如果你交替闭上右眼和左眼，你的手指将似乎相对于背景物前后移动了。让手指离眼睛更近些，那么你会注意到，在两个位置之间的跳动增加了。因为你的两只眼睛从不同的点观察手指，所以这种明显的移动（视差）发生了。既然视差取决于物体的距离，在已知瞳距的情况下，通过测量两个明显的位置的角度，大脑用三角函数算出物体的距离。如果你熟悉闭上一只眼时深度感的相对损失，那么你可能认为，立体视觉中的两只眼睛的作用是与生俱来的

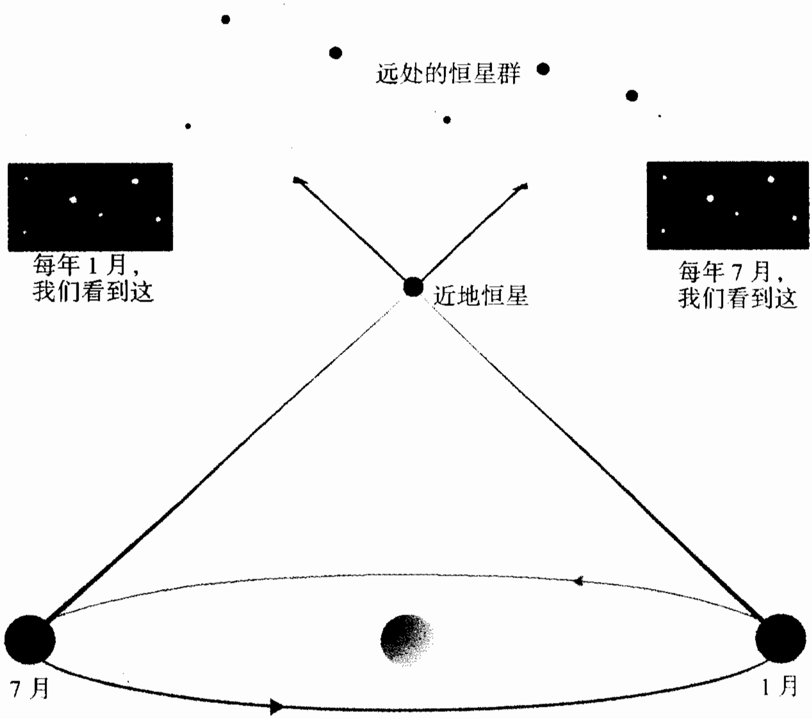


图 18

生物遗传。令人惊讶的是，甚至一些伟大的透视图学者都错过了立体视觉的概念。像古希腊的欧几里得（Euclid）这样的数学家，文艺复兴时期的建筑师伯鲁乃列斯基（Brunelleschi）和阿尔伯蒂（Alberti），画家皮耶罗·德拉·弗朗西斯卡（Piero della Francesca）、保罗·乌切罗（Paolo Ucello）和阿尔布雷特·丢勒（Albrecht Düler），甚至伟大的艾萨克·牛顿（Isaac Newton）都只把两只眼睛看做两侧对称的一种表现，而没有其他特别的功能。第一个注意到两只眼睛能提供一只眼睛所不能提供的东西的人是文艺复兴代表人物——列昂纳多·达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452～1529)。达·芬奇指出，当我们用双眼看一个物体时，右眼负责捕捉在物体后靠近右侧的一些空间，而左眼逡视左侧物体。因此，他归纳道："物体……被双眼看到的，像它原本那样，是清晰的……但是当一个物体……被一只单眼观察时，这不会发生。"尽管这是很有远见的，但由于只将注意力放在球体上，达·芬奇错失良机，没能发现，两只眼睛捕捉两种不同的景像，这不仅适用于背景中，也适用于物体本身。在感知距离时，确立了用双眼看的重要性的人是德国天文学家约翰尼斯·开普勒（1571～1630)。在两本不同凡响的书中，开普勒给出了一种眼睛光学的详尽描述，解释了眼镜原理，并且发展了一种立体视觉的理论。这两本书就是出版于 1604 年的 *Astronomiae Pars Optica*(《天文光学》) 和出版于 1611 年的 Dioptrics(《折射光学》)（折射光学，处理折射的光学分支)。然而，不知怎么地，开普勒的工作相对地没有引起注意，甚至于 1838 年发现了深度感知机理的查理·惠斯登似乎也没有注意到它。

查理·惠斯登（Charles Wheatstone，1802～1875）出生于音乐世家，而且他的第一项研究工作涉及诸如管弦和音乐器械的各种设备的声音、颤动。在 1822 年，他在伦敦帕尔摩街其父的店里建立了一种不仅提供给耳朵，也提供给眼睛的音乐示范。这种"迷人的里拉琴"被一条通过天花板接到阁楼上的一个房间里的细线挂起来，并且被连接到一架钢琴，一架竖琴和一架洋琴的响板上。当惠斯登在楼上的房间里弹奏乐器时，迷人的里拉琴似乎在自己弹奏。作为一名极其富有想象力的试验者，惠斯登发明了六角手风琴（一种类似于小风琴的音乐器械)，并且在英国申请了电报的专利。

惠斯登在 1832 年开始他的立体视觉试验，并且在发表于 1838 年 6 月 21 日的一篇论文中陈述了他的理论。这篇论文的标题是"对视觉的生理学的贡献。第一部分：关于一些非同凡响的、至今尚未观察到的双眼视觉现象。"这篇论文的第一段描述了这项发现的实质——在两个视网膜上的物体的对称像的不一致和随后的大脑处理产生了一种空间感

知。用惠斯登的话说：

> 在很远的距离观察一个物体时，如果双眼直视它，那么双眼的光轴明显是平行的，每只眼睛单独看到的物体透视投影是相似的，并且双眼所看到的外观与只用一只眼睛所看到的物体是正好相同的……但是当把物体放得非常靠近眼睛，以致光轴必须聚焦于一点来观察物体时，这种相似不再存在；在这种情况下，每只眼睛所看到的是物体的不同透视投影……把任何三维图形，比如一个立方体轮廓放在眼前中等距离处，并且让头部保持完全不动，连续地闭上一只眼用另一只眼观察它时，可以容易地验证这个事实。

因为这个故事有助于例证在形成对感知的一种综合性理解时存在的巨大障碍，所以在描述涉及感知像空间深度那样基本的事物的发现过程方面，我已经有点远离了本书的主题。人类感知的理论可以填充，并且的确填充了整个内容。这里我将仅专注于该过程中对称的作用。

被称为格式塔心理学的思想的学院将对称在感知中的作用推向主要议题。开创该学说的心理学家马克斯·威斯尔莫（Max Wertheimer）、库尔特·考夫卡（Kurt Koffka）和伊福·科勒（Ivo Kohler）于1912年在法兰克福大学建立了一个有影响力的实验室，进行心理学研究。格式塔心理学家着手解决的一个关键问题是知觉组织问题——我们所收到的零碎的信息是如何被组成大型知觉结构。我们怎么知道把哪些片段放在一起可以组成一个物体？我们如何把许多物体彼此分开，并且我们如何区分物体和背景？格式塔心理学的知觉组织的中心“法则”被称为Prägnanz① 原理，通常指“好体形”原理（在德语中Prägnanz意思是“简洁”）。该法则可表达为：“在几种几何上可能的组织中，人们看到的那个是具有最好的、最简单的和最稳定的形状的那个。”因此，对于格式

---

① 直译为“简洁”，意译为“优良性”。

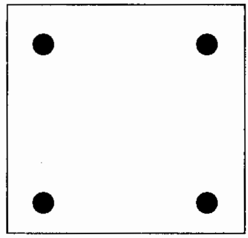


图 19

塔心理学家而言，对称是一种关键的元素，对于形状的“优良”贡献卓异。在图 19 中的四个点的排列将被想象为一个方形，因为作为一种对称的、封闭的和稳定的形式，方形的“优良”较其他形状，如一个三角形外加一个点的一种排列为高。而格式塔心理学家从来没有想过形成一种形状知觉的精确理论，所以以后的理论家，如荷兰心理学家伊曼纽尔·莱尤温伯格（Emanuel Leeuwenberg），美国人温德尔·嘎纳（Wendell Garner）和斯蒂文·帕尔默（Stephen Palmer），扩展了他们的基本原理。尤其是嘎纳和帕尔默，他们认识到了各种类型的对称（如经过旋转和发射的对称）对于形状“优良”的作用。

莱尤温伯格和他的合作者发展了一种形状表达理论，一般将该理论称为结构信息理论。该理论的两个基本概念是代码和信息负荷。代码是能产生一种可观测图形的简单知觉描述。例如，为了描述一个长方形，我们可以从左上角开始，并且给出需要画的那段的长度（图 20），之后要给出所需要进行的调整角。接着我们给出下一段长度，并给出调整角。画长方形的最终代码将采取 a 90 b 90 a 90 b 90 的形式。然而，请你注意，既然同样的说明被重复了两次，那么我们可以通过写成 2*(a 90 b 90) 来简化这个代码。

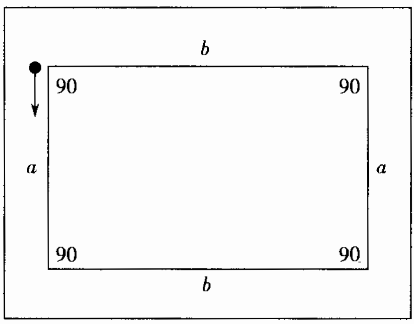
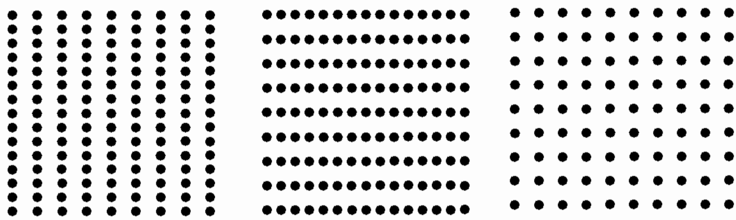


图 20

信息承载数是由一个简洁的代码所包涵的复杂性来决定的。这些代码有许多工作要做。一般地，你可以通过简单数一数代码中的参数

（像上例中的 a，b 和 90）个数计算信息承载数。结构信息理论的中心思想是，信息承载数越低，图形的"优良"性越高。因此，具有较低信息承载数的对称图形在"优良"规格上越高。例如，对于上面的长方形代码，信息承载数是 4：反复数字（2）；两个长度（a，b）；和角度（90）。另一方面，对于一个普通四边形，信息承载数将是 8（四个长度和四个角度）。

在格式塔结构原理中两个其他重要元素是接近性和相似性。接近性"法则"表达了这样一个事实，通常彼此靠近的形态在意识上容易组合起来。在图 21a 中，因为垂直方向点间距比水平的小，所以我们认识到了列。图 21b 则相反，造成了对于行的知觉。当（纵、横）间距相等时（如图 21c），让我们产生了一种模糊的印象。



(a) (b) (c)

图 21

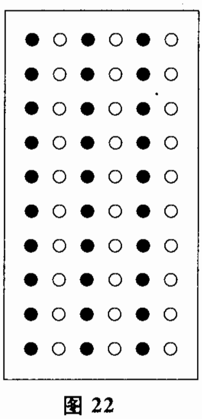


图 22

相似的形状也往往联结起来，并且相似性有时可能是一种比接近性更有力的结构元素。在图 22 中，由于黑圆圈的相似性我们往往只察觉到列，即便这时的每行的圆还是有着接近性。只有当所有圆圈都是黑的，我们才会看到行。

对称在认识相似性上起着重要作用，因为它代表了一种确确实实的不变性——一种对变化的免疫性。因此，对称对于知觉系统是一种特别有益的特点，可以使用对称来判定观察的样式是否

确然形似或不同。

另一个格式塔原理是良好的连续性——当两条线彼此交叉时，我们观察到了符号 X，而非一条斜直线，与一条与之对称的斜线，在一个顶点连接形成的 V 字形。共同点也是分组的一种依据。我们往往把以同样速度、朝同一方向运动的事物划分在一起。圣经中的先知阿摩斯已经完全意识到了这个原理，当时他问："如果两个人不约好，他们会走在一起吗？"

加利福尼亚伯克利分校心理学家斯蒂文·帕尔默及其合作者增加了共同区域、连通性和同步性组织原理。图 23 显示了这些原理。共同区域是指当元素被封闭在一个空间区域内（23a）而被划分在一起的情况。连通性的意思是，我们可感知外观上物理连通（23b）的单位元素。同步性则反映了同时发生的可视事件被认为是有联系的情况。

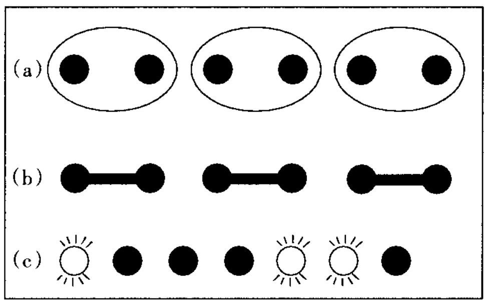


图 23

对称，尤其是两侧对称，也是图形背景分离的一种关键元素——这种图形背景分离具有把图形看做突出于背景的物体的能力。快速地看一眼图 24 的左右，并判定哪种颜色是图形，哪种颜色是背景。两侧对称区域往往被认为是相对于非对称背景的图形。因此，在图 24 的左边，我们倾向于把黑色区域视为图形，而在右边，白色区域则是图

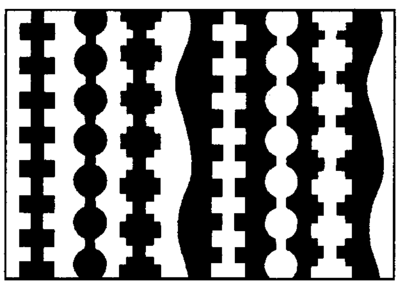


图 24

形。相比其他方向，垂直和水平方向更易被看做图形。最后，被较大区域包围的较小区域往往被视为图形，它们是意义明显的或被人们熟悉的形状。

你可能已经注意到，最初的格式塔“法则”仅仅只是试探法[①]——可能在大部分时间但不一定在任何时刻都起作用的最好的猜测原理。他们使用定义得相当模糊的概念，如“优良性”和“相似性”。有人可能想知道为何这些原理确实起作用。答案是它们可能代表了学习与演化的一种结合。正如奥斯卡·维尔德（Oscar Wilde）所说，“经验是每个人对自己所犯错误的称呼。”几代人都在“实践”知觉，通过无数次的知觉遭遇他们明白了自己期待什么。尽管最初的格式塔原理有缺陷，但它们是有用的，因为它们提供了一种快速答案。当你想找到你的钥匙时，你首先会去你通常放钥匙的两个地方找，只有在这两处地方没找到钥匙时，你才会开始系统地在整个住宅内寻找。

最近的心理学理论和实验结果证实了对称在知觉中的重要作用。许多实验表明，关于一条垂直轴的两侧对称是最容易认识的（即最快地认识的），并且它被用做“相同—不同”判断的一种诊断特性。在乍然相看时，对称基本上是一种吸引人眼球的特性。对称对于从没有生命的物体中区分出活的生物体（包括潜在的食肉动物）和选择想要的伴侣也是有用的（我将在第 8 章探讨这些主题）。其他实验已经证明，对称图形较不对称图形更易复制。在一项有趣的研究中斯坦福大学心理学家珍妮弗·弗雷德（Jennifer Freyd）和巴巴拉·特维斯基（Barbara Tversky）发现：主体首先迅速断定是否存在总体对称；接着，如果认为该形状具有总体对称性，一些主体心里会扭曲其形象，并且假定它（有时不正确）在细节上也具有对称性。

偏爱各种对称的一个令人感兴趣的解释可能具有一种源自实验的学

① 大约在公元前 300 年希腊数学家 Pappos 首先提出了试探法/直观推测法（Heuristics）这一术语，用来描述“进行发现和发明的科学”。

术特点，这些实验是由伊利诺斯大学心理学家伊欧尼斯·帕拉斯克沃普洛斯（Ioannis Paraskevopoulos）进行的。他的研究对象是76个小学生。帕拉斯克沃普洛斯发现，6岁学生喜欢双对称(垂直和水平反射)，7岁学生喜欢两侧对称（只垂直反射），而11岁学生喜欢水平对称(水平反射)。

一些最让人激动的新近研究希望使用磁共振成像（MRI）技术来映射大脑中对对称的反应区。位于旧金山的史密斯-凯特威尔眼睛研究院的心理学家克里斯托弗·W·泰勒（Christopher W. Tyler）研究了具有各种平移对称和反射对称模式的对象。他发现，这些刺激激活了原本作用不明的枕叶区域，令人惊奇的是，在已知的具有视觉功能的其他区域却很少或没有看到激活。泰勒得出结论，这个专门化的区域可能负责对视觉区域中存在的对称进行译码。

在对称和定位之间的相互关系也是令人着迷的。当以某种方法旋转、反射或平移时，对称图形不会改变。然而，许多形状对任何转变(除了保持形状不变的一致变换）都不是对称的，那么，我们如何感知它们受到了有限的影响，比如说受到方位的影响呢？例如，快速地看一眼图25。你能认出它是非洲地图吗？或者，不颠倒本书，你能认出图26的那个人吗？

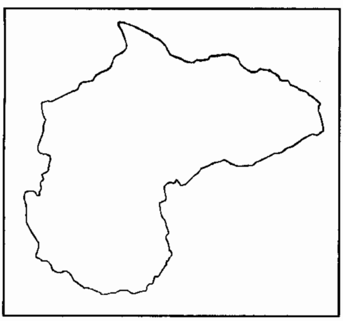


图 25

图 26

理解对称甚至可能是微妙的。如图27a，这个图形可能关于一些轴反射对称，但是如果你不把它转成图27b那样，使得对称轴垂直，那么

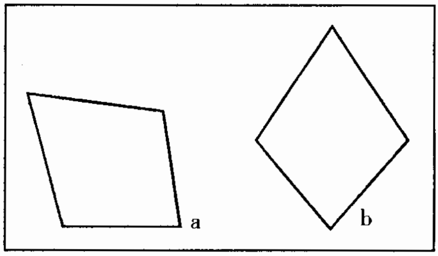


图 27

你可能察觉不到对称。拉特格斯大学的认知科学家伊文·洛克（Irvin Rock）和他的合作者进行了一系列实验，以测试形状感知对方向的依赖。他们尤其希望测试的是，两侧对称的知觉是否依赖于对称轴在视网膜成像是真的对称还是只是设想的对称。研究者使用了如图 28a 所示的一种形状，以之作为他们的标准形状。这种形状无论在垂直反射还是水平反射下都是对称的。实验对象被要求指出，28b 和 28c 的两幅图形中哪一个更像 28a。注意，为了不关于垂直轴对称，图 28b 稍有变化，但是仍保持对水平轴的对称。图 28c 则进行了与图 28b 相反的操作。当实验对象让其头部垂直观察图形时，多数人选择了图 28c。这在意料之中；摩拉维亚-奥地利物理学家和哲学家安斯特·马赫（Ernst Mach，1838～1916）早在 1914 年就注意到，关于垂直轴反射对称的图形首先会被看做是对称的。然而，出人意料的是当观察者倾斜 45 度时，他们仍然选择图 28c 更像图 28a，即使在该方向上图 28b 或图 28c 都不能保持在视网膜成像上的垂直对称。从这

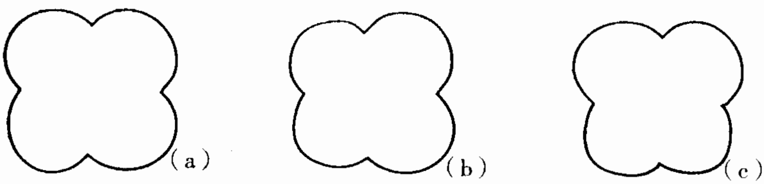


图 28

个实验和其他实验中，洛克总结出“当只有视网膜成像的方向改变时，一个新图形的外观几乎不改变。”洛克发现，图形在其所处环境中的实际方向并不是那么重要，重要的是我们一般习惯把顶、底、左、右分配给图形。这些分配一般依靠其他视觉暗示，如引力的方向或参照物的环

境架构。分配方向扭曲的图形则不易被识别。有趣的是，洛克发现，当唯一发生的变化是左右颠倒时，对于知觉形状的影响最小。这些结果进一步证实了两侧对称在知觉中的首要性。不过，洛克的确承认，甚至当只有视网膜成像的方向改变时，一些形状，如草书单词或肖像，变得难以识别。

尽管在多数情况下对称便于感知，但实际上一种对称性可能诱使眼睛对所看到的事物产生曲解。苏格兰物理学家大卫·布鲁斯特（David Brewster，1781～1868），曾在1816年发明万花筒。当盯着有重复的平移对称风格的墙纸时，他注意到了一些奇怪的东西。莫里斯公司和他们同时代人的多产确保了这种风格在维多利亚时代是普遍存在的。令大卫惊讶的是，他发现，一些这样的设计表面让人感觉从墙壁中“突出”出来，并且令人产生了三维的幻觉，即人所共知的墙纸幻觉或扶梯幻觉，因为墙纸和扶梯都有重复的样式。你可能已经从许多三维立体画软件书和海报中熟悉了这种现象。在20世纪90年代初期，对这些计算机生成的自动立体图①的着迷达到了狂热的程度。这种三体图其实是盯着物体看时眼神相交②而进入三维模式产生的幻觉。图29例证了令人称奇的效果。如果你盯着它约一分钟，就好像你专注地凝视页面后的一个图像，冲浪运动员将奇迹般地物化为三维实体。其原因还不完全清楚，一些人不会觉察到由自动立体图造成的幻觉。因此，如果对于你来说图29没有突然增加深度，请不要失望；你属于例外的群体。三维立体图幻觉

---

① 取一个普通的图像，并向左或向右移动复制该图像，由此形成的三维图像就是自动立体图。所谓“自动”主要是与二维比较而言的。在二维平面中，我们需要使用透视图、阴影、不同的颜色和亮度效果、朦胧和改变尺寸等方法使人们感知深度；但在自动立体图中不需要使用这些工具，所需要的只是采用正确的观察方法，如此即可使普通的图像产生三维效果。

② 这样的方法是看自动立体图的交叉审视法，也称为立体观测法。既然眼睛是分开的，两只眼睛捕捉一个物体的不同视点，角差随着离物体的距离改变而改变。因为两只眼睛看的不是同一点，所以当我们聚焦于物体时，两个视网膜收到了略有不同的图像，这两个图像合而为一就产生了三维效果。

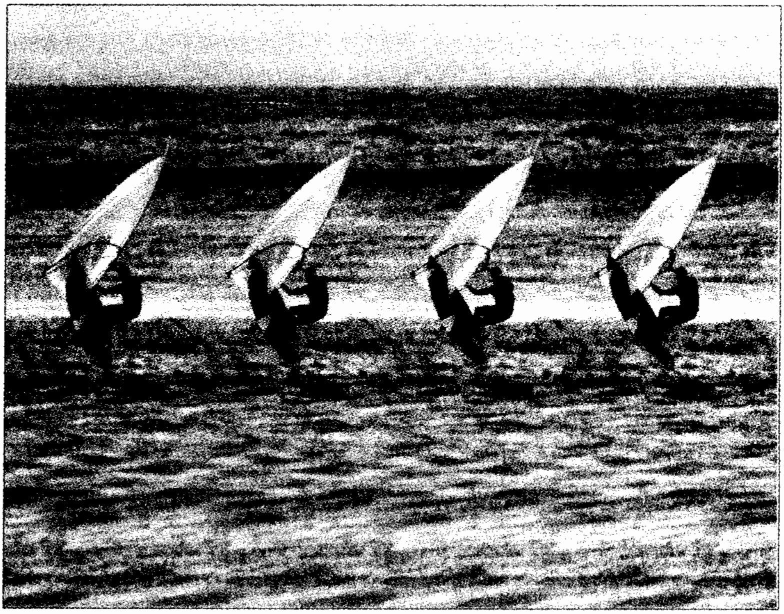


图 29

背后的思想来自匈牙利籍美国心理学家贝拉·居里兹（Bella Julesz）于1959年进行的深度感知研究。居里兹的合作者，史密斯-凯特威尔眼睛研究院的心理学家克里斯托弗·泰勒，在1979年发现，可以使用一种补偿印刷技术来生成单一图像立体图。对于重复样式的魔力的基本解释是相对简单的。让每只眼睛固定在重复图样中邻近的不同目标上，大脑错误地把不同距离的两个物体当作一个物体（图30）。当然，大脑

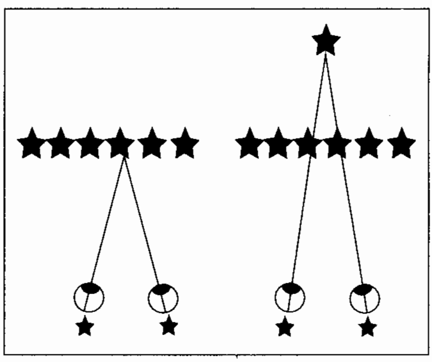


图 30

"失误"的原因是，重复的图形在两个视网膜上产生了相同的图像，造成了单一物体聚焦的印象。

当重复图样间距非常近，并且包括了对比度高的图形时，它可以造成很强的运动幻觉。英国光效应画家布雷吉特·里累（Bridget Riley）在她的作品《秋》（图31）中使用了这种引起幻觉的图样，这些图样弄晕了许多观察者。

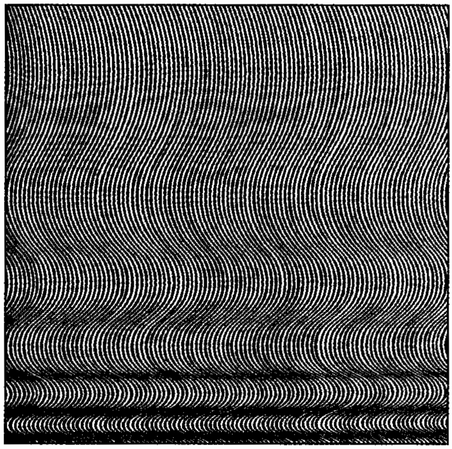


图 31

除了置换对称和保利不相容原理，屹今为止，所有被描述为对称的是形状、形式和配置的对称。它们都是物体在空间中的对称，由特定系统的布置形成，并通过感官察知。我们可以"看"到，一座教堂是两侧对称的，一个墙纸设计是平移对称的，一个圆则是旋转对称的。潜藏于自然界基本规律下的对称较为接近于以上对称，它们不强调外部形式或图形，而是专注于这样一个问题：在我们周围的环境中，可以进行什么操作而让描述所有观察到的现象的规律不变？

游戏规则

什么是自然界的规律？生物学家托马斯·亨利·赫胥黎（Thomas Henry Huxley，1825～1895），达尔文的进化与自然选择理论的最热情的捍卫者，他提供了下面的解释：

棋盘是世界，棋子是宇宙中的诸现象，游戏规则是我们所称的自然规律。另一方的玩家已经隐匿，所以我们无法看见。我们知道他在游戏

中总是公平的、公正的和耐心的。但是我们付出代价后才知道，他从不忽视我们的每一个错误，也不容忍我们的无知。

由那个绰号为“达尔文的斗狗”的人给出的定义缺少现代标准的雄心。当代物理学家希望自然规律不仅代表游戏规则，而且可以解释棋盘和棋子本身的存在与特点！

甚至直到17世纪，人类才想到可能存在一组可以解释世间万物的规律。伽里雷欧·伽利略（Galileo Glilei，1564～1642），莱恩·笛卡儿（René Descartes，1596～1650），尤其是艾萨克·牛顿（1642～1727）首次证明了，一组规律（例如运动和引力规律）可以解释从落下的苹果、海滩潮汐到行星运动的大量现象。

其他人追随他们伟大的脚步。在1873年，苏格兰物理学家詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831～1879）出版了他的《电学和磁学论》——一部划时代的杰作，该书仅使用了四个数学公式就统一了电、磁和光现象。基于英国物理学家迈克尔·法拉第（Michael Faraday，1791～1867）的实验结果，麦克斯韦得以表明，正如使行星在轨道上运行的力和使物体保持在地球表面的力事实上是同一力一样，电和磁是单一物理实质的完全不同的表示。20世纪见证了不仅一种而是两种主要科学演变的诞生。首先，爱因斯坦（Einstein）的狭义和广义相对论永远地改变了空间和时间的意蕴。时间和空间两个概念已经联结为现在叫时空的整体。广义相对论也指出，它就像一块在一枚炮弹的重量作用下下垂的橡胶板一样。引力不是在远处起作用的神秘力，只是被物质弄弯了的时空的一种表示，在这个弯曲的空间中运动着的每一样事物——例如轨道中的行星——都不是沿直线旅行，而是在弯曲的轨道上运转。第二，不同于以往的是，量子力学的引入粉碎了想完全确定世界的希望。在牛顿力学中，甚至在广义相对论中，如果不知出于什么原因你获悉了特定时刻每种单一粒子在宇宙中的位置，即它在那时运动得有多快和朝哪个方向运动，那么你就既可以毫不含糊地预测宇宙的

未来，也可以讲述前宇宙史的完整故事。唯一的限制可能与广义相对论不起作用的少有的情形（如被称为黑洞的崩溃物体）相联系。而量子力学改变了这一切。甚至单一粒子的位置和速率也无法精确地决定。有关宇宙唯一可以确定的是各种结果的概率，而非结果本身。尽管出于不同的原因，但宇宙有点像天气——我们能做得最好的是预测明天会下雨的概率，而不是实际上会下雨与否。上帝确实在掷骰子。

随着相对论和量子力学的发展，对称在自然规律中的作用越来越吸引人的注意。物理学家不再满足于寻找对孤立现象的解释。相反地，他们现在不只相信早就公认的大自然有一种潜在设计，而且他们还认为对称在设计中是关键成分。规律的对称性意味着当我们从不同的视角观察自然现象时，我们发现，这些现象完全由同样的自然规律所掌控。例如，无论我们在纽约、东京还是银河系的另一边做实验，解释这些实验结果的自然规律将采取同样的形式。注意，规律的对称并不暗示实验结果本身必然仍将不变。月球上的重力的力量不同于地球上的，因此，我们看到宇航员在月球上比在地球上跳得高。然而，月球上的重力吸引力取决于月球的质量与半径，这与地球的情形是一致的。这种规律的对称——当从一个地方挪到另一地方时规律保持不变——是一种平移对称。如果没有这种平移对称，那么实际上就不可能理解宇宙。我们可以相对容易地阐释观察到的 100 亿光年远的星系的主要原因是，我们发现那里的氢原子遵循与地球上正好相同的量子力学规律。

自然规律也是旋转对称的。物理学在空间中没有更偏爱的方向——无论我们站直了还是倾斜着，也无论我们是否测量与上、下、南、北相关的方向，随便用什么方法做实验，我们都发现了这个相同的规律。与你可能认为的相比，这较少出于直觉。回忆一下，对于在地球表面进化的生物而言，在上与下之间有清晰的区别。亚里士多德和他的追随者认为，物体下落是因为下落是重的物体的自然归宿。当然，牛顿搞清楚了这个问题，他认为，上与下对于我们似乎是不同的，但这不是因为物理学规律取决于这些方向，而是因为我们碰巧感觉到了我们脚下的相对巨

大的地球的质量。这是一种环境的改变，而非规律的改变。在某种意义上我们是幸运的——平移和旋转对称确保了，不论我们在什么地方，也不管我们如何确定方向，我们都将发现相同的规律。

一个简单的例子有助于我们进一步澄清形状对称与规律对称之间的差异。古希腊人认为，行星的轨道一定是圆的，因为不管怎么旋转，这个形状都是对称的。相反地，牛顿的引力规律在旋转下的对称意味着，轨道可能在空间中有任意的方向（图32）。轨道不一定是圆的；它们可能是椭圆的。事实也的确如此。

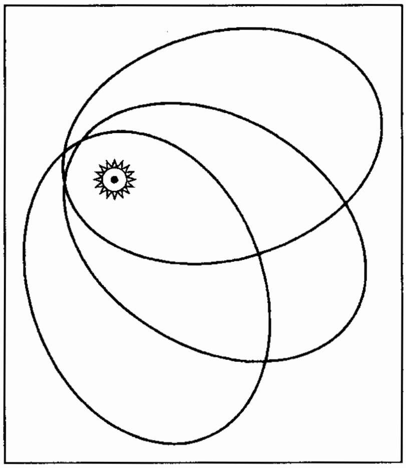


图 32

还有其他更加深奥的让自然规律不变的对称性，在第 7 章我们将回头讨论一些这样的对称性及其重要应用。不过，关键是要记住，对称性是破解大自然设计奥秘的一种最重要的工具。

直到现在，我们对于物体对称或自然法对称的匆忙的研究恰如游客在一个外国的走马观花一样。我们一直能够欣赏风景，但为了获得对文化的更深的理解，我们必须学习该国的语言。因此，让我们来学习贝立兹课程吧。

一切对称之母

对称是科学、艺术和知觉心理学的交叉内容，即使我们只是对对称世界短暂一瞥，这一点已然晶莹剔透。对称代表了转换后维持不变的公式、规律和数学对象的永恒的本质。即使在不同的规律遮掩下难以认出

这些不变的本质的真面目，描述对称性的语言必然可以识别它们。

例如，金融世界的语言是算术运算的语言。如果你想快速地比较两个公司之间的经济实力，你不需要阅读完整的文章内容；只比较一些关键的数字即可。当艾萨克·牛顿用公式表述他的著名的运动规律时，为了能够表达和处理它们，他开辟了微积分语言。有人会说，抽象艺术在20世纪的成就是把颜色转变成一门有意义和感情的语言。尽管形式和其他视觉元素有助于传递色彩之外的信息，但一些画家仍然放弃了对它们的使用。

为了考察对称性的迷宫，数学家、科学家和艺术家通过群论的语言照亮了他们的道路。像一些排外的俱乐部一样，一个数学上的群的特点是其元素必须遵守某些规则。一个数学上的集是任意实体集合，而不管这些实体是一架拆散了的飞机零件，还是希伯来语字母表中的字母，还是一个包括了凡·高（van Gogh）的耳朵，复活节小兔子，所有的阿尔巴尼亚报纸和火星上的天气的怪诞集合。另一方面，一个群是一个必须遵守与某种运算有关的某些规则的集。例如，一个最熟悉的群是由所有的整数（正整数，负整数，和0；即…－4，－3，－2，－1，0，1，2，3，4…）组成的，它与简单的加法算术运算有关。

定义一个群的特点是：

1. 封闭性。任何两个元素通过运算所得结果本身必须是这个群的元素。如在整数群中，任意两个整数的和也是一个整数（如，3＋5＝8）。

2. 结合律。运算必须是可结合的——当（通过运算）结合三个有序的元素时，你可以将它们中的任意两个首先进行结合，结果是相同的，不受括号的影响。例如，加法是可结合的：（5＋7）＋13＝25和5＋（7＋13）＝25，其中圆括号，“数学中的标点符号”，暗示了你首先加哪一对。

3. 单位元。群必须包含一个单位元，在与其他元素结合时，单位元使其他元素不变。在整数群中，单位元是数字0。例如0＋3＝3＋0＝3。

4. 逆元素。对于群中的每一个元素都存在一个逆元素。当一个元素与其逆元素结合时，结果为单位元。对于整数，任何数字的逆元素是具有与原元素绝对值相同、符号相反的数字：例如，4 的逆元素是－4，而－4 的逆元素是 4；4＋(－4)＝0，并且(－4)＋4＝0。

由这个简单的定义可以产生一种包含和统一了世界上所有对称性的理论，这个事实一直令数学家吃惊。正如伟大的英国几何学者亨利·弗莱德瑞克·贝克尔（1866～1956）曾经说的：“非常丰富、非常伟大的思想可能源自非常微不足道的开始。”著名的数学学者詹姆斯·R·纽曼（James R. Newman）已经将群论称为“数学抽象的顶尖艺术”。由其定义所提供的充满智慧的适应性，群论获得了令人难以置信的力量。就像我们在本书后面所要看到的那样，一个群的元素可以是任何事物，这些事物从宇宙基本粒子，不同的洗过的纸牌的对称性到全等三角形的对称性，等等。其元素间的运算可以像加法算术运算（就像前面的例子）一样平常，也有稍微复杂一点的，像“伴随”的两种对称变换运算（如在通过一个角旋转中伴随通过另一个角的旋转）。

当不同的变换（如旋转和反射）被连续应用到一个特别的对象时，或者当一个特别的运算（例如加法）将不同的对象（例如数字）拼在一起时，群论解释了什么将会发生。这种分析揭示了最基本的数学结构。因此，当股票市场分析师或基本粒子物理学家在识别模式中遇到难以克服的困难时，他们偶尔把群论的形式主义与其他学科相结合，并且从中借用工具处理相似的问题。

为了得到在群论和对称性之间联系的一种模糊概念，我们还是从人体对称的简单例子出发吧。只有在两种对称变换时，人体几乎仍然不变。第一种是恒等变换，它使每一样事物如本来一样，并因而成为一种精确对称。第二种是关于一个垂直平面的反射——（大约的）两侧对称。我们用符号 I 表示恒等变换运算，符号 r 表示反射变换运算。因此，人体所有对称变换的集仅仅包括两个元素：I 和 r。如果我们连续地使用这些变化，会发生什么？在反射变换后进行恒等变换与只进行反

射变换是没有区别的。我们可以用符号将此表达为：$I \circ r=r$，其中符号 $\circ$ 表示“伴随”。注意，顺序总是这样的，即右边第一个符号是先应用的变换，接着是其他变换。因此 $a \circ b \circ c$ 意思是先应用 c 变换，接着是 b，最后是 a。

既然第一个反射变换互换了左和右，而第二个变换互换了右和左，那么连续应用两种反射变换将使人体回到起始状态。因此，在 r 变换后再接着一次 r 变换与恒等变换 I 是相同的：$r \circ r=I$。

现在我们希望为两种对称性建立一个像乘法表那样的表，表中行 I 和列 r 的条目是 $I \circ r$，等等。单词乘法用在此处松散地代表在两种变换之间的运算（在此情况下为“伴随”）。

$\circ$	I	r
I	I	r
r	r	I

乘法表揭示了一个重要的真理：人体的所有对称变换集是一个群！让我们检查一下，群定义中的特点是否确实都得到了满足：

1. 封闭性。乘法表证明了，经过“伴随”运算的任意两种对称变换的结合也是一种对称变换。想想，其实这不足为奇。既然任何两种变换使图形保持不变，那么它们的结合也是如此。

2. 结合律。这显然满足，因为对于任何三个这种经过“伴随”结合在一起的变换，结合律都是正确的。的确，当我们使用比如说$I \circ r \circ r$时，无论我们如何把它们括起来，结果都绝对没有差别。

3. 单位元。恒等变换是一种对称变换。

4. 逆元素。乘法表显示了，恒等变换和反射变换的每一个都可以充当自身的逆元素——将它们的任一个应用两次都给出了恒等变换：$I \circ I= I$和$r \circ r = I$。

人体对称群只包括了两个基本元素，但是我们发现，对称性与群之

间的关联是很强的。为了选择一个稍微丰富点的例子，看一下图 33 中三条奔跑的腿的形状。这是在爱尔兰海中不列颠马恩岛①的象征。

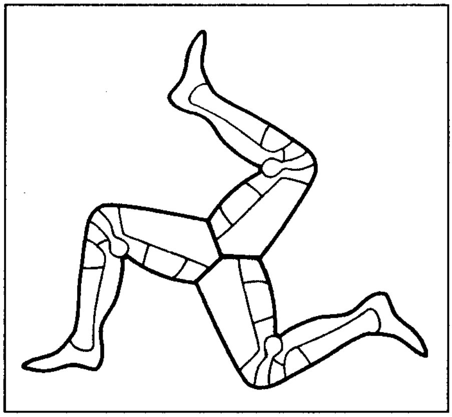


图 33

这个形状正好有三种对称变换：①围绕中心做 120°的旋转；②旋转 240°；③恒等变换（或旋转 360°）。注意，在任何形式的反射下图形都不对称，因为反射使脚错位。我们可以用 a 表示 120°的旋转，用 b 表示 240°的旋转，用 I 表示恒等变换，再看看当我们通过"伴随"运算（以符号∘表示）把对称变换结合起来时，会发生什么。如果我们旋转 120°后再旋转 120°，那我们就得到了 240°的旋转；意味着 $a \circ a=b$。相似地，如果我们旋转 240°两次，其结果与旋转 120°相同，因为 480°等于一个完整的旋转（360°＝恒等变换）＋120°。因此，我们有 $b \circ b=a$。最后，旋转 240°后再跟着旋转 120°（或者先旋转 120°再跟着旋转 240°），造成了一个 360°的旋转，或者恒等变换：$b \circ a=a \circ b=I$。我们在此时完成了"乘法表"：

∘	I	a	b
I	I	a	b
a	a	b	I
b	b	I	a

我们发现，三条奔跑的腿的对称变换集也

① 马恩岛（Isle of Man）是一个独立于英国联合王国的自治独立地区，只有国际事务和外交事务由英国统一掌管，拥有自己的国旗、国歌与国徽，法院具有终审权。有时可意译为男人岛。男人岛源自一个美丽的传说。传说最先开发荒岛的都是男人，他们最先生活在北欧大陆上，一年半载才能回家与妻儿老小欢聚一次。直等到把岛开垦得差不多了，才将妻子儿女等接到岛上共同生活。"男人岛"的名字记载着男人的艰辛，让后代的女人们永远不要忘记男性祖先们在这片土地上撒下的辛勤汗水。

形成了一个群。上表证明了封闭性，并且 a 和 b 的变换是互逆的——在一种变换后接着另一种变换使表格恢复原状，这也就是恒等变换时的情景。

你可能开始注意到，群会突然出现在对称存在的任何地方。事实上，任何系统的所有对称变换集总是形成一个群。这易于理解。如果 A 是一种对称变换，B 是另一种对称变换，那么显然 $A \circ B$（A 伴随 B）也是一种对称变换。而且，每一种变换有一个逆变换，逆变换使事物回到最初状态。正如我们在本书中看到的，群论的统一力是如此巨大，以至于数学史家艾力克·特姆普勒·贝尔（Eric Temple Bell，1883～1960）曾经评论道："无论何时，群本身揭示了，或者可以被引入，以及可以脱胎于比较混沌的简单。"

然而，不像大多数数学理论，当发现群的概念时，没人寻找一个群论，甚或一个对称理论。恰恰相反；群论出现得有点偶然，在长达千年寻找一个代数方程的解的过程中产生了群论。与它作为一个化混沌为简单的概念的描述相适应，群论本身产生于数学史中最喧嚣的故事之一。在 19 世纪群论问世时，近四千年来掺夹着阴谋、不幸、迫害的求知欲和斗争便嘎然而止。这个编入下面三章的令人惊奇的故事，开始于尼罗河与幼发拉底河河畔数学的拂晓。

第三章

在你的方程式中永远不要忘记这一点

1931 年 2 月 16 日在加利福尼亚技术学院所做的题为“科学与幸福”的演讲中，阿尔伯特·爱因斯坦谈到：“对于人类自身及其命运的关注组成了所有技术努力的主要目标……为了使我们大脑的创造对人类是一种福祉而非灾祸。在你的图中和方程式中永远不要忘记这一点。”甚至连爱因斯坦本人都未能料到，这个警告性预言怎么就于不足十年后，在第二次世界大战的黑暗日子中和大屠杀的恐怖中成为现实。不过，在历史上数学方程式的出现的确只是为了造福人类。解出第一个方程式的人只打算处理日常琐事。

“US”与“AHA”

在公元前 4000 年的一段时期，在底格里斯河与幼发拉底河之间的美索不达米亚地区兴起了第一批苏美尔城邦。在这个地区发现的几乎 50 万块楔形文字泥板和其他考古文物讲述了一个拥有有组织的农业、迷人的建筑、震荡的政治以及充满文化气息的社会的故事。后来，像今天一样，这块肥沃的土地容易受到各方侵扰，从而造成人口的频繁变更。在衰落后几个世纪，在阿卡德国王萨尔贡一世（Sargon Ⅰ，公元前 2276～2221）之前，闪米特-亚摩利人占领了苏美尔的土地，并且在商业城市巴比伦建立了他们的首都。因此，在大约公元前 2000 年到公元前 600 年之间，整个地区的文明一般指“巴比伦文明”。巴比伦社会的快速发展需要供应品和商品分配的大量记录。为了商业交易，为了涉及土地分割的农业工程，为了决策，也为了计算根据的需要，巴比伦人最后发展

了当时最复杂的数学。楔形文字泥板的核心内容证明，巴比伦人不仅掌握了许多算术运算，他们实际上还期望更先进的代数。既然方程对于群论的历史是最相关的部分，那么这里我将只聚焦于“方程”的出现。我把单词“方程”加引号的原因是，巴比伦人并没有真正地使用了和我们今天相同的代数方程概念。相反地，他们在普通的谈话中从修辞上陈述问题和解决问题。换句话说，恰当的口头说明解决了一个又一个的问题，但是未曾见到模式或公式成为解决问题的一般程序。

毫无疑问，这些数学问题首先出现在如分割许多土地这样的社会所需要的文章中。甚至当不涉及测量时，对于要解决的未知量人们所使用的单词是 *us*（长度），*sag*（宽度）和 *asa*（面积）。

人们可以用公式表示的最简单的方程是所谓的线性方程（当作图时，以直线代表它们）。在现代符号中，线性方程是类似 $2x+3=7$ 的方程，其中 x 代表未知数。解一个方程就是要找一个使方程正确的 x 值（在上面的例子中，既然 $2\times2+3=7$，那么解是 $x=2$）。几个泥板包括了需要用线性方程解决的问题。

有时为了找到答案，人们需要解两个未知数。例如，假设 1/4 的宽加长等于 7 手（长度单位），而且长加宽等于 10 手，那么在这个问题里宽和长的值是要求的。运用我们在学校里学到的代数知识，如果我们以 x 表示长度，以 y 表示宽度，那么这个问题就可以转化为由两线性方程组成的方程组：$1/4y+x=7$，$x+y=10$。巴比伦人正确地指出，一个 6 手的长度（或 30 手指，1 手等于 5 手指）和一个 4 手（20 手指）的宽度满足这两个方程（在附录 2 中，我为感兴趣的读者提供了一个简要的提示，告诉读者如何解这样的方程组）。

线性方程在古埃及甚至起着更杰出的作用。显然巴比伦人发现它们太基本了，所以不值得详细记载。我们的许多埃及知识源自迷人的阿米斯纸草书。这本巨大的纸草书（大约 18 英尺长）目前保存在大不列颠博物馆中（在布鲁克林博物馆的一本医学论文集中出人意料地发现该书，只是有几处残破）。苏格兰埃及古物学者亚里山大·亨利·林德

（Alexander Henry Rhind）于 1858 年购得该纸草书，该纸草书随后经常被称为林德手卷（图 34）。根据书记官阿米斯（Ahmes）自己的证言，他大约在公元前 1650 年从写于更早几百年（在第十二王朝法老阿蒙涅斯三世统治时期）的原始文献中抄写了该纸草书。英国科学家达西·汤普森（D'Arcy Thompson）将该纸草书描述为“古代学问博物馆之一”，该纸草书包括了 87 个问题。这些问题之前是分解的“处方”表和绪论。绪论有点夸张地将该文献描述成“通往所有存在事物和所有模糊且秘密的知识入口”。另一方面，阿米斯提出和解决的问题，多是处理从公平分割面包到金字塔斜坡的各种实际问题。未知数称为 *aha*，意思是“堆”。例如，问题 26：*aha* 与它的 1/4 相加等于 15，求 aha 的值。在现代观念里，我们可以将该问题明确地表达为方程 $x+1/4x=15$，正如阿米斯所正确找到的，该方程的答案是 $x=12$。

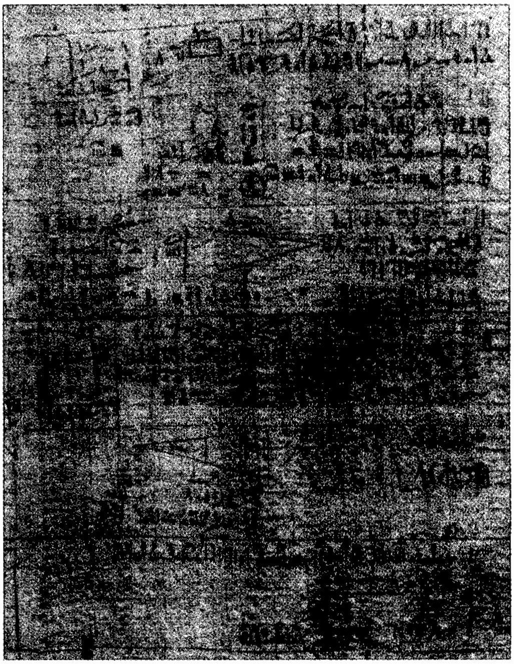


图 34

在阿米斯纸草书中，不是所有数学问题都陈述了那个时代迫切需要解决的问题。一些问题显然只是介绍给学生，供其练习之用，至少有一个问题纯粹出于它的趣味而被选入。问题 79 是：“房间 7，猫 49，老鼠

343，斯佩耳特[1] 2401，海克特 16807，总计 19607。”显然，十分有趣的阿米斯在此描述了一个难题，其中，7 个房间中的每一个有 7 只猫，每只猫吃 7 只老鼠，每只老鼠会吃掉 7 穗小麦，每穗小麦会生产 7 海克特（度量单位）粮食。本题中所求的未知数是总数，即所有房间、猫、老鼠、斯佩耳特和海克特的总数，这个总数显然没有实际意义。许多人已经揣测，这个古代的脑筋急转弯在经过许多世纪后被改造成另外两个著名难题。在 1202 年，著名的意大利数学家比萨的列昂纳多（Leonardo，绰号斐波那契；生活在公元 1170～1240）出版了一本题为 Liber abaci(《算盘书》) 的书。在这本书中，他构造了一个问题：“7 个老太太正旅行到罗马，每个老太太有 7 头骡。每头骡上有 7 个袋子，每个袋子中有 7 块面包，每块面包中有 7 把小刀，每把小刀有 7 把鞘。求它们一共有多少。”

又过了 500 年后，在 18 世纪的童谣集《鹅妈妈》中，我们发现：

当我要去圣艾芙的时候，
我遇见了一位有 7 位妻子的男子。
每位妻子有 7 个袋子，
每个袋子有 7 只猫儿，
每只猫儿有 7 套用具；
用具，猫儿，袋子和妻子，
有多少个要去圣艾芙？

这首童谣真的受到 3000 多年以前的阿米斯纸草书的激发吗？难以置信。注意，凑巧的是童谣难题的答案，既可是一个（讲述者；所有其他的来自圣艾芙），也可以是另一个，（讲述者不属于“用具，猫儿，袋子和妻子”的集合），就看你如何解释。像这种每个连续的数字都通过

① 一种小麦。

同样的乘数加倍的几何序列，总是吸引着人们。而且，无论东方传统还是西方传统，精神质量总是与数字 7 相连（例如，一周有 7 天，日本有 7 个幸运大神，7 种不可饶恕的罪行）。因此，这三个难题可能是三个富有想象力的人在不同世纪的独立创造。

如何解决线性方程的知识并非中东专有。令人印象深刻的中国算集《九章算术》编撰于公元前 206 年到公元 221 年之间，并且它是基于一本更早的算集。在《九章算术》的第 8 章中，我们发现了涉及不少于 3 个未知数、3 个线性方程的问题，所有这些问题都解答得很漂亮。

按照代数方程的复杂性来说，下一个更高水平的代表是二次方程。在这样的方程中，其特别复杂之处在于未知数 x 出现了平方项，如在 $3x^2+x=4$ 中的未知数。对于新手而言，这看起来可能不像一种极大的变化，然而解二次方程实际上比解线性方程更复杂。尽管这听起来让人不可思议，但在 2003 年英国国会里，一般方程，尤其是二次方程的主题却成了激烈争论的内容。在学校课堂上的一次精彩演讲中，议员托尼·麦克瓦尔特（Tony McWalter）解释道：

> 为什么一个人会对一个方程中的 x 与 y 充满兴趣？答案是这样的：如果一个人不努力看到 x 和 y 隐藏了什么，这个人将不会对科学有任何真实的理解……为什么一个人应理解二次方程和解二次方程的原理？恰如罗马熔炼术是其建筑文化的关键一样，二次方程及其解的原理支撑了现代科学。

无论如何，你可能想知道，谁是第一个产生公式化的需要，并解出了这样的方程的人？

公众的保护者

在犹太人的民法与宗教法密码——《塔木德》① ——中，我们发现了一个统领②的故事，一笔巨额罚款被强加到他头上。他不得不用小麦填充一个具有 40×40 基本表面的谷仓。这个不幸的人去找拉比③胡纳（Huna，公元 97～212），征求他的建议，胡纳时为巴比伦尼亚苏拉学院

---

① 《塔木德》（Talmud）一书是犹太人继《旧约圣经》之后最重要的一部典籍，又称犹太智慧羊皮卷，或犹太 5000 年文明的智慧基因库，是揭开犹太人超凡智慧之谜的一把金钥匙。《塔木德》在世界上广泛流传，大约被译成 12 种语言。尤其是犹太人人手一册，从生到死一直研读，常读常新。它不仅教会了犹太人思考什么，而且教会了他们如何思考。它用一种始终如一的声音，构建了犹太人的世界观。它宛如一位和蔼可亲的朋友或思想深邃的学者，始终和每一个犹太人进行交谈和讨论，并穿透琐细的生活，让人感觉到鲜活的智慧和触及万物的力量。

《塔木德》全套 20 卷，总计 12000 页，250 万字，内容庞杂，卷帙浩繁，头绪纷纭，大至宗教、律法、民俗、伦理、医学、迷信，小到起居、饮食、洗浴、着衣、睡眠等无所不包。它以《旧约圣经》的箴言为开端，接着是神话故事、诗歌、寓言及道德反省和历史回忆，题材广泛，内容鲜活生动，虽然其中三分之一是米德拉西，即训试和道德说教，但让人丝毫不觉得生硬和僵化。如果说《旧约圣经》是一部永恒的书，那么《塔木德》则是犹太人日常生活的伴侣，充满着生命的智慧和应付危机的良谋。它不是史书，却在谈史；它不是人物志，却在述说人物；它不是百科全书，却包罗万象。正是它孕育了西方文明的模式，成为犹太智慧的源泉。与《圣经》、柏拉图的《理想国》、亚里士多德的《政治学》和伊斯兰的《可兰经》，并称为影响人类文明的巨著，是真正的传世经典。

② 一个犹太人社区的世俗首领（exilarch）。

③ 犹太教中负责执行教规、律法并主持宗教仪式的人。原意为教师，即口传律法的教师。古代原指精通经典律法的学者，此处即指学者。2～6 世纪曾作为口传律法汇编者的称呼。后在犹太教社团中，指受过正规宗教教育，熟习《圣经》和口传律法而担任犹太教会众精神领袖或宗教导师的人。自耶路撒冷圣殿被毁后，拉比遵循法利赛派著作精神，根据口传律法经典及评注文献观点，逐步演绎出一整套敬神做人的准则。以此规范的犹太教亦称拉比犹太教。拉比在犹太教各派内的职责是主持礼拜，参加婚礼、受诫礼、丧礼、割礼等；讲解教义，劝导信徒，督察青少年宗教教育；出席律法裁判庭，审理私人身分法案件。现代拉比还参与社会和慈善工作。以色列设有拉比院，有两位大拉比，分别代表西班牙系和德系犹太教。

的校长。胡纳告诉他："说服他们（分两部分）从你那里取：现在给他们一个 20×20 表面的小麦，过一段时间再给他们另外的 20×20 部分，那么你将赢利一半。"当然，一个具有 40 单位边长正方形的面积是 40×40=1600 平方单位，而两个 20×20 的正方形面积加起来只有 800 平方单位。在这里拉比胡纳利用了古代常犯的一种错误——认为一个图形的面积完全取决于它的周长。例如，希腊历史学家波里比乌斯（Polybius，公元前 207～公元前 125）告诉我们，当时许多人不相信有一个视距为 48 的围墙的斯巴达，其容量可能是周长为 50 视距的麦加罗城的 2 倍。图 35 代表了一个简单的例子，它证明了一个具有较小周长的图形怎么可能有一个较大的面积。伸长的长方形有一个 2×(100+10)=220 单位的周长和一个 100×10=1000 平方单位的面积。较短的长方形有一个较小的周长，2×(50+40)=180 单位，然而它有两倍的面积，50×40=2000 平方单位。希腊数学家普罗克拉斯（Proclus，公元 85～410）指出，甚至到了 5 世纪，某些城邦的成员仍习惯于欺骗他们的公民，他们所用的方法就是给这些公民相比自己周长较大而面积较小的土地。更糟糕的是，这些恶棍使用这种方案赢得了慷慨的声誉。

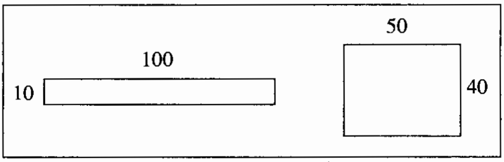


图 35

让我们暂时检查一下，在解决这种周长-面积混淆时所要考虑的问题。假定我们有一个周长 18 单位的长方形。如果我们以 x 表示它的长，以 y 表示它的宽，那么 $x+y=9$（既然周长是由两倍的长和两倍的宽组成的）。进一步假设给定 20 平方单位的面积。即，$xy=20$（面积是长×宽）。因此，我们得到含两个未知数的方程组：

$$x+y=9$$

$$xy=20$$

解此问题的一个直接的方法是，将未知数 y 从第一个方程中析出（通过在方程两边减去 x），$y=9-x$，并且把这个 y 的表达式代入第二个方程：$x(9-x)=20$。如果我们现在对左边相乘，即可得到二次方程 $9x-x^2=20$。许多通向二次方程的巴比伦问题广泛地采取了这种一般式。例如，在大不列颠博物馆 13901 号泥板中的问题 2 是："我从我的正方形的面积减去边长得 870。"这符合二次方程 $x^2-x=870$。因此，我们推测，为了保护公众不受操纵者和规划土地的窃贼的伤害，尽责的巴比伦数学家将二次方程公之于众。这些数学家如何发现二次方程的解仍是个谜，尽管巴比伦人总是极其详尽地讲清解的过程步骤，他们却从未告诉我们他们如何得到了该过程。

古代埃及人只能处理最简单的类似 $x^2=4$ 的二次方程，但是不能处理既包括 x^2 又包括 x 的"混合"方程。什么是 $x^2=4$ 的解？她是 4 的平方根，以$\sqrt{4}$表示。既然 $2\times2=4$，那么一个明显的答案是 2。这个答案是所有埃及人在乎的，既然假定数字代表诸如长度或面包块的量，那么它一定是正的。然而，方程 $x^2=4$ 确实有第二个较不显然的答案：-2。当一个负数被第二个负数相乘时，结果是一个正数。换句话说，$(-2)\times(-2)=4$，因此，方程 $x^2=4$ 有两个解：$x=2$ 和 $x=-2$。这第一次暗示了，二次方程可能有两个不同的解，而不是只有一个解。尽管巴比伦人知道如何解混合的二次方程，但既然未知数一般代表长度，他们仍然只对正数解感兴趣。他们也避免发现两个不同的正数解的情况，因为这会打击他们，他们认为这在逻辑上是荒唐的。

尽管希腊数学家具有极好的数学能力，但早期他们首先专注于几何与逻辑，而对代数注意得相对较少。对于形状与数字，则一直到 17 世纪，卓越的数学家才对它们有了清晰理解。伟大的亚历山大的欧几里得，其里程碑式的著作《几何原本》（出版于大约公元前 300 年）奠定了几何学的基础，该书中也只间接地提到了二次方程。他通过寻找长度的公理化方法从几何上解出了这些方程，所用的方法实际上是二次方程的解法。数世纪后阿拉伯数学家进一步扩展了这种几何代数学。

代数学之父

伟大的亚历山大希腊学派在两次黄金时代培养了众多杰出的数学家。虽然屡经兴衰，亚历山大里亚城，它的学校（以博物馆著称）和相关的图书馆，因为保存 70 万册书（许多书是从不走运的旅行者那里没收的）而赢得声誉。它们持续了几乎 700 年。亚历山大学派最有创造性的思想家之一是丢番图（Diophantus），有时将其称为“代数学之父”。丢番图生活的细节是那么朦胧，如同罩上了一层纱布，以致我们甚至不能肯定知道他生活在什么世纪，只知道他生活的时代为公元前 150 年到公元 270 年之间（既然他引用了数学家海普西克利斯［Hypsicles］的著作，而后者生活在约公元前 180 年到公元前 120 年。而劳笛西亚主教阿纳托利厄斯［Anatolius］，也提到了他，阿纳托利厄斯大约在那一年就职）。尽管不能排除他生活在更早的一个世纪，但一般仍假定丢番图活跃在大约公元 250 年。我们主要通过丢番图的主要著作《算术》来了解他的独创性工作，《算术》起初有 13 部。只有在希腊的 6 部保存在亚历山大里亚图书馆而幸免于 7 世纪穆斯林的冲击。1969 年奇迹般地发现了另 4 部阿拉伯译著（归功于 9 世纪的数学家昆斯塔·伊宾·卢加［Qusta Ibn Luqa］）。

尽管丢番图被尊为“代数学之父”，但《算术》中的大部分内容论述的是数论问题。然而，丢番图肯定代表了代数学演变中的一个关键阶段，他在巴比伦人的纯理论风格与我们今天使用的方程的符号表述（例如 $2x^2+x=3$）之间起着承上启下的作用。1463 年，德国数学家与天文学家约翰尼斯·雷奇奥莫塔努斯（Johannes Regiomontanus）由衷表达了他对《算术》的钦佩之情：“在这些古老的书中，全部算术的绝对精华就潜藏在“事物”和列举的艺术（指带未知数和算符的方程）中，今天我们按照阿拉伯名字“代数学”来称呼它。”在丢番图对许多问题的解法中，他显示了不可思议的创造力和技巧。不过，他只考虑了正数答

案，甚至在正数答案中也只考虑了能表达为整数（如 1，2，3，…）或者分数（如 2/3，4/9，5/13；概括起来，整数加分数就是人们所知的有理数）的。作为丢番图独创性的一个例子，如第一本书中的问题 28："寻找两数和与平方和给定的数。"显然，这是一个有两个未知量（两个数）的问题。然而，丢番图通过高超的技巧将未知数从两个减少到一个，并且因之得到了一个简单的方程。（我为感兴趣的读者在附录 3 中陈述了丢番图的解法）《算术》十分清楚地表明，丢番图知道如何解三种类型的二次方程：$ax^2+bx=c$（其中，a，b，c 是给定的正数，如 $2x^2+3x=14$）；$ax^2=bx+c$；还有 $ax^2+c=bx$。这些正好是 5 世纪后阿拉伯数学家修订的方程类型。

现在，丢番图因一类特别方程而最副盛名，这类方程具有他的名字——丢番图方程——使丢番图负有盛名的还有他的非同寻常的墓志铭。丢番图方程之所以真的怪诞，是因为表面上它们似乎接受任何数字作为一个解。例如，方程：$29x+4=8y$。对于什么 x 值和 y 值，方程是正确的呢？如果我们选择，比如说，$y=5$，我们得到 $x=36/29$。如果我们选择 $y=1$，我们得到 $x=4/29$，等等。对于 y，我们有无穷多的值可以选择，并且对于任何我们碰巧选择的 y 值，我们都能找到一个满足方程的相应的 x。使丢番图方程特别的是，我们实际上必须寻找最合适的使 x 与 y 同时为整数（如 1，2，3，…）的解。这就直接限制了可能的解，从而很难找到这样的解。你能发现上述丢番图方程的一个解吗？（如果不能，我在附录 4 中给出了它）

历史上最著名的丢番图方程是被称为费马大定理的那个方程，皮埃尔·德·费马（Pierre de Fermat，1601～1655）的著名陈述是，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有整数解，其中 n 是任何大于 2 的数。当 $n=2$ 时，有许多解（事实上是无穷多解）。例如，$3^2+4^2=5^2(9+16=25)$；或者 $12^2+5^2=13^2(144+25=169)$。不可思议的是，当我们把 n 从 $n=2$ 变为 $n=3$ 时，没有整数 x，y，z 满足 $x^3+y^3=z^3$，并且对于任何其他大于 2 的 n 结果也是如此。在正急切阅读的丢番图第二部的边上，费马适当地写下

了这个特别的宣告——后人花了至少356年才加以证明。

一本6世纪的被称为《希腊诗文选》① 的集子包括了6000首短诗。据推测，其中一首为我们提供了一份关于丢番图生活的罕见记录：

> 上帝给予的童年占六分之一，又过十二分之一，两颊长胡，再过七分之一，点燃起结婚的蜡烛。五年之后天赐贵子，可怜迟到的宁馨儿，享年仅及其父之半，便进入冰冷的墓。悲伤只有用数论的研究去弥补，又过四年，他也走完了人生的旅途。

丢番图的生活故事已经被缩减为一个线性方程，这是他从不感兴趣的方程类型，这个事实可能有点冒犯了丢番图。如果诗中描述正确，那么他活了84岁。

知道了7世纪的巴比伦人、希腊人，尤其是印度数学家已经知道怎样解各种类型的二次方程，现在我们就不会惊讶于将这类方程视为初等代数的一部分。一个二次方程的最一般的形式是：$ax^2+bx+c=0$，其中a，b，c可以为任何数（a不能为0，否则方程就不是二次方程）。真正的问题是，是否存在某个通用的解法或公式，以便每次通过它给出方程的解。你可能对中学代数有模糊的记忆，这样一个公式确实存在。即：

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

尽管它表面上令人惊惶，但它真的是一个简单的公式，将给定的数a，b，c的值代入该式，立即可产生使方程正确的x值。例如，假定我们需要解方程：$x^2-6x+8=0$，其中$a=1$，$b=-6$，$c=8$。所有我们要做的就是，把a，b，c这些值代入上面的公式，我们会得到两个可能的解：

---

① 大部分为语法学家梅特罗多勒斯（Metrodorus）所辑，其中46首短诗与代数问题有关。

$x=2$ 或 $x=4$（符号“±”意味着，我们选择“+”得到一个解，选择“−”得到另一个解）。

随着亚历山大学派的衰落和萧条，欧洲数学似乎已经进入近一个世纪的冬眠期。印度和阿拉伯地区接过了让数学（事实上也是一般科学）复活的接力棒。因此，从丢番图到二次方程的现代解的路径经过了非欧洲数学家。印度数学家兼天文学家婆罗摩笈多（Brahmagupta，598～670）设法解出了几个令人印象深刻的丢番图方程，还首次解出了涉及负数的二次方程。他认识到负数最频繁地出现在货币交易中，并把这样的数称为债务。依据同样的精神，他称正数为“财富”。因此，正数和负数相乘或相除的规则被表述为：“两份债务的乘积或比率是一份财富；一份财富与一份债务的乘积或比率是一份债务。”

图 36

实际上给了代数学名字的那个人是穆罕默德·伊本·穆萨·阿尔-花拉子米（Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi，780～850；图 36 显示他出现在一张前苏联邮票上）。他在巴格达编辑的那部书——Kitab al-jabr wa al-muqabalab（《还原与配平的压缩书》）——在许多世纪后成为方程理论的同义词。从该书标题中的一个单词（al-jabr）引申出单词“algebra①”。甚至单词“algorithm②”源自对阿尔-花拉子米名字的一种变换，今天algorithm指通过遵循一连串程序步骤解一个问题的任何特别方法。尽管

① 意思是代数学。
② 意思是算法。

阿尔-花拉子米的书依其内容来看并无特别的突破，但第一次以对称的方式揭示了二次方程的解法。单词“al-jabr”意思是“复原”或“完成”，指将负项从方程一边移到另一边，如（通过两边加 $4x^2$）将 $x^2=40x-4x^2$ 转化为 $5x^2=40x$。

在精彩的喜剧、受欢迎的骑士传奇《堂吉诃德》中我们发现，正骨医生因其从事复原工作被称为“algebrista①”。

直到 12 世纪，第一本包括了最一般二次方程的全部解的书才出现在欧洲。作者是折衷主义的西班牙犹太数学家亚伯拉罕·巴西亚·哈-纳西（1070～1136；“哈-纳西”意思是“首领”）。好像为了提醒我们关于二次方程的早期渊源，该书的标题是：Hibbur ha-meshihah ve-ha-tishboret（《论测量与计算》②）。亚伯拉罕·巴西亚解释说：

> 谁要想正确地学习测量面积和分割面积的方法，他就必须彻底地理解几何与算术中有关测量的一般原理……剩余。如果他已经完全掌握了这些思想，他……永远不会偏离真理。

这终结了阿拉伯数学家充当数学守护神的漫长时期。在古巴比伦时期后的 3000 年里，进步一直是唯一增加的。然而，随着文艺复兴的巨大知识觉醒，重心将要移向北意大利，随后是其他欧洲国家。人类学家发现了古希腊的作品，并且鼓励钻研希腊积聚起的包括数学在内的知识。当手稿复制成为一个主要工业（根据一份报告所说，有影响力的佛罗伦萨银行家柯西莫·德·美第奇［Cosimo de Medici］雇佣了 45 个抄写员），活字印刷术的发明便是唯一可以预期的了，接踵而来的是科学知识的倍增。

在二次方程的相对安静和相对迟缓的历史中，没有什么迹象预示，

---

① 西班牙语，也起源于 aljabr，意思是接骨者，即恢复骨折或脱臼的人。

② 按英文意译，但也有称之为实用几何学的，不过这与英文似乎相去甚远。

在方程解的下一阶段将是特别戏剧性的。然而，这只是暴风雨前的平静。下一章就开始讲解方程的戏剧性阶段。

三次方程

处理面积的问题造成了二次方程（因为一个长度与另一个长度相乘，乘积是一个长度的平方），与其方法相同，像立方体这样的固体体积（长×宽×高）的计算导致了三次方程。最一般的三次方程有 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的形式，其中 a，b，c 是任意给定的数（a 必须是非 0 的数）。所有有抱负的解方程者的目标是清晰的：找一个与二次方程的解相似的公式，只要代入 a，b，c，d，即可给出想要的解。古代巴比伦人确实造了一些表，这些表可以解一些非常具体的方程，在 12 世纪波斯诗人、数学家奥马·海亚姆（Omar Khayyam）提出了适用于更多三次方程的几何解。然而，直到 16 世纪，一般三次方程的解挑战着数学家。一直有人做着尝试。3 位著名的佛罗伦萨代数学家，15 世纪的梅斯特罗·贝内迪托（Maestro Benedetto）和他的两位 14 世纪的前辈梅斯特罗·比亚基奥（Maestro Benedetto）和安东尼奥·马辛（Antonio Mazzinghi）已经花费了很大的力气理解三次方程及其解。然而，对于三次方程而言他们的努力是不够的。14 世纪的数学家比萨的梅斯特罗·达尔迪(Maestro Dardi)也为不少于 198 个不同类型的方程提供了独创性的解——但不是一般的三次方程。甚至文艺复兴时期著名的画家皮埃罗·德拉·弗兰西斯卡（Piero della Francesca），也是一位有天分的数学家，他也努力致力于寻找一种解。尽管如此，答案仍然是难琢磨的。难怪数学家兼作家卢卡·帕乔利（Luca Pacioli，1445～1717）在他 1494 年有影响力的书 Summa de arithmetica，geometria，proportioni et proportionalità（《算术、几何、比及比例概要》）中以失败者的情绪做了总结。“对于三次方程和四次（涉及 x^4）方程，”他说，“直到现在还不可能形成一般规则。”好在帕乔利的百科全书般的 600 页的作品是以易于理解的意大利

语写的。因此，这本书甚至在那些不精通拉丁语的人们中流传从而促进了代数学研究。从此，人们基本丧失了挑战三次方程的信心。再没人出于一些实际目的寻找三次方程的解。解三次方程已经成为一种智力挑战，而值得最优秀的数学家考虑。此时出现了一位谦虚的英雄——一位来自博洛尼亚、名叫斯匹翁·达尔·费罗（Scipione dal Ferro，1465～1526）的数学家，他在不知不觉中成了戏剧开场的一部分。

斯匹翁·达尔·费罗是一名造纸工弗洛里亚诺（Floriano）与其妻菲丽芭（Filippa）的儿子。在那个见证了印刷术发明的世纪，造纸工成了一门令人满意的职业。我们几乎不了解斯匹翁的青年时期，也不知道什么促使他研究数学。他可能在博洛尼亚大学完成了他的教育。这个享有声望的机构、最古老的大学（图 37 显示了该建筑的一个壮观的走廊，现在用做图书馆）现在仍在办学，它建于 1088 年，到 15 世纪它已经赢得了“欧洲最好的大学之一”的声誉。到 14 世纪晚期的博洛尼亚，数学（超出了欧几里得的基本几何学）已经成为正规课程的一部分，并且在 1450 年罗马教皇尼古拉斯五世增加了 4 个数学方面的教职。在 1496 年，达尔·费罗成了该大学数学教授职位五位联席主席之一，除了在威尼斯短期休假外，他在此职位上度过了余生。尽管几份原始资料把他描绘为一位伟大的代数学家，但他的作品的原始手稿没有任何原本或印刷本保留下来。一本可追溯至 1554～1568 年的、来自博洛尼亚大学的讲稿集可能包括了达尔·费罗写作的一份副本（图 38）。那一节的标题是：“来自卡瓦

图 37

列累·博罗格内蒂（Cavaliere Bolognetti），他从昔日的博罗尼亚大师斯匹翁·达尔·费罗处得到了它。”斯匹翁可能在 1501 年遇到了卢卡·帕乔利，当时卢长·帕乔利正在博洛尼亚演讲。确切地说帕乔利不是一位数学强人，但是他是一位数学知识的伟大传播者。由于自己在解三次方程方面没有进展，帕乔利可能已经说服了斯匹翁自己尝试一下，斯匹翁在处理涉及立方根和平方根的表达式方面游刃有余。大约在 1515 年，达尔·费罗的努力终于有了结果。他取得了一项主要的数学突破，即成功解出了形如 $ax^3+bx=c$ 的方程的解。在 16 世纪的数学语言中，这样的方程被描述为“未知数项加立方项等于常数项”。虽然这不是最一般的形式，但它为随后的发现打开了大门。斯匹翁·达尔·费罗没有立刻公布他的开创性结果。直到 18 世纪保守数学上发现的秘密是十分寻常的（与今天的科学论文追踪是多么不同啊!）。然而，他确实将该结果泄露给了他的学生和女婿安尼贝尔·德拉·纳维（Annibale della Nave），还有另一名学生威尼斯人安东尼奥·玛利亚·菲奥雷（Antonio Maria Fiore）。他也在一个手稿里详细说明了他的方法，在斯匹翁死后，该手稿为他女婿所有。

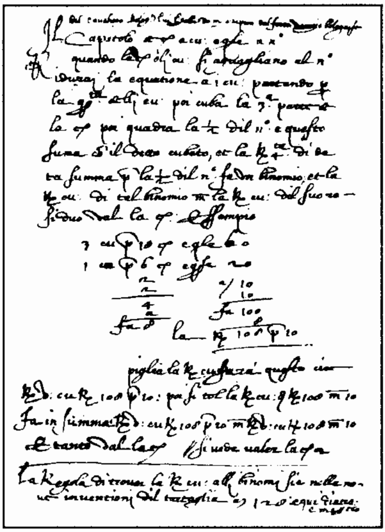


图 38

到 16 世纪，博罗尼亚人对数学的兴趣掀起了一个高潮。数学家与其他学者有时卷入吸引大群人的公共争论和口头辩论中。出席者不仅有大学官员、指定的裁判员，而且有学生，论争各方的支持者和观众，观众出席的目的是为了娱乐，也是为了一次赌博的机会。通常，论争的各方会为他们预期的胜利投下大量的钱作赌注。根据 19 世纪的一位数学

史家的描述，数学家对这样的智力对抗感兴趣，因为它们的结果不仅决定了他们在城市或大学里的声誉，而且决定了指定的任期和月薪的增加。辩论发生在公共广场、教堂、贵族与王子把持的宫廷，贵族和王子认为把他们的扈从学者计算在内是一种荣誉，这些学者不仅精通占卜预测的计算，而且在艰深的和罕见的数学问题辩论方面也很熟稔。

安东尼奥·玛利亚·菲奥雷，一个相当平庸的数学家，他得到了达尔·费罗的解的秘密。在达尔·费罗死后，即使菲奥雷将达尔·费罗的解法视为自己的可加以利用之物，他也没有立即发表该解法，相反地，他决定等待时机——一个能够让他成名的人的出现。大学任命的更新很大程度上取决于辩论的成功，在这样一个社会里，保有一件秘密武器可能意味着生与死的差异。1535 年，机会终于来到，菲奥雷挑战了数学家尼科洛·塔尔塔利亚（Niccolò Tartaglia），要与其进行一场公开解答问题的竞赛。这个塔尔塔利亚是谁，为什么菲奥雷从一个长长的候选人名单中选择他作为对手？

尼科洛·塔尔塔利亚（图 39）在 1499 年或 1500 年出生于布雷西亚。他起初的姓可能是丰塔纳，但是因为在 12 岁时一个法国士兵用马刀砍伤了他的嘴，所以他有了绰号塔尔塔利亚（意思是“口吃者”）。这个小男孩被留在教堂里，等候死神，当时他在这里寻找避难所，在他母亲的照料下他慢慢恢复了健康。成年后，他总是戴一串珠子，以隐藏不雅的伤疤。塔尔塔利亚的家里很穷，在他 6 岁时，他做邮递员的父亲迈克莱死了，留下了悲伤凄惨的孤儿寡妇。当塔尔塔利亚学到字母表中的

图 39

k时，家里的钱用光了，无力支付学费，他不得不停止了阅读和写作的学习。他后来回忆自己的教育："我从没再找一个教师，仅是持续地劳动，与死人打交道，陪伴我的只有所谓勤奋的贫穷伴生物。"虽然经历了诸多不幸，塔尔塔利亚确是一位天才数学家。在维罗纳度过一段时间后，最终他在1534年作为一名数学教师搬到了威尼斯。在其数学记忆里，塔尔塔利亚叙述道，在1530年经过大量努力后他设法解出了三次方程 $x^3+3x^2=5$。这是他的同事布雷西亚人祖安内·德·托尼尼·达·苦伊（Zuanne de Tonini da Coi）给他出的难题。

很快，有关塔尔塔利亚声称自己能解三次方程的传言到了安东尼奥·玛利亚·菲奥雷的耳朵里，但是他很怀疑，认为塔尔塔利亚在骗人。由于握有达尔·费罗解答的秘密知识，菲奥雷自信能够击败塔尔塔利亚，他对塔尔塔利亚发起了挑战。此后不久，菲奥雷与塔尔塔利亚达成了一份有关竞赛准确条件的协议。每一方提出30个问题要其对手解答。接着密封问题，并将其存放在公证人马斯特·彼尔·亚苦莫·狄·赞贝利（Master Per Iacomo di Zambelli）那里。两人约定，一旦开封，对方可以在40～50天内解答问题。他们协议，任何解答较多问题者将是获胜者，除了荣誉外，获胜者将收到一笔可观的针对每个问题约定的报酬（根据一些资料表明，失败者必须提供一次由获胜者及其30个朋友出席的筵席）。像已经证实的那样，菲奥雷的弓的确只有一支箭——他提出的所有问题都是他从达尔·费罗那里知道解法的 $ax^3+bx=c$ 的形式。另一方面，塔尔塔利亚的单子包括了30个不同的问题，每一个类型都不同，用他的话说："我轻视他，并且没有任何理由害怕他。"

竞赛日期设在1535年2月12日进行。各个大学的头脑人物和一些威尼斯学界名流将到场。当问题被提交给两位对手时，一些不曾料到的事情发生了。使观众诧异的是，塔尔塔利亚在两个小时内解答了所有菲奥雷提的问题！而菲奥雷甚至不能解出一道塔尔塔利亚的问题。二十年后在对该事件的回忆中，塔尔塔利亚叙述道：

> 之所以我能在那么短的时间内解出他的 30 [道问题]，是因为所有的 30 道问题都与未知数项加立方项等于常数项 [方程形式为 $ax^3+bx=c$] 的代数方程有关。[他这样做] 是认为，我不能解出任何一道题，因为法拉·卢卡 [帕乔利] 在他的论文中断言，不可能通过任何一般规则解这样的问题。然而，非常幸运，就在从公证人那里收到两套密封的问题的约定竞赛时间的前 8 天，我已经发现了这样的表达式的一般解。

事实上，在发现了 $ax^3+bx=c$ 的解一天后，塔尔塔利亚也发现了 $ax+b=x^3$ 的解。由于他已经知道如何解 $x^3+ax^2=b$（由达·苦伊所加给他的挑战），塔尔塔利亚实际上在一夜之间成了世界上解三次方程的专家。达·苦伊建议他立即公布他的解法，然而他置之不理，并解释说他打算写一本这方面的书。塔尔塔利亚发现的公式是那么复杂，以至于连他自己都难以记得他自己对三种情况的规则。为了帮助自己记忆，他编了一些诗句，开头是：

> 在立方项加未知数项
> 等于某个整数的情况下，已经知道：
> 先找两个不等的数；
> 那么，它们的乘积，就如人们都知道的那样……

附录 5 中陈述了塔尔塔利亚完整的诗和他的公式。

塔尔塔利亚现在不再是一名默默无闻的数学教师了——他是一位数学名人。但是在文艺复兴的意大利，如果没有诗歌的空间，将没有故事，甚至没有数学的故事会发生。

扑朔迷离

在塔尔塔利亚和菲奥雷之间进行的竞赛像野火一样传遍了意大利，

并且被16世纪的一位最有才气和争议的人物——物理学家、数学家、占星家、赌徒兼哲学家吉罗拉莫·卡尔达诺（Gerolamo Cardano，1501～1576;图40）获悉。

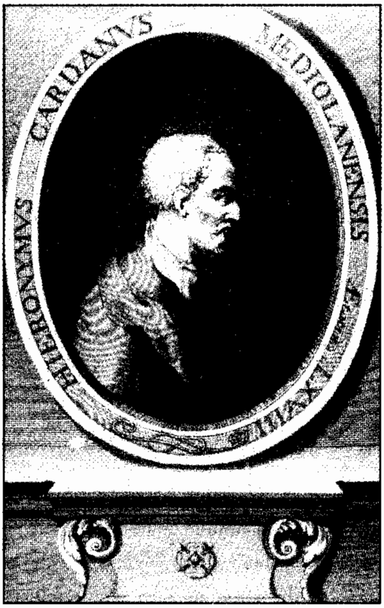


图 40

甚至相比文艺复兴时期许多绚丽多彩的天才，卡尔达诺的生活也容易使人浮想联翩。他是米兰法官法齐奥·卡尔达诺（Fazio Cardano）与非常年轻的寡妇恰拉·迈克里（Chiara Micheri）的私生子。尽管没有必要，但在他后来的自传 De vita propria liber（《我的生平》）中，卡尔达诺仍愉快地以浓墨重彩描写他早年间所遭受的健康问题，包括他在21岁与31岁之间的性无能。受到他有教养的父亲的鼓励，吉罗拉莫在帕维亚和帕多瓦大学学习了数学、古典文学和医学，他父亲有时为列昂纳多·达·芬奇提供几何学方面的建议。在他学习期间，赌博成了他的主要收入来源。他玩扑克、骰子和棋时，将其概率论知识转化为赢利。晚年他将自己对赌博的嗜好转移到写作一本有趣的书上：Liber de ludo aleae(《机会游戏的学说》)，这是第一本概率计算方面的书。由于卡尔达诺讲话大声、态度粗鲁，他被许多教授疏远了，在学习结束时，第一次投票以压倒性的47∶9的多数票否决了他的博士学位。只是在两轮以上的投票后，他才最终获得了学位。尽管卡尔达诺第一次在米兰寻求一个物理学教职的打算惨遭落空，但他的运气很快就彻底改变了。在1534年，通过他父亲熟人的影响，他被任命为皮亚蒂基金会数学讲师。同时，他开始秘密行医，在行

医中他取得了很大的成功。然而，他的成功并没有使其得到米兰医学院的支持。在1536年，卡尔达诺决定将其与医学院的争执摊牌。他出版了一本极富挑衅性的书 De malo recentiorum medicorum medendi usu libellus（《论公共使用中的不良行医》）。卡尔达诺尤其戏谑同时代医师的浮夸举止："如今给一位医师最多荣誉的东西是他的举止、仆人、马车、衣服、机敏和狡诈，所有的这些都显得虚伪做作、平淡无味，学习和经验似乎一文不名。"令人不可思议的是，卡尔达诺的冒犯不仅使其得到了医生的职业，而且到16世纪中期他成了全欧洲最有名的医生之一，仅次于传奇的解剖学家安德雷斯·维萨里（Andreas Vesalius）。

卡尔达诺似乎已经从争议和竞争中茁壮成长起来。这可能源于他对赌博的热情。他曾经写道："赌博完全是一种罪恶，即使考虑到从事赌博活动的巨大群体，它似乎仍是一种自然的罪恶。因为这个原因，一名医学博士应将其视为一种不可治愈的疾病来加以讨论。"既然在学生时代和成为一位成熟的学者后，机敏而尖刻的卡尔达诺都赢得了许多次辩论，那么塔尔塔利亚-菲奥罗竞赛的消息煽起他的好奇心也就不足为怪了。当时，他正在完成自己的第二本数学书 Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis(《算术与简单测度的实践》)，并且在该书中他找到了了包括三次方程的解在内的非常有吸引力的想法。几年后，卡尔达诺自负地试图自己发现三次方程的解法。失败后，他决定让书商祖安·安东尼奥·达·巴萨诺（Zuan Antonio da Bassano）捎信给塔尔塔利亚，说服后者公开解三次方程的公式。后来塔尔塔利亚以肯定的语气描述了他自己的答复："转告卡尔达诺阁下，请他原谅我，当我公布我的发现时，它是我自己的事，而非别人的事，所以卡尔达诺阁下一定要理解我。"塔尔塔利亚一直漠视卡尔达诺的所有建议，在几次相当冗长和十分辛辣的交流后，最后他在诱惑下接受了一次邀请，去拜访米兰的卡尔达诺。卡尔达诺所耍的手腕是，许诺介绍塔尔塔利亚去见米兰的西班牙总督和总司令阿尔冯索·德·阿瓦洛斯（Alfonso d'Avalos）。塔尔塔利亚已经写了一本有关大炮的书，这样一个协议让他能把书推荐给阿

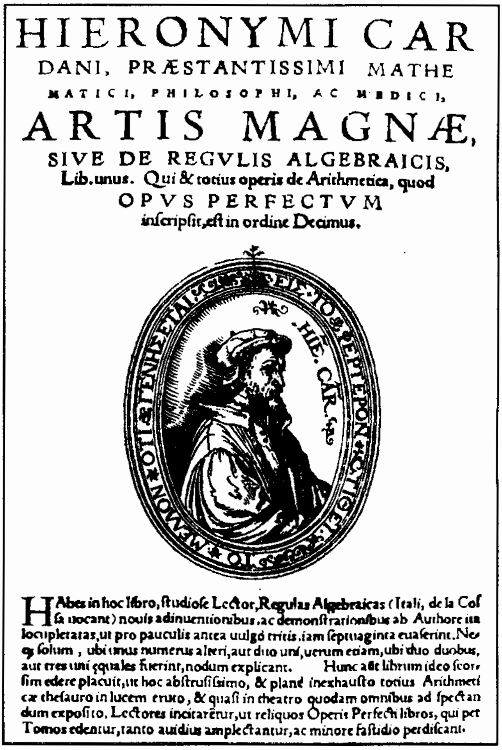
尔冯索·德·阿瓦洛斯，可能保证他有一笔不错的收入。

在米兰，卡尔达诺盛情款待了塔尔塔利亚，仍然打算从他那里套出解法。但是塔尔塔利亚的嘴，至少是暂时还是封得很严。他甚至拒绝了卡尔达诺的一个建议，即卡尔达诺在书中单辟一章，宣布塔尔塔利亚是该解法的发现者。

糟糕的是，从这里开始，有关以后事情的信息获取几乎只有靠塔尔塔利亚的远不客观的宣称。根据塔尔塔利亚所说，他最后确实同意把秘密透露给卡尔达诺，但是卡尔达诺必须做出以下庄重的誓言："我以上帝的名义向你宣誓，以一位绅士的身份向你保证，如果你告诉了我，我不仅永不出版你的发现，而且我也以一名真正的基督信徒的名义答应并保证，以密码来记录它们，以便在我死后，无人能理解它们。"这段分量很重的谈话发生在1539年3月25日。后来，卡尔达诺的一位年轻的家庭秘书，鲁多维科·费拉里（Ludovico Ferrari），讲述了一个截然不同的故事。按照费拉里的说法，卡尔达诺没有秘密起誓。费拉里声称自己当时在谈话现场，并且说，塔尔塔利亚只是为了回报卡尔达诺的好客而透露了秘密。然而，像我们接下来会看到的，费拉里自己的客观性至少像塔尔塔利亚一样令人怀疑。不过，事实是1539年出版的《一般算术实践》中仍然没有塔尔塔利亚的解。

在这段悲喜剧中，鲁多维科·费拉里（1522～1565）作为接下来的主人公走上了中心舞台。14岁时他第一次从博洛尼亚到达了卡尔达诺的家里。卡尔达诺不久就注意到这个年轻人的超常天分，并且完全担任了对他的教育责任。然而，费拉里既聪敏又暴躁。17岁时在一次争吵中，他失去了右手的手指。当卡尔达诺一学到塔尔塔利亚的解，他不仅成功地为其提供了一个证明，而且他也开始计算更一般的三次方程。回想一下，塔尔塔利亚实际上只是设法解出了像 $x^3+ax=b$ 或 $x^3=ax+b$ 这些特别形式的三次方程。16世纪的数学家还不了解，这些只是一般方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的特例。相反地，他们分别研究13种不同形式的三次方程。同时，在卡尔达诺的鼓励下，聪明的费拉里在1540年

设法找到了像 $x^4+6x^2+36=60x$ 这样的四次方程的正确的解。主人和他的学生现在真地出风头了。卡尔达诺听到了一个传闻，达尔·费罗已经将他的原始公式给了他的女婿。在 1543 年，卡尔达诺和费拉里进行了一次特别的旅行，前往博洛尼亚会晤安尼贝尔·德拉·纳维，斯匹翁·达尔·费罗的原始手稿已经委托给了德拉·纳维。在那里他们最先证实达尔·费罗在 20 年前确实已经发现了与塔尔塔利亚相同的解。即使卡尔达诺的确向塔尔塔利亚发过誓，他可能也已经觉得，自己需要从义务中摆脱出来了。别忘了，誓言形式上是不公开塔尔塔利亚的公式，而非达尔·费罗的公式。在 1545 年，卡尔达诺出版了 Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus(《代数学的伟大艺术或规则第一册》)，通称 Ars magna(《大术》；图 41 为该书的封面)，许多数学家认为此书标志着现代代数学的开始。在这本书里，卡尔达诺极其详尽地研究了三次和四次方程及其解法。


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

图 41

他第一次证明了解可能为负数、无理数，甚至在某些情况下可能涉及负数的平方根——他称之为“诡辩”量——在 17 世纪被称为“虚数”。纽伦堡的印刷商约翰尼斯·皮特雷尤斯

(Johannes Petreius）出版了第一版《大术》，它传遍了欧洲数学界，很快就赢得了赞誉。毋庸讳言，有一位数学家（即塔尔塔利亚），受到了较少的尊重，他的狂怒是无法想象的。不到一年，他出版了一本书 Quesiti et inventioni diverse（《新问题和发明》），在书中他直接控诉了卡尔达诺的伪誓。塔尔塔利亚用了对卡尔达诺最冒犯的语言，字字句句陈述了他们间交往的所有过程。他的理由是："我实在不知道有什么比违背誓言更丑陋的。"但是卡尔达诺真的是一位数学剽窃者吗？依据标准的科学伦理看，当然不是。在《大术》的第一章第二段写道：

> 在我们的时代，博洛尼亚的斯匹翁·达尔·费罗已经解出了立方项加一次项等于常数项的三次方程，给出了一个非常优美的和令人钦佩的结果。既然这种艺术超过了人类所有已故天才的精妙和所知，并且是真正天赐礼物和对人类大脑容量的极其清晰的测验，任何研读过它的人都会相信，没有什么地方他无法理解。继他之后，我的朋友，布雷西亚的尼科洛·塔尔塔利亚，在与他的［斯匹翁的］学生安东尼奥·玛利亚·菲奥雷竞赛时因希望胜出而解决了同样的问题，并且我经过多次恳求打动了塔尔塔利亚，他将解给了我。我曾经被卢卡·帕乔利的话所蒙蔽，他否认会发现比他更一般的规则。大家都知道，虽然我已经发现了许多事情，但一直很悲观，没有打算进一步研究。然而，后来，知道了塔尔塔利亚的解并且寻求其证明，我渐渐明白有许多其他有益的事情可以做。按照这种想法，并且随着信心的增加，我发现了其他类型的解，部分由我做出，部分由我以前的学生鲁多维科·费拉里做出。

在第 11 章（"关于立方项加一次项等于常数项"），卡尔达诺简短地重复了同样的声明：

> 博洛尼亚的斯匹奥·费罗在几乎 30 年前发现了这个规则，并

> 且将它传给安东尼奥·玛利亚·菲奥雷，菲奥雷与布雷西亚的尼科洛·塔尔塔利亚的竞赛给了尼科洛发现它的机会。在我多次恳求下他［塔尔塔利亚］把它给了我，但是拒绝证明。靠了这个帮助，我以［各种］形式寻找它的证明。这是非常困难的。我的版本如下：

塔尔塔利亚远远未被卡尔达诺给予他的致谢所安抚。事实上，不仅攻击性的战斗继续升温，而且逐渐转变成在意大利人民面前极其猛烈地互相进行丑陋的侮辱。尽管卡尔达诺本人避开争斗，但他那脾气很坏的合作者，鲁多维科·费拉里却乐于充当知识斗士的角色，以捍卫他的（用他的话说）“创造者”地位。作为对塔尔塔利亚的书的反应，费拉里发布了一封卡特里——一封挑战信——他将其分发给意大利的53位学者和达官贵人。费拉里采用了一种敌意的、跌份的文体：“读你那胡说八道的书让人有种阅读皮奥瓦诺·阿尔罗托［生活在15世纪的一个神甫，以恶作剧著称］的笑话的印象。”后来，他继续蔑视和谴责塔尔塔利亚自身的剽窃行为：“在你书中超过1000处错误里，我首先指出，在第8节你把乔达诺［指13世纪的德国数学家约旦·奈莫拉里乌斯（Jordanus Nemorarius），也被称为约旦·德·奈莫尔（Jordanus de Nemore)］给出的一个结果作为你自己的，而没有提到他，这是一种偷盗行为。”第一封卡特里在1547年2月10日被送出。塔尔塔利亚在13日收到了它，6天后开始反击。他首先抱怨卡尔达诺本人没有费心回答：

> 在此我再次忠告你，如果我所说的吉罗拉莫·卡尔达诺阁下不打算写信给我，明智地承认他错了，那么他没有理由反过来指责我……你至少应该确定，他作为你在这场辩论中的合伙人，也在你的卡特尔上签了自己的名字。

对于费拉里提出的进行公开数学辩论的邀请，塔尔塔利亚却宣布如果与卡尔达诺辩论，他会很高兴。很明显，塔尔塔利亚看不出与一个名

不见经传的黄毛小子比赛有何意义，即便取胜也不能说明什么，而卡尔达诺在欧洲正如日中天，所以他更喜欢与卡尔达诺争斗。然而，此时的卡尔达诺急于促进一种更加平衡的情绪（他倡导学者采用一种“阅读爱的故事”的生活方式），因而他选择继续沉默。

在 1547 年 2 月 10 日与 1548 年 7 月 24 日之间，塔尔塔利亚和费拉里交换了至少 12 封卡特里（6 封挑战信和 6 封答复），所有的卡特里都流传到整个知识上流社会。如果略掉通常蔑视的口吻，也可将这些卡特里看作文艺复兴时期两个主要数学家的知识的有趣文件。塔尔塔利亚拖卡尔达诺进行辩论的一连串打算都惨遭落空。在 1548 年，塔尔塔利亚的家乡布雷西亚提供给他一个几何学讲师的职位。可是，由于他与费拉里通信中的鲜明姿态，任命最可能于他在公开竞赛中击败费拉里后下达。因此，塔尔塔利亚被迫答应辩论。双方同意的辩论话题是 62 个问题——由两位数学家提出（每位提 31 个）——这些问题装在交换的卡特里中。大部分问题是数学方面的，但是按照文艺复兴时期的风格，也有其他领域的问题，例如建筑学、天文学、地理学和光学。

1548 年 8 月 10 日，在米兰法拉提·奏寇兰提（Frati Zoccolanti）花园中的一所教堂里举行了辩论。所有的米兰人都蜂拥而至，包括总督东·费兰特·迪·贡札加（Don Ferrante di Gonzaga），贡札加应是最终的裁决者。费拉里出现时有一大帮支持者跟随，而塔尔塔利亚只有自己的兄弟相伴。卡尔达诺证实，在辩论过程中他一直在乡下。不幸的是，没有关于比赛本身或最终判决的官方记录。在后来的两本书里，塔尔塔利亚含糊其辞地陈述了辩论过程。他特别谴责了观众大声喧哗，这干扰和妨碍了他完整地陈述自己的论据。然而，未加雕琢的事实描绘了一幅相当不同的画面。塔尔塔利亚在第一天结束后就立刻离开了辩论现场，而未等待裁决出炉。我们也知道，在辩论赛一年后，塔尔塔利亚失去了布雷西亚职位的薪水，他被迫回到威尼斯，从事最谦虚的教学工作。因此，所有的迹象表明，在米兰塔尔塔利亚遭遇了痛苦和丢脸的失败。卡尔达诺在其著作中也简单地提到，费拉里在一场比赛中赢了塔尔塔

利亚。

对于取胜方鲁多维科·费拉里来说，其事业突飞猛进。随着他的胜利，提供职位者开始络绎不绝。费拉里甚至为了成为米兰总督的收税人的更有利的任命，他放弃了做皇帝儿子教师的机会。然而，他的生活就要出人意料地终结了，这场戏即将谢幕。

1556 年后的某个时候费拉里回到了博罗尼亚，陪伴他的是他的妹妹玛达莱娜（Maddalena），她是一个可怜的寡妇。虽然不存在直接的证据证明她在 1565 年毒害了他，但她随后的行为和接踵而来的情况严重增加了人们的疑虑。在费拉里死后两周玛达莱娜结婚了，并且她把自己从哥哥那里继承的所有钱财都转移给了她丈夫。当卡尔达诺来到博罗尼亚找回他自己的书和笔记时，他什么也没发现。玛达莱娜的丈夫占据了一切，显然打算出版一些以其前任婚姻的儿子命名的材料。

三次和四次方程的解的历史增加了超越数学王国的有趣问题。如果不去思考科学信息的知识产权和所有权的问题，这个故事就是不完善的。在枯涩的塔尔塔利亚-费拉里通信中，费拉里声称，卡尔达诺从遗忘中挽救了塔尔塔利亚的公式并将公式植入一个“肥沃的花园”——《大术》中，从而已经实际上为他提供了一次服务。但是，这是真的吗？或者，塔尔塔利亚反击说，如果没有他的公式，卡尔达诺的花园将仍然是一片前途未卜、杂草丛生的原野，他是正确的吗？毫无疑问，从塔尔塔利亚的视角来看，卡尔达诺是魔鬼。他不仅违背了誓言，而且通过这样做他已经使塔尔塔利亚无法得到认可和名声，而塔尔塔利亚觉得自己获取认可和名声理所应当。在卡尔达诺的书中没有什么引用附注用于说明公式是塔尔塔利亚发现的。事实是，从那时起，所有的参考文献注的都是“卡尔达诺的公式”和他的书。更糟的是，既然卡尔达诺对所有三次和四次方程类型都增加了他自己的许多解和证明，那么塔尔塔利亚的公式的突破性就陷入了一团混乱中。

但是从卡尔达诺的立场来看会怎样呢？不管是否有庄重的誓言，他的确感到，他有极其微不足道的权利出版对于该主题的讨论工作。一旦

我们（像他一样）认识到，塔尔塔利亚不是该公式的最初发现者——斯匹翁·达尔·费罗是，那么卡尔达诺的立场甚至更易于理解。塔尔塔利亚有何权利阻止出版一个达尔·费罗自己留给后代的公式？塔尔塔利亚宣布他自己将出版一本有关新的代数学的书，但这并不能证明什么。事实上，尽管塔尔塔利亚实质性地领先于卡尔达诺，他却被其他方面的追求打断了，而且关于新的代数学的那本书从未发行。

有关公布发现的公共科学实践的几个当前案例可能有助于证明，关于发现的所有权问题并不简单。天文学家提议，以年度为基础使用哈勃太空望远镜进行观察。在有关专家对提案进行极其认真的评估后，只有大约 1/7 的提案被真正选中，交给哈勃执行。在望远镜开始观测后的几天内所收集的数据可供提案人整理、分析。然后，有一段一年期的所有权，期间只有提案人有权使用这些数据。提案人可以利用这段时间分析数据和公布结果。在一年后，数据就成为公共的，可以为全世界的天文学家所用。首先，这个过程已经建立起来，并且最重要的是承认了一个事实，即科学发现（特别是那些由纳税人的资金搞出来的）大体上属于社会，不该将其作为私有财产对待。其次，已经设计了一些程序来防止科学拖拉者拖延重要的数据。

同时，处理比如股票市场行为数学模型的私有公司对其发现极其保密，但是其保密程度大概不会超过一些厨师对其配方的保密程度。

从纯科学的观点看，把解三次方程的公式叫做“达尔·费罗公式”最有意义，因为毫无疑问他首先发现了该公式。然而，在科学创新没有以真实的发现者命名的案例中，这既不是第一个，也不是最后一个。当一个人考虑塔尔塔利亚自己的行为时，他关于知识财产的观点似乎有点伪善。例如，塔尔塔利亚把一本译自阿基米得作品的书冠以自己的名字，而事实上他只不过出版了 13 世纪佛兰德学者威廉·莫贝克（William of Moerbeke）的拉丁语译著。相似地，他提交了关于在一个斜面上的重物的机械学的一个解，却没有说明这个解的创始人，即德国数学家约旦·德·奈莫尔。

这整个事件的达尔·费罗—塔尔塔利亚—卡尔达诺—费拉里次序依然是数学史上最富有争议的逸事之一。许多科学史家对此津津乐道就不足为奇了。从本书来看，重要的是，当这出戏谢幕时，即使未建立一个一般方程理论，数学家也还知道了怎样解三次和四次方程。

卡尔达诺从不否认其好运。在《我的生平》中他写道：

> 尽管幸福暗示着一种与我的本性背道而驰的状态，我却要诚实地说，幸福不时地眷顾我，使我总能获得和分享一些好处。如果在生活中确有什么好东西，我们可以拿它来装饰喜剧舞台，我不会错过这样的礼物。

几个世纪后，群论在自然界和艺术对称方面充当了“官方的”语言，方程的解则导致了群论的形成。而接下来的历史事实则显得有趣、好玩。卡尔达诺出版了他那个时代一百位杰出人物的生辰星相。这些杰出人物中，只有一位德国画家阿尔布雷特·丢勒是一名艺术家。

为了给这个故事画上句号，我要增加一段个人的小插曲。在 2003 年夏天，我决定，我必须寻找真正的三。次方程英雄——斯匹翁·达尔·费罗的出生地。经过一些努力后我找到了那个地方。今天，它坐落在博罗尼亚的古拉兹路和彼得罗尼奥·维基奥路的角落里在侧壁上的一个容易被忽视的碑刻标示了这个房屋是达尔·费罗的出生地（图 42）。我随意地按响了几个公寓的门铃，这时一个老太太在一座三层公寓的窗口处出现了。我用可怜的意大利语向她解释

图 42

说，我正研究斯匹翁·达尔·费罗的生平。她告诉我要我等她丈夫下来。令人愉快的老绅士缠夹着意大利语和英语断断续续地向我解释说，在那个建筑中没有什么可以证实，在代数学中做出一个主要突破的达尔·费罗曾经生活在那里。我们都静静地盯着碑文，过了几分钟后道别了。

在光彩流溢的达尔·费罗-卡尔达诺-费拉里的工作之后，人们极其自然地相信，具有 $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ 形式的五次方程也可使用一个公式解出。事实上，由于从《大术》中取得的自信，人们预期，五次方程的解就隐藏在某个角落里，这样的信念促使一些最聪敏的数学家去猎获此珍宝。

朗声宣告你的最大失败

以《格列佛游记》著名的讽刺作家乔纳森·斯威夫特（Jonathan Swift，1667～1745）于 1727 年写了一首娱乐诗，题目是“女人想些什么”。其中的几行是：

为使谈话圆满结束，
她把鄙俗视为风趣；
或者，责骂中带着嘲讽，
将朗声宣告你的最大失败。

在卡尔达诺之后 250 年内，寻找五次方程的公式解的故事就是重大失败之一。它开始于另一位博罗尼亚人，拉斐罗·邦贝利（Rafael Bombelli，1526～1572）。由于历史的巧合，邦贝利恰恰出生于达尔·费罗过世的那年。在满怀敬意地研读了《大术》后，邦贝利感到卡尔达诺的说明不够清晰和全面；用邦贝利的话说，“他所说的晦涩不清。”因此，他花了 20 年写了一本有影响力的书，书名为《代数学》。不像其他的意大利数学家，邦贝利不是一名大学教授，而是一位水力工程师。邦贝利最

伟大的原创性贡献是，他认识到了人们不可能回避处理负数的平方根。这实际上需要一次智力的飞跃。说到底，什么是-1的平方根？显然，没有普通的（实）数乘以自身可以得到-1，即使一个负数乘以自身也只是得到了一个正的结果。然而，三次方程的解（见附录5）在中间步骤中有时出现一个负数的平方根，甚至当最终的解是一个实数时也可能如此。卡尔达诺为这些“诡辩量”而困惑，因而做出结论说，它们是“那么玄妙，以至于是没有用的”，而且，当他需要用它们计算时，他说，他是为了“不受智力上的折磨”才这样做。另一方面，邦贝利具有非凡的洞察力，他将这些新的数字理解为沟通三次方程（用实数表达）与最终解（也是实数）之间的一种必要的工具，他把这些数称为“负之正”。换句话说，当开始和结束都涉及实数时，解不得不过渡到“虚”数的新世界中。1777年伟大的瑞士数学家列昂哈德·欧拉将-1的平方根表示为i。现在，在由邦贝利所揭示的新景象中这些数被称为复数——这包括实数（所有的普通数）和虚数（涉及负数的平方根）。

这里我们也可以学到一堂重要的历史课。整个历史上，对方程式的研究已经让数学家几次发现了新类型的数。有负数，如-1和-2；无理数，如$\sqrt{2}$，它们不能由分式表达；并且通过邦贝利的工作甚至发现了虚数，如$\sqrt{-1}$。谁知道五次方程的解可能产生什么见识呢？

在随后的几个世纪，破解五次方程之谜成了数学中最迷人的挑战之一。不幸的是，由达尔·费罗和费拉里发现的解（分别发现了三次和四次方程的解）没有提供多大帮助。这些仅仅是聪明而特别的技巧，并非可以扩展到更高次的方程的方法论研究。我们急需的是一种更综合的一般方程理论，而非孤立情形中的实验。拿一个医学比喻来说，数学必须从治疗症状转移到理解病因和相关的副作用上去。

法国律师富兰索瓦·韦达（Francois Viète，1540～1603）和英国天文学家托马斯·哈里奥特（Thomas Harriot，1560～1621）在正确方向上迈出了脚步。他们引入了用于描述代数方程的符号（在卡尔达诺的著作中符号特别麻烦），并且促进了解法本身的进展。韦达也是词语“系

数”的发明人，系数是用于界定描述一个方程的那些数（例如，在 $ax^2+bx+c=0$ 中的 a，b，c）。尽管不是一位职业数学家，韦达却恰巧挽救了整个法国数学界的荣誉。在 1593 年，比利时数学家亚德里安·范·罗曼（Adriann van Roomen，1561～1615）在他的著作《概念数学》前言的结尾挑战了同时代所有的数学家，他要求解一个恰好 45 次的胁迫方程问题（见附录 6）。来到巴黎的荷兰大使高兴之余嘲弄地向国王亨利四世谈到，没有哪位法国数学家可以解出那道题。尴尬的国王召请韦达，要求其帮助。韦达发现了潜藏在问题中的三角关系，（根据传说）他在几分钟内找到了正数解，国王因此惊喜不已。事实上，韦达比要求的做得更多——他说明了，该方程有 23 个正数解和 22 个负数解。

第一个严肃的但却未成功的试图解五次方程的是斯考特·詹姆斯·格里高利（Scot James Gregory，1638～1675）。格里高利首先以他发明的反射望远镜（格里高利望远镜）而著称。在他死前那年（36 岁年轻的年龄），他已经开始怀疑是否的确可以找到一个五次方程解的公式。然而，他确实发现了各种方程的解与它们的系数之间存在着联系。接下来是德国伯爵恩尔费德·华沙·冯·契恩毫斯（Ehrenfried Walther von Tschirnhaus，1651～1708）。作为一位有诸多成就，从眼镜到代数学的人，契恩毫斯阐述了一种有趣的方法，这种方法暂时给陷入困境的解五次方程以新的希望。它的基本思想很简单。如果人们设法把五次方程化简为一个较低次（如四次或三次）的方程，那么他就能使用已知的那些方程的解。此外，契恩毫斯能通过一些聪明的变换除去五次方程中的 x^4 和 x^3 项。糟糕的是，在契恩毫斯的方法中仍然有一个主要的缺陷，这个缺陷不久就被数学家戈得弗里特莱·威尔海尔姆·莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）注意到了，经过在这个方面的许多努力之后，契恩毫斯最终承认了失败。

18 世纪产生了对五次方程的新的兴趣和一系列强有力的冲击。法国人艾提恩尼·贝祖（Étienne Bézout）出版了几本关于代数方程理论的书，他采用了与契恩毫斯有些相似的方法，但是又失败了。在这时，从

古到今最多产的那位数学家加入了该行列。

他就是列昂哈德·欧拉（图43），欧拉是那样多产，以至于仅仅复制他出版的书目就需要一整卷书。在18世纪最后的75年里，欧拉出版的数学和数学物理方面的著作占了该时期该领域出版的所有著作的1/3。欧拉猜想，五次方程的解可表达成一些四次方程的形式，他以一种有希望的语气总结道："有人可能猜想，如果仔细进行消减，可能会得到一个四次方程。"换句话说，他也乐观地相信，问题可以被简化为已经有解的一个方程。这种常规思路是数学进展的特点。有一个陈旧的笑话，人们问一位物理学家和一位数学家，尽管他们有一个电熨斗，但电源接口在隔壁房间里，如果他们需要熨裤子，他们会做什么。两人都回答说，他们会把熨斗拿到另一个房间，并在那里把它插上。现在人们又问，如果他们已经在那个有接口的房间，他们会怎么做。物理学家回答说，他会直接把电熨斗插入接口。然而，数学家说，既然问题已经解决，他会把电熨斗拿到没有接口的那个房间。

图 43

尽管欧拉很乐观，他也没能解出一般的五次方程。不过，他的确设法表明，一些特别的五次方程，如 $x^5-5px^3+5p2x-q=0$（其中 p，q 给定），可以通过一个公式解出。这为以后的成功打下了基础。队列中的下一位是瑞典人厄兰德·塞缪尔·布令（Erland Samuel Bring，1736～1798）。虽然是伦德大学的一名专业历史教师，布令最喜欢的消遣却是数学。还有什么谜能比解五次方程更好？布令朝着五次方程的解迈出了巨大一步，他找到了一种数学变换，可以把一般五次方程（ax^5+

$bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$）简化为更简单的 $x^5+px+q=0$ 的形式。不幸的是，不仅这种更短的、似乎更易处理的形式仍然存在一种难以逾越的障碍，而且布令的非凡变换完全没有受到注意，只是到了 19 世纪才又被英国数学家乔治·伯齐·杰拉德（George Birch Jerrand）独立地重新发现。

三项更深入的研究几乎被三个不同国家的数学家同时进行，但也都未能产生一个解。不过，这些数学家意义深远的工作把一种激动人心的新思想引入了研究。特别地，他们指出了方程的假定解的置换特点可能与方程是否可由公式解出有关。既然这在历史上首次提出了在方程的解与对称概念之间的联系，我就对其基本原理做一简要解释。例如，对二次方程 $ax^2+bx+c=0$（其中，a，b，c 是已知数）。人们可以容易地证明，如果方程的两个解（由第 62 页的公式给出）可以表示成 x_1 和 x_2，那么两个解的和 x_1+x_2 和它们的积 x_1x_2 可以由方程的系数 a，b，c 来表达（见附录 7）。事实上，$x_1+x_2=-b/a$，$x_1x_2=c/a$。换句话说，在方程 $x^2-9x+20=0$ 中，两个解的和是 9，而它们的积是 20。在第 62 页的解的形式本身可由（x_1+x_2）与 x_1x_2 结合起来表达（附录 7）：

$$\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_1}\right]$$

这里要注意的重要之处是，这个表达式在互换两个解 x_1 和 x_2 时是对称的——当颠倒 x_1 和 x_2 的顺序时，公式仍然不变。法国人亚里山大-泰奥菲·范德蒙（Alexandre - Théophile Vandermonde，1735～1796）和英国人埃德沃德·瓦灵提出的问题是，是否五次方程和实际上任意次的方程不能通过一种相似的对称表达式来表示。这在原理上导致了许多方程的公式解。这种思想被约瑟夫-路易·拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，1736～1813）接受，拿破仑·波拿巴认为他是“数学科学的金字塔尖”。

拉格朗日（图 44）出生于都灵（现在意大利），由于他的父亲一方，他的家族有一部分法国血统，并且他认为自己“更”像法国人，而非意

大利人。他的父亲开始很有钱，但在投机活动中败光了家产，没有什么留给儿子。晚年，拉格朗日把这种经济灾难描述为他曾遇到的最好的事情："如果继承了一笔财富，那么我可能会与数学擦肩而过。"

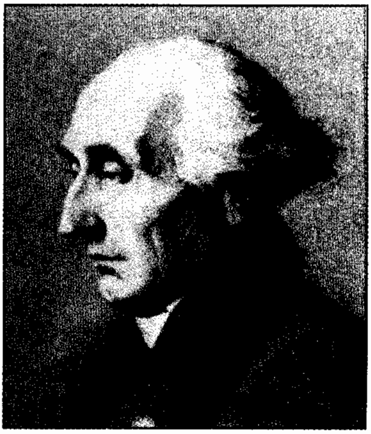


图 44

在他的杰出的论文《对代数方程解的思考》（在柏林出版）中，拉格朗日首先认真地评价了贝祖、契恩豪斯和欧拉的贡献。接着，他指出，所有线性、二次、三次和四次方程取得解的技巧都可以用一种统一的程序来替换。然而，这里产生了一个令人讨厌的意外。对于二次，三次和四次，方程可以通过降次的方法来解出（即将四次降为三次，等等）。当把完全相同的过程运用到五次方程时，意外之事发生了。结果方程不仅没有成为四次，反倒变成了六次方程！对于二次、三次和四次已经发挥着漂亮作用的方法却在五次方程上遭遇了彻底失败。拉格朗日失望地总结道："因此，用这些方法推导出五次方程——最著名的和重要的代数问题之一——的解是不可能的。"

为了打开僵局，拉格朗日介绍了一种更一般的置换讨论。回想一下，置换是产生对象的不同排列的运算，例如把 *ABC* 变换成 *BAC* 或 *CBA*。拉格朗日做出了重大发现，方程与它们的解的特性取决于在置换下解的某种对称性。

拉格朗日的新的见解，尽管具有开创性，但却不足以解出五次方程。不过拉格朗日依然保持乐观，相信他所作的分析必然会产生突破，他写道："我们希望在某个时候回到这个问题，这里我们满意于已经给出了一种理论的基础，这种理论似乎是新的和一般性的。"正如历史所呈现的，拉格朗日再也未回到五次方程。在临死前两天他这样总结自己

的一生："我的事业已经到了终点；我已经在数学方面获取了一点名望。我既不恨任何人，也没有被任何人伤害；这样离开很好。"

这时，数学界争论着另外一个数学问题，这个问题与解五次方程有关连。问题是：所有的方程（任何次的）都至少有一个解吗？例如，我们怎么知道有任何 x 值使得方程 $x^4+3x^3-2x^2+19x+253=0$ 保持正确？甚至更棘手的，如果我们有一个 n 次方程（n 可以是任意整数 1，2，3，4，…），并且允许解是实数或复数（涉及 $i=\sqrt{-1}$），有多少个解？我们已经知道在二次方程情况下的答案——总是恰好有两个解。但是 $n=5$ 或 $n=17$ 会怎么样？尽管许多数学家，包括莱布尼兹，欧拉和拉格朗日，都努力给出一个答案，但是最后的结论留给了瑞士会计员让-罗伯特·阿甘德（Jean - Robert Argand，1768～1822）和那个被誉为"数学王子"的人——约翰·卡尔·弗里德里希·高斯（Johann Carl Friedrich Gauss，1777～1855；图45）。

图 45

高斯的天分在 7 岁时就得到了承认，那时他就能用大脑算出从 1 到 100 的整数和，他注意到和包括了 50 对数，每一对合计 101。在他 1799 年的博士论文里，高斯给出了现在被称为代数学基本定理的第一个证明——证明每个 n 次方程恰有 n 个解（解可以是实数或复数）。高斯的第一个证明本身有一些逻辑缺陷，但是他会消除这些缺陷，终其一生给出了三个以上的严格证明。阿甘德的证明发表于1814 年，实际上是第一个正确的证明。

基本定理明确地证明了，一般五次方程必然有 5 个解。但是这些解可以通过一个公式找到吗？在高斯发表他对基本定理的第一个证明的同

一年，他也表达了对五次方程的公式解的疑虑："在许多几何学者的努力后得到一般方程的代数解的希望仍然渺茫，似乎越来越可能这种解是不存在的和矛盾的。"接着，他加了一句让人感兴趣的注解："严格证明五次方程不可能有公式解也许不是那么困难。"关于这个主题，高斯再也没有发表过其他任何的一句话。

超过两个世纪在解五次方程方面一再遭遇的失败促使法国数学史家让·艾提恩尼·蒙蒂克拉（Jean Étienne Montucla，1725～1799）使用军事比喻来描述对五次方程的冲击："四周的城墙已经增高，问题仍躲在最后的城堡里，绝望地捍卫自己。谁会成为领导对它的进攻或者迫使它投降的幸运天才?"

历史又一次出现巧合，最终的和结论性的对五次方程的系列冲击即将在蒙蒂克拉去世那年展开。如同在三次和四次方程的情形，这个阶段始于又一个意大利人保罗·鲁非尼。

图 46

保罗·鲁非尼（Paolo Ruffini，1765～1822；图 46）出生于意大利瓦伦塔诺。他是内科医生巴斯利奥·鲁非尼（Basilio Ruffini）与玛丽亚·弗兰西斯卡·伊波利迪（Maria Francesca Ippoliti）的儿子。在鲁非尼十几岁时，全家搬到了靠近莫地那的勒佐，在莫地那他学习了数学、医学、文学和哲学，毕业于1788年。由于特别多才多艺，鲁非尼在开始行医的同时教授数学。在法国革命后的意大利极其动荡不安。法国军队在拿破仑·波拿巴（Napoleon Bonaparte）的统帅下接二连三地拿下意大利的城镇，在1796年夺取了莫地那。鲁非尼最初被任命为拿破仑建立的阿尔卑斯共和国下议院的一位代表，只因失去了教职而拒绝保证效忠于新共和国。令人惊奇的是，就是在这段剧变时期，鲁非尼做了他最重

要的工作。他声称已经证明，一般五次方程不能通过一个公式解出，证明只涉及简单的加法、减法、乘法、除法和根的开方。

这里我们必须暂时停下来评价鲁非尼的宣告的分量。自从巴比伦时代，二次方程的解的公式就基本为人熟知。三次方程的公式由达尔·费罗、塔尔塔利亚和卡尔达诺发现。费拉里提出了四次方程的解。所有这些公式都可由简单算术运算和开根来表达。接着的两个半世纪里，一些最有才华的数学家都自负地试图找到一个五次方程的公式，但这些期望都失败了。现在鲁非尼正宣告，他证明了不管人们多么努力，五次方程不能通过这样一个公式解出。这代表了在思考方程式方面的一种戏剧性革命。数学家已经逐渐习惯了一些方程很难解出的事实，但在五次方程的情形下，鲁非尼的证明被认为这样努力从一开始就注定要失败。

鲁非尼在一篇两卷的论文 Teoria generale delle equazioni（《方程的一般理论》）中公布了他的证明，它发表于 1799 年。然而，证明是极其复杂的，转弯抹角的推理使它难以贯穿那两本合计达 516 页的书。毫不奇怪，数学界对鲁非尼的证明持怀疑态度，他们对此疑虑重重。约在 1801 年，鲁非尼送了一份《方程的一般理论》的副本给拉格朗日，但是未收到答复。鲁非尼仍不泄气，他送了第二份副本，并注明：

> 因为不确定您是否收到我的书，我才又送了一份副本。如果在我的证明里有错误，或者，如果我已经说了一些我相信是新的，而事实上不是新的，又或者如果我已经写了一本无意义的书，我恳求您真实地指出。

拉格朗日对这封信也没有答复。鲁非尼在 1802 年试了最后一次，他首先赞扬了拉格朗日的工作：

> 没有人有更正确地……收到我冒昧地送给您的那本书……在写这本书时，我基本上已经证明了不可能给出高于四次方程的解。

拉格朗日仍然没有回复。

由于承认他的工作存在不足，在 1803 年和 1806 年鲁非尼打算发表更严格和不怎么深奥的证明。他也与同事，数学家简弗兰西斯科·马尔法蒂（Gianfrancesco Malfatti，他在 1771 年发表了一篇论文）和皮艾特罗·帕奥利（Pietro Paoli）讨论了该证明。与皮艾特罗的谈话使他在 1813 年发表了一篇最终的证明，论文题目是“对一般代数方程解的反思”。不幸的是，即使这篇被认为更加清晰的证明也没有在数学界得到重视。

在一份给国王的报告《1709 年以来数学科学进展的历史报告》中，法国数学家和天文学家让-巴普迪斯特·约瑟夫·德朗布尔（Jean-Baptiste Joseph Delambre，1749～1822）确实简短地提到了鲁非尼的工作。不过，他使用了相当试探性的语言：“鲁非尼打算证明，但这是不可能的。”被激怒的鲁非尼迅速提出抗议：“我不仅打算证明，而且实际上的确证明了。”即使这样也未使鲁非尼的证明被当时及以后的人接受。然而更糟糕的是，德朗布尔向鲁非尼解释说，期望一个权威的答案是没有希望的，因为“无论你的证明人［数学家拉格朗日，拉克鲁瓦和勒让德］会达成什么决定［涉及证明的有效性］，他们都必须做大量工作来促使他们接受或拒绝你的证明。”从已过中年的拉格朗日对科学家和药剂师戈尔捷·德·克劳布里（Gaultier de Claubry）所做的评论中，我们可以推断，尽管他对鲁非尼的工作有个大略印象，他却在知识上不大倾向于接受这样一个革命性的概念——即用一个公式解五次方程是不可能的。因此，拉格朗日从未公开提及鲁非尼的证明。

鲁非尼绝望地把他的证明送给伦敦的皇家学会。他收到了一份礼貌性的回复，回复声明，尽管几个已经读了他的作品的会员发现它是令人满意的，但发表对此证明的官方认可不是学会的职责。相信鲁非尼的结果的一位杰出的数学家是奥古斯丁-路易·柯西（Augustin - Louis Cauchy，1789～1857）。柯西的生产率极高（他发表了令人惊愕的 789 篇数学论文），以至于一度他不得不查找自己的日记。在死前 6 个月鲁

非尼收到的一封来信中，柯西用通常预备的恭维话写道：

> 对我而言，你的关于方程式一般解的论文集似乎总是一项值得数学家关注的论著，而且，依据我的判断，你完全证明了四次以上一般方程的不可解性……而且我要加一句，你关于不可解的论著恰好是我向学会成员所做的一篇演讲的主题。

即使有柯西的赞赏，鲁非尼的证明仍然既不广为人知，也不被普遍接受。大多数数学家还是发现，他的论证是那么曲折，以至于他们不能确定证明的正确性。

但是鲁非尼真的证明了五次方程不能通过一个涉及简单运算的公式解出吗？作为事后诸葛亮，我们可以说他没有完全证明它。在证明中仍然有一个重要的漏洞，即鲁非尼做了一个假设，而他没有意识到，证明这个假设是必要的。相反，他自得地指出，任何其他假设会导致一种更复杂的情况，以至于“我们可以完全放弃这些假设①。”然而，这种不完善丝毫也不会影响他的发现的原创性。事实上，在鲁非尼同代人中没有人找出他的证明中的缺陷。鲁非尼是挑起方程解法变革的那个人。试图解出五次方程的努力不久就转向了试图证明五次方程的不可解性。

当我们今天来评价鲁非尼的工作时，我们认识到，他实际上比只改变五次方程的思想做得更多。他使在三次和四次方程的解与某种置换之间的联系更进一步。这标志着从传统代数学向群论的根本过渡，前者只处理数，后者则涉及在任意类型元素之间的运算。回想一下，群的成员可以是从整数到人体对称的任何事物。自此，抽象代数的诞生已经露出曙光。

鲁非尼对待错误总是很诚恳。他曾经拒绝了在帕多瓦的一个数学主席职位，因为他不想放弃所有把他作为内科医生看待的家庭。由于老是

---

① 原文使用了单数，疑为错误。这里的“它们”指其他复杂的假设情况。

接触病人，鲁非尼在1817～1818伤寒流行期间感染了严重的伤寒症。他利用病患经验写了《传染性伤寒症的论文集》。尽管极度虚弱，他还是连续看望病人，并且不放弃数学研究。在1822年4月，他患了慢性心包炎，在一个月后去世。奇怪的是，在他死后，他的工作几乎被遗忘了，除了柯西，在他之后的数学家基本上不得不重新发现他的思想。

至此，两名年轻人，也许是科学史上最悲剧的人物出现了。挪威人尼尔斯·亨里克·阿贝尔和法国人埃瓦利斯特·伽罗瓦即将永久地改变代数学的进程。这两位非凡人物的生活故事是那么鼓舞人心，以至于我感到有必要在随后的两章里详细地描写他们。

第四章

穷困潦倒的数学家

在埃里奇·西格尔（Erich Segal）的著名小说《爱情故事》第一行写道："对于一个 25 岁就死去的姑娘你能说什么呢？她美丽又聪明，而且她热爱莫扎特和巴赫。还有披头士和我。"对于埃瓦利斯特·伽罗瓦（Évariste Galois，1811～1832）和尼尔斯·亨里克·阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802～1829）而言，人们可以容易地解释这个悲哀的总结。对于伽罗瓦似乎可以这样解读，"关于一个 20 岁就死去的男孩你能说什么呢？他既浪漫，又有天分，并且，他热爱数学。他死于误会和自杀。"或者，对于阿贝尔："关于一个 26 岁就死去的男孩你能说什么呢？他既害羞，又有天分，并且他热爱数学和戏剧。他在贫穷中死去。"瑞典数学家科斯塔·米塔格-莱夫勒（Gösta Mittag-Leffler，1846～1927）使用这样的语言来描述阿贝尔的数学成就："阿贝尔的最好的作品真的是一组高尚优美的抒情诗……在平庸的生活之上升华，从心灵深处直接发生光彩，非普通语言文字所能描绘，超越了任何诗人。"伟大的奥地利数学家埃米尔·阿廷（Emil Artin，1898～1962）写过伽罗瓦，"刚开始学数学时，我就陶醉于伽罗瓦的经典理论。它的魅力促使我反复阅读。"的确，阿贝尔和伽罗瓦的天才只可比做一颗超新星——它是一颗处于爆炸中的恒星，在它所属星系中于瞬间使得成千上万颗恒星暗淡无光。

早年的阿贝尔

尼尔斯·亨里克·阿贝尔出生于 1802 年 8 月 5 日。他是一个路德

教会牧师索伦·乔治·阿贝尔（Søren Georg Abel）和一个造船商的女儿安妮·玛丽·西蒙森（Anne Marie Simonsen）的次子（图 47 显示了尼尔斯·亨里克的父母的侧影）。在阿贝尔出生一些年后，他的母亲告知，他实际上早产 3 个月，而且是在用红葡萄酒洗过后他才有了生命的迹象。一个出身于众多布衣男人的父亲与一个非常美丽的以热情闻名的妇女为了世俗的快乐所做的靠不住的结合，并未为一次成功婚姻提供保证。在尼尔斯·亨里克两岁之前，他的父亲在耶尔斯塔德的村里谋得一个职位，替换了他作为部长的爷爷。在当时，挪威是丹麦的一部分，经常处于战争的阴影之下，首先是和英国舰队发生了海战，然后与瑞典进行了陆地战争。挪威船只路线被英国战船封锁带来了灾难性的结果。所有的木材出口到 1808 年中止了，来自丹麦的谷物贸易已经变得如此危险，以至于谷物贸易也仅是一息尚存。在 1809 年饿殍遍及挪威。阿贝尔牧师在他的教区里通过说服耶尔斯塔德的人们吃以前禁食的马肉来与饥饿抗争。

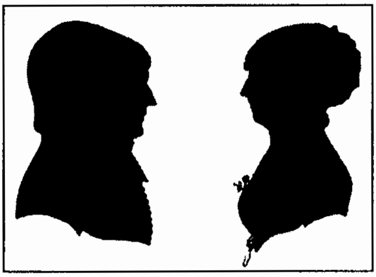


图 47

直到 13 岁，尼尔斯·亨里克都在教区牧师住处接受他父亲的教诲。牧师并未放松对这种早期教育的责任。实际上，他已经准备了一本手写的教科书，以问答的方式将其内容传授给他的孩子们。那本书包括语法、地理学、历史学和数学。令人惊愕的是，在算术加法的第一页（图 48）出现了一个明显的错误：1＋0＝0！幸运的是，数学世界并未因这个早期错误信息而失去一位最耀眼的明星。在 1815 年，尼尔斯·亨里克被送到了克里斯汀尼亚（今奥斯陆）的教会学校。在家里，双亲越来越沉溺于酒精，并且母亲相当随便地结交性伴侣，堕落的家庭生活可能加快了男孩的离开。他的父亲写道：“愿上帝保佑他！我送他离开这个堕落的世界，就不用再担心了。”

尼尔斯·亨里克以这个公共机构历史中相对较低的分数进入了教会学校。几年前新开办的克里斯汀尼亚大学已经挖走了教会学校所有最好的老师，只留下了大部分不合格的老师。尤其是数学老师，一个名叫汉斯·彼特·巴德尔（Hans Peter Bader）的人，是一个无情的畜生，他恐吓孩子们，并且经常打得学生们青一块紫一块。尽管尼尔斯·亨里克对漫长沉闷的学校生活几乎没有什么兴趣，但起初他的分数是令人满意的。当没有朋友们的陪伴时，他渐渐陷入了消沉中，后来他自己正确认识到："既然我来到了这样的学校，我绝对不能，或者至少仅因存在最大的困难而孤独。这样，我会变得十分忧郁，并且没有心情工作。"接下来几乎去剧院看戏成了他摆脱生活琐事的主要方式。在那里，他可以使自己沉浸于虚构人物的生活中，而不必与要解决的问题做斗争，在这些问题中他从没有机会接受适当的指导。尼尔斯·亨里克是害羞的和不安定的，不仅在他的学生时代，而且直到他去世，他与异性的联系都非常有限。到 1816 年底，尼尔斯·亨里克的成绩下滑，并且在巴德尔打了他几次后，他不得不短期放弃。他的分数下降得那么低，以至于在那年他只是勉强通过。然而，在 1817 年 11 月，在教会学校的一起致命事件标志着阿贝尔生活的戏剧性转折。在 11 月 16 日，一个叫亨里克·斯托登伯（Henrik Stoltenberg）的学生患了神经热外加斑疹伤寒症，于一周后死去。令人痛恶的数学教师巴德尔不仅粗暴地用拳头打了可怜的斯托登伯，而且在他无助地躺在地板上时还持续地踢他。斯托登

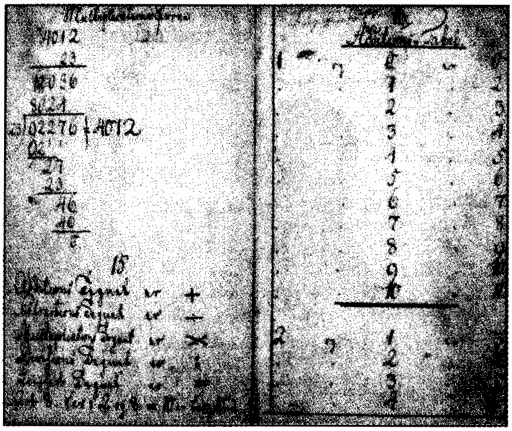


图 48

伯的8个同班同学联名控诉了巴德尔的恶行。尽管打人致死从未被医学检查所证实，但巴德尔被解雇了。

学校聘请伯恩特·迈克尔·洪堡（Bernt Michael Holmboe，1795～1850）作为继任教师，他是教会学校自己培养的学生，仅比阿贝尔大7岁。洪堡引入了一个新的授课大纲，开始培养学生全面地理解数学符号。没过多久他就发现，作为一位数学老师的梦想已经在他的班里实现——他的身边有一位天才。在完成标准课程之余，阿贝尔在洪堡的热情的和启迪性的鼓励下开始沉浸于伟大数学家欧拉、牛顿、拉普拉斯、高斯，尤其是拉格朗日的原著中。洪堡无法抑制他的赞赏。在阿贝尔1819年的成绩单中，他无所顾忌地惊呼，“一位非凡的数学天才。”在第二年他甚至进步更多。在所有学校科目中，洪堡正确地评价说：“凭着最不可思议的天分，他对数学怀有一种不倦的兴趣与激情，因此，如果他活着，他很可能会成为伟大数学家之一。”在后面一句的几个单词已经被抹去，但依然可以解读为“世界上最伟大的数学家”。显然，教育部门坚持说洪堡应对其称赞有所保留。短语“如果他活着”证明是悲剧性的预言。

一个不断斗争的天才

在毕业那年阿贝尔第一次试图展翅飞翔，这是怎样一种雄心壮志啊！初生牛犊不怕虎，阿贝尔正是试图解五次方程。这是欧洲最好的数学家已经奋斗了几乎3个世纪的数学难题，但现在一个中学生居然声称，他已经解决了它。阿贝尔把他的解给洪堡看过，洪堡没有发现解有什么错误。然而，由于缺乏自信，洪堡把解法转呈给克里斯汀尼亚大学的两位数学家，克里斯托弗·汉斯丁（Christopher Hansteen）和索伦·拉斯穆森（Søren Rasmussen）。他们也未在解中发现错误。因为认识到该发现的意义，汉斯丁决定把其作品转寄给当时最重要的斯堪的纳维亚数学家——哥本哈根的费迪南德·达根（Ferdinand Degen）——希望由

丹麦科学院发表。

达根是个注重实际的人，他宁愿犯错误也要保持谨慎。即使他没有在阿贝尔的解中发现错误，他也要阿贝尔送给他关于其方法的“一份更详细的结果推导，并且给出一个算例”——例如，方程 $x^5+2x^4+3x^2-4x+5=0$ 的一个解。毕竟，一个教会学校的学生解出一道最著名的数学难题的先验概率不是很高。当试图给出具体的例子时，阿贝尔愕然发现，事实上他的解不正确。然而，这并不标志着他的追求的终结，相反，这种暂时的挫折将使阿贝尔做出里程碑式的突破。无论如何，达根受到感动，这促使其为阿贝尔提供了一条建议。对于达根而言，方程式研究似乎是“无果之花”。他建议，阿贝尔不如集中精力在新的椭圆积分（在微积分中的特殊类型的数学问题，因一个人可以使用它们来计算椭圆弧长，故名之）领域。达根当时说：“一个严肃的研究者运用适当的方法……可以发现一个麦哲伦海峡，并由此进入一个广阔无垠的分析海洋。”

即使在阿贝尔的数学天分开始闪耀时，他的整个家庭依然被黑暗笼罩着。1818～1820 年是阿贝尔永不衰竭的忧伤之源。他的父亲，那位牧师，设法在 1817 年 12 月 10 日被选举到挪威议会（国会），但是这种似乎有声望的事件全然变成了灾难。起初，新当选的、精力很充沛的这位国会议员提出了几个成功的关于教育的议案。尤其是他帮助建立了一个兽医学校。然而，也许由于过度饮酒使得判断失误和不知足地渴望晋升的驱使，他犯了错，这等于政治自杀。在 1818 年 4 月 2 日的一次不幸的会议期间，他出人意料地控告两个代表，说他们不公正地监禁了一个铁厂的前任保安。指控证明是完全子虚乌有的，从此标志着阿贝尔牧师垮台的开始。政界和公众爆发的怒焰导致了阿贝尔被控告的危险。尽管他被给予最后一次道歉的机会，但是他顽固地拒绝了。在 1818 年秋天，丢脸的、醒悟了的牧师回到了耶尔斯塔德。他越来越沉迷于从酒精中摆脱烦恼，但这只能使他的健康快速恶化。当他于 1820 年去世时，在耶尔斯塔德无人表现得很悲伤。据说精神虚弱的寡妇躺在床上，他的一个

仆人与她一起接待了许多来安慰的访客，这个仆人的服务越出了家务琐事的范围。

安妮·玛丽和尼尔斯·亨里克的5个弟弟妹妹获得了一笔数额很小的退休金，这笔钱远远不足以支持他们自身的需要。甚至让阿贝尔完成其教育的钱都无法增加，更别说其他。然而，阿贝尔吉星高照，他设法在1821年进入了大学。在当时的社会环境中，学生与老师之间的个人关系一般是令人沮丧的，教授往往采取疏远和冷淡的态度，即便如此，不少于3位教授自愿从自己相当瘪的腰包里出资赞助阿贝尔。这种慷慨行为一直持续到1824年，那时阿贝尔最终收到了一份薪水过活。在大学刚开始的几年，阿贝尔频繁地出入克里斯托弗·汉斯丁教授的家，并受到欢迎。在汉斯丁创办的一份期刊上，阿贝尔于1823年发表了他的第一篇数学论文。这还并不算是一篇划时代的论文（或者，阿贝尔的第二篇论文也不是，它可以为期刊的多数读者所理解）。不过，阿贝尔的第三篇论文《利用定积分解两个问题》，在很晚之后成为现代放射医学（物理学家阿兰·考马克与电子工程师高德弗雷·豪斯菲尔德为此获得了1979年诺贝尔生理医学奖）的数学基础。

同时，汉斯丁和拉斯穆森教授不断地寻找方法支持阿贝尔的工作，尤其是让他到国外开阔视野。当向学术执行管理委员会提出的这样一个请求完全淹没在大学的官僚机构中时，拉斯穆森自己出资100斯批谢答尔（speciedaler）①，让阿贝尔到丹麦旅行，会见达根和其他丹麦数学家。因此，靠着所有这些机会，1823年阿贝尔在哥本哈根度过了暑假。在那里，他发现，“科学家们认为，挪威完全是个残暴的地方”，他尽自己一切努力，“说服他们，事实恰恰相反”。到哥本哈根的旅行产生了另一个出人意料的结果——阿贝尔遇见了他未来的未婚妻，克里斯汀（昵

① 在1816年它成了挪威货币的标准单位，1斯批谢答尔＝120斯吉林（斯堪的纳维亚旧铜币和货币单位）。1875年挪威加入了斯堪的纳维亚货币联盟，斯批谢答尔由克郎取代，1斯批谢答尔＝4克郎。

称“克莱莉”）·坎普（Christine Kemp）。两人第一次相会发生在阿贝尔叔叔家的一次舞会上。阿贝尔邀请克里斯汀跳舞，但是令两人尴尬的是，乐队开始演奏的是那时的新舞曲——华尔兹——他们都不了解。两人惊惶失措地盯了对方几分钟后，悄悄离开了舞场。阿贝尔与克莱莉的关系有点神秘。在1824年与克里斯汀度过圣诞节后，阿贝尔在大学里宣布他订婚了，这个消息令他的朋友很震惊。显然，阿贝尔从未有过任何口头的或身体上的性爱体验，这在首都的学生生活中十分典型。在小小年纪就订婚可以产生一堵保护墙，让他在出现女人的话题时不需要做进一步的解释。阿贝尔从未与克里斯汀结婚。在那时，如果一个人在无法支持一个家庭的时候就结婚是难以想象的。很悲哀，阿贝尔从没达到这个条件。订婚5年后，在临死前所躺的床上，带着内疚和责任感，阿贝尔要他的好朋友，巴尔塔札尔·马西亚斯·基尔豪（Baltazar Mathias Keilhau），照顾克莱莉。“她不漂亮，”基尔豪听他接着说，“有红色的头发和雀斑，但是是一个可爱的女子。”基尔豪在那时甚至没有见过坎普，但却的确在1830年和坎普结婚了，两人一起度过了余生。

五次方程

自从他不成功地尝试用一个公式解五次方程，这个题目就萦绕在阿贝尔的脑海里。当他未忽视达根的建议，开始在数学的两个其他领域进行先驱性研究时，对五次方程的困扰依旧。从哥本哈根回来后，他因此决定以新的眼光重新思考这个问题。他现在不再试图找一个解，而是决定证明，一个公式解不存在。回忆一下，这正是鲁非尼在1799～1813年的一系列文章里声称已经证明的，但鲁非尼没有认识到，他的“证明”包含着一个严重的漏洞。由于鲁非尼的工作没有被广泛宣扬，所以阿贝尔在1823年没有注意到它。在几个月的紧张工作之后，来自偏远的挪威的21岁的学生阿贝尔终结了几个世纪以来人们都在探索的一个古老问题。他成功地严格明确地证明了，只使用四种算术运算和根的开

方，将五次方程的解表达为一个由各个系数决定的简单公式是不可能的。

我们首先简短地澄清阿贝尔的证明意味着什么，而且同样重要的是，澄清他的证明不意味着什么。阿贝尔证明了，在一般五次方程和高次方程中，一个人不可能重复四次方程、三次方程和二次方程的方法。换句话说，一个只简单涉及系数的代数公式形式的五次方程的解不存在。所有杰出数学家埋头苦干所获得的成就加起来也仅仅是徒劳的努力。阿贝尔的证明并不暗示，五次方程不能解。例如，五次方程 $x^5-243=0$ 明显有解 $x=3$，因为 $3^5=243$。而且，甚至一般的五次方程也可解出，或者用计算机获得数值解，或者通过引入更高级的数学工具，像椭圆函数解出。阿贝尔发现的是，在求解五次方程时只使用基本代数是根本不够的。当面临的是五次方程时，熟知的加、减、乘和开方运算就达到了它们的使用极限。这在数学史上是一个里程碑式的认识。它改变了解方程的整个方法，从仅仅找到必需的解到证明某种类型的解到底是否确实存在。

阿贝尔的证明技术性太强，所以无法在一本通俗读物里详细地照搬。我推荐具有较强数学兴趣的读者去看看彼特·佩希奇（Peter Pesic）的书《阿贝尔的证明》，该书有清晰的解释。在此，我仅指出，证明需要用到反证法的逻辑工具。这种方法背后的思想是，如果你要证明一个命题，你可以证明它的逆命题错误。换句话说，阿贝尔假设五次方程是可解的，然后证明这个假设会导致逻辑矛盾。

阿贝尔没有忽略他的这一发现的重要性。不像他以前的论文是用难以接近的挪威语写的，他用法语写了五次方程不可解的证明，希望吸引同时代的主要数学家的注意。他也决定使用该证明作为他的“名片”，认为这“将可能是我最好的介绍”。因此，他自费（可能饿了几顿饭）支付给印刷工格奎达尔（Grøndahl），要其以小册子的形式印刷这篇论文。然而，为了节约印刷费，他将文章《关于代数方程的论文，在文中证明了解一般五次方程是不可能的》压缩为仅仅 6 页，这是很罕见的。

这种过分的节俭在其他方面代价很高。对于大多数数学家而言，极其节略、几乎像密码一样的论文太晦涩了，即使阿贝尔送了几份小册子给他在哥本哈根的朋友和伟大的卡尔·弗里德里希·高斯，这篇论文也没有受到什么关注。高斯甚至明显地不愿费神打开阿贝尔的小册子——在他死后，这篇文章仍夹在他的论文中，没有裁开。数学文献中最伟大的杰作之一竟然没有读者！

大约在那时，阿贝尔的守护天使——汉斯丁和拉斯穆森教授，他们决定要他认识到自己的潜力，不能再要他们从菲薄的收入中拿出钱来资助他了。因此，在 1824 年他们为阿贝尔向挪威政府申请了一笔旅费补助。他们指出，要这位特别的天才“待在杰出数学家云集的地方，会极好地帮助其完成科学和学者教育”，以此向挪威政府证明这种不寻常的请求是正当的。这在经过通常的官僚拖沓之后，财政部的确给阿贝尔批下了一笔适度的补助。这在当时挪威财政窘迫的状况下，真是不容易。不过，批文也确实对原始请求做了两个重要修改。首先，为了准备旅行，要求阿贝尔继续待在挪威 18 个月，以“促进他的学者和科学教育，尤其是，也许能促进他对学术语言的研究”。其次，更重要的是，没有安排可供阿贝尔回家的路费。这后一种压缩经费的做法后来被证明具有破坏性后果。

游历欧洲

在 1825 年 9 月，阿贝尔最终告别了克莱莉，她那时在靠近克里斯汀尼亚、名叫森的小镇做家庭女教师。阿贝尔在 3 个朋友的陪伴下离开了挪威，去往欧洲大陆。他们中的两个后来成了地质学家，另一个成了一名兽医。起初，在汉斯丁的建议下，阿贝尔计划在哥本哈根短暂逗留后在巴黎度过一段时光。然而，当他的朋友们决定去柏林时，害怕在巴黎落单使得阿贝尔绕道柏林。在这种特殊情况下，阿贝尔对于孤独的致命的恐惧却产生了一个幸运的结果。在柏林，他遇见了一位极具影响力

的建筑工程师，这位工程师对数学极其热爱，并将成为阿贝尔的最伟大的崇拜者、慈爱的朋友和赞助人，他就是奥古斯特·列奥波尔德·克列尔（August Leopold Grelle，1780～1855）。起初克列尔十分不明白阿贝尔拜访的目的，他们几乎不说德语。在一封致汉斯丁的信中，阿贝尔描述了这种情况：

> 我们相处了很长一段时间我都没告诉他来访的目的，就在我们的相遇似乎要在抑郁消沉中结束时，他问我读过哪些数学书。我鼓起勇气，向他谈起了几位最重要的数学家的著作。然后，他变得非常亲切，而且看来确实很愉快。他开始和我广泛地谈论各种还没有解决的难题。当我们一说起五次方程的解我就告诉他，我已经证明了一般代数解的不可能性，他不相信，并说他怀疑这一点。因此，我给了他一份小册子，但他说他看不懂我的几个结论的理由。别人也这么说过，随后我对其进行了修正。

在这次相遇之后，克列尔创办了一份数学杂志，通称《克列尔杂志》（官方名称是《纯粹和应用数学杂志》），这份杂志在19世纪成了德国第一流的数学出版物。《克列尔杂志》第一卷出版于1826年，它包括了阿贝尔所写的令世人惊叹的6篇论文（用法语写的，由克列尔翻译）。其中一篇更详细精致地证明了，只用一个简单公式解五次方程是不可能的。在1826年初，阿贝尔显然仍未注意到鲁非尼的证明，但是大约在那年夏天他可能通过一个匿名作者对鲁非尼思想的总结发现了它。在他死后出版的1828年手稿里，阿贝尔指出，“第一个人，如果我没有搞错，也是唯一一个在我之前试图证明代数方程不可解性的人是几何学者鲁非尼。但是，他的论文太复杂了，所以难以判断他的推理是否有效。我认为，他的推理有一部分令人不满意。”

在做出这些令人印象深刻的科学发现过程中，财政状况的窘迫现实一直困扰着阿贝尔。从他极其谦虚的为人来看，他还部分地支持着他的

家人。在一封致汉斯丁先生的信中，他写道：

> 感谢您没有忘记我的兄弟［指他的麻烦的兄弟皮德尔］，愿上帝保佑您！我非常担心他的事情会变得糟糕。如果我给他的钱不够，我想请您再多给他一点。当用完 50 元时，我会寄给您更多的钱。

一件更严重的事将给阿贝尔的期望和未来的前途罩上阴影。拉斯穆森教授发现自己无法再承担教学任务和公共职责，于是他辞去了大学的工作，并在挪威银行谋得一个职位。这似乎为阿贝尔准备了一个极好的机会，一个他朝思暮想的——大学教职。然而，有两位合适的职位候选人：阿贝尔以前的老师洪堡和年轻的阿贝尔。当公开的消息传到在柏林的年轻旅行者那里时，克里斯汀·彼特·波克（Christian Peter Boeck，他本人是一位有抱负的兽医）迅速给汉斯丁写信：

> 我的表哥约翰·克勒特（Johan Collett）写信告诉了我关于拉斯穆森的银行任命。谁将取代他的职位？阿贝尔在回去后可能得到它，还是优先考虑洪堡？无论洪堡在某些方面是多么合理，它似乎也是不公正的，既然认为阿贝尔排在洪堡之前。

这封信写于 1825 年 10 月 25 日。12 月 16 日全体教员开会讨论和审批关于新任职的推荐信。他们推荐洪堡填补此空缺。偏爱洪堡而非阿贝尔的主要原因是，阿贝尔“不能调节自己像更有经验的老师那样理解年轻的学生，因此无法讲述极其丰富的基础数学部分，而这却是该职位的首要目标”。在作为任职资格的教学才能与研究智慧之间的冲突司空见惯。事实上，我可以以切身经历（我曾服务于许多调查委员会）证实，这种讨论作为大学任命的特点一直持续到今天。然而，在这种特别情况下，

因为一个候选人与另一个候选人有着明显的悬殊①，所以毫无疑问，短视的全体教员已经犯了一个严重的错误。并非完全没注意到他们的决策存在问题，挪威系总结道，“我们也考虑，无论总的为科学，还是具体为我们的大学，阿贝尔都不应该落选，这是十分重要的，有必要指出这一点。”

即使开始明白他的希望破灭，并意识到他不确定的未来，生性大度的阿贝尔仍尽一切努力保持与洪堡的亲密友谊。在一封致洪堡的温暖的信中，他写道，“在他告诉我的消息中，我知道，我的朋友，你已经被推荐取代拉斯穆森成为一位讲师。请接受我最诚挚的祝贺，可以肯定，获悉此事，你的朋友中没有谁比我更高兴。相信我，我经常希望你能改变一下职位。”在阿贝尔和洪堡之间的同志之友谊确实经受了这次考验，在阿贝尔剩余的日子里他们仍然是相互关爱的朋友。然而，失望的阿贝尔确实感到很无奈，他不得不告诉克莱莉他们的婚期要推迟。

尽管有这些令人烦恼的事情，在柏林的那个冬天，阿贝尔确实度过了一段最愉快的时光。他极其多产，在积分和各种无穷级数的理论方面贡献了几篇开创性论文。年轻的科学家们没有放过去剧院——阿贝尔的爱好——的任何机会，偶尔有人邀请学生们参加舞会，或者他们自己举行舞会。后来，他们的吵闹和喧嚣不时激怒了著名哲学家乔治·黑格尔(Georg Hegel，1770～1831)，黑格尔碰巧和他们住在同一个院里。据说，他曾经指着他喧闹的邻居说：“俄国熊。”

当春天来临时，阿贝尔开始制定旅行计划，他打算去他最初的目的地——巴黎。然而，他的想法又一次被朋友们孤立了，这种阻碍使得他结束了与基尔豪去弗赖贝格的第一次旅行，然后和另外两位朋友经过德累斯顿、波希米亚、维也纳、北意大利和瑞士，最后在1826年7月才抵达巴黎。

---

① 原文直译是：一个候选人站在另一个候选人之上的头、肩、胸和膝处

巴　　黎

任何一个在7月或8月到过巴黎的人都知道怎么回事。阿贝尔很快也发现了，每个人都在度假并离开了首都。巴黎仍无可争议地是世界数学中心，阿贝尔渴望等待机会会见他仰慕的数学巨人。毕竟，柯西、拉普拉斯和勒让德的作品构成了阿贝尔睡前所看的丰富内容。在他从巴黎致汉斯丁的第一封信里，他非同寻常地宣称："我已经最终到达了我所有数学希望的中心，巴黎。"阿贝尔一点也不知道，访问巴黎的结果是失望和幡然大悟。

阿贝尔寄宿在圣杰曼德佩区圣马格利特路41号科特家。无耻的房东令人有些难以容忍地一个月收他120法郎，给他提供一间"极其简陋的"房间，干净的衣服，一日两餐。按照阿贝尔的说法，房东是一个"无赖的数学业余爱好者"，当阿贝尔第一次想拜访著名的数学家阿德烈-马里·勒让德（Adrien-Marie Legendre，1752～1833）时，他带阿贝尔去了。不幸的是，正当阿贝尔到达时勒让德正步入马车，两人之间的交流仅限于几句有礼貌的问候。几年后，勒让德感到很遗憾，当阿贝尔仍在巴黎时没能和这位年轻的数学家多聊几句。（事实上，在1829年他们的确有十分丰富的交流，但是这时是1826年，年老的勒让德对阿贝尔一无所知。）

在巴黎最初的几个月，阿贝尔不停地工作，产生了一篇真正的力作，现在称之为阿贝尔定理。尽管这个定理并不直接与五次方程或群论有关，但它在阿贝尔一生中扮演着重要的角色，所以有关他的传记没有将该定理置之不理的。这个定理处理一种称为超越函数的特殊函数类型，它广泛地一般化了以前欧拉所得到的一种关系。毫不夸张地说，阿贝尔定理逐渐让世界数学产生了新的前景。阿贝尔证明的清晰和内在的简易已被比做希腊雕刻家菲迪亚斯的经典雕像。尤其是阿贝尔把问题倒过来的能力展示了其创造力。对于这种逆向思维我提供一个非数学的例子。

设想有人推论，在一些城市，枪支如此泛滥的原因之一是杀人者的数量居高不下——人们获得武器是为了自卫。然而，一个人也可以把这个问题倒过来看，频繁杀人的原因之一是没有限制枪支的可获得性。例如，在数学中，看一下关系式 $x=\sqrt[3]{y}$（读作"x 等于 y 的三次方根"）。它暗示了，为了计算 x，我们需要对 y 开三次方，像在 $2=\sqrt[3]{8}$ 中那样。然而，反关系式 $y=x^3$ 完全等价于前面那个（例如 $8=2^3$），可是，大多数人会同意，计算三次方比计算三次方根更容易，也更方便。这恰巧是阿贝尔在他的定理中提供的见解，一个让勒让德苦苦追求了 40 年而不得的问题。

阿贝尔的这篇论文实为他的最长的论文之一（在他的文集中占了 67 页）。这篇非凡的论文，题目为 Mémoire sur une propriété générale d'une classe trés étendue des fonctions transcendantes《关于一类极广泛的超越函数的一般性质》，既有理论也有应用。当完成这篇论文后，阿贝尔几乎不能抑制他的激动。他抱着极大的期望在 1826 年 10 月将论文提交给法国科学院。他认为，这篇论文可以成为他得到认可的护照。当介绍论文时，阿贝尔实际上出席了法兰西学院的会议。他带着极大的成就感聆听院秘书，数学物理学家约瑟夫·傅里叶（Joseph Fourier，1768～1830）宣读论文的介绍。柯西和勒让德立即被指定为审阅人，由柯西负责向学院提交一份报告。

之后，阿贝尔在巴黎花了两个月的时间，热切地等待着结论。他感到越来越孤独、沮丧和焦虑。"尽管我处在大陆最喧闹和可爱的地方，"他写信给洪堡，"我却感到身处沙漠中。我几乎不认识任何人。"也许部分原因是他自己的忧郁情绪，当周围没有朋友时，他发现难以交流：

> 总而言之，我不喜欢法国人和德国人。对于陌生人，法国人非常缄默。和他们之间的关系要变得更亲密很困难，而我不希望这样。他们每个人只顾自己的工作，而不照顾别人。每个人都想要教别人，可是不愿意学习。绝对的自私统帅一切。

像以往那样，剧院仍然是阿贝尔娱乐和快乐的主要来源："我不知道还有什么能比看一场由莫里哀创作、战神小姐［那个时代最著名的女演员，安妮-弗朗西丝-西波里特·布戴（Anne-Françoise-Hippolyte Boutet），以战神著称］演出的戏剧更让人快乐的了。我真的十分热爱，"他写道。19世纪巴黎其他的"吸引人的事物"没有打动他：

> 偶尔我拜访皇宫（图49），法国人称之为一个堕落之窟。在那里，人们会看到相当多的"善意"的妇女，而且她们根本不会冒犯人。人们可以听到的唯一的事情是："你想跟我来吗？我的小朋友，小坏男孩。"作为一个忙碌的人，我从没听她们说过，所以不受一点诱惑地离开了皇宫。

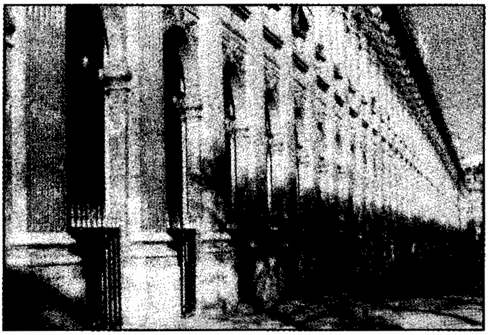


图 49

在巴黎，阿贝尔的确遇到了一个同胞，画家约翰·乔毕赤（Johan Gørbitz）。乔毕赤那时在著名的历史画家让-安托聂·格罗斯（Jean-Antoine Gros）的工作室工作，他从1809年就定居在巴黎了。在那年冬天，乔毕赤为阿贝尔画了他一生中唯一的一幅肖像（图50）。肖像描绘

图 50

了一位有着精致外表的英俊的年轻人。尽管阿贝尔的母亲是一位大美女，但阿贝尔同代的人中没有谁提到他有着特别好看的相貌。因此，胜过真人的肖像可能代表了那时画家的美化趋势。

也许对阿贝尔的创造性的漫游的思维所生产的复杂作品的最好的管窥可能是收集到的他的几十页巴黎笔记。在各种积分公式和涉及复数的表达式中，我们找到了一个充满了信手涂鸦和各种不停地从一条思想的溪流跳到另一条溪流的零碎的句子。例如，图 51 显示了其中一页，这一页包括以下摘录的短语："在……中的方程的完整解……讨厌的……讨厌的，我的∞［无穷的符号］"；"我的在天国的父亲，给我面包和啤酒。再听一次"，也许指的是他快速恶化的财政状况；"以上帝的名义来我这里"；"我的朋友，我的爱人"；"告诉我，亲爱的伊丽莎……听……听"，或者指的是他心爱的妹妹伊丽莎白，他从巴黎带了一件礼物给她，或者

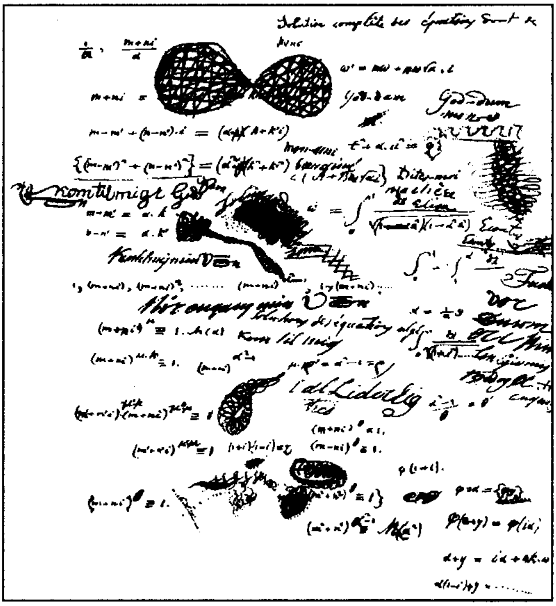


图 51

指下面最后一句的语言所暗示的一些性经历；“苏雷曼二世”指 17 世纪土耳其苏丹——阿贝尔在旅行前广泛阅读了欧洲史；“过来，我的朋友”；“现在，只有一次我的”；“代数方程的解”；“过来，尽你所能地淫荡吧。”

阿贝尔对他已经提交给科学院的论文极其乐观，他坚信，一份充满溢美之词的报告即将出现。毕竟，他只是猜测，那些伟大的数学家一定会认识到那篇论文的价值。然而，他没有想到的是，被任命为评阅人的两位数学家，由于不同的原因，都不适合这项任务。勒让德那时有 74 岁了，他缺少耐心看完一篇冗长的手稿，况且用他的话说，手稿“几乎看不清楚……用很浅的墨水写的，字母拼写得很糟糕”。另一方面，柯西正处于自我本位阶段的顶峰，或者，用数学史家埃里克·坦普尔·贝尔的话说，“正忙着孵自己的蛋，为它们咯咯地叫着，所以他没时间检查谦虚的阿贝尔已经放在他窝里的真正大鹏的蛋。”这些不幸的境况的最终后果是，勒让德不愿麻烦，而柯西弄错了论文集，把阿贝尔的论文夹在了他的一堆论文中，后来就遗忘了它。想想这吧，一个天才的杰作——也许像克洛德·莫奈（Claude Monet）的绘画《印象：日出》对于印象流派的发展那样是开创性的——被错放和遗失。仅仅两年后，勒让德就通过与阿贝尔的通信弄懂了手稿的内容，阿贝尔那时已经返回了挪威。

在 1829 年熟知阿贝尔论文的人是伟大的德国数学家卡尔·古斯塔夫·雅克布·雅克比（1804～1851）。他在 1829 年 3 月 14 日以毫不掩饰的激动写信给勒让德：

> 阿贝尔先生所做的对欧拉积分的一般化工作是多么了不起的一项发现啊！有谁看到过别的堪与比美的发现吗？然而，这项也许称得上这个世纪最伟大的数学发现，两年以前就提交给你们科学院了，却居然没有引起你们的注意，这究竟是怎么一回事呢？

勒让德的回信为自己提出的辩解是令人失笑的，他说，感到论文“简直

无法辨认”。

阿贝尔在巴黎度过了两个多月，他的钱包越来越瘪，心情越来越阴郁，健康不断恶化。笔记中他仅记录了两个熟人。一个是数学家约翰·狄利克雷（Johann Dirichlet，1805～1859），他尽管比阿贝尔小，却已经通过（与勒让德合作）证明了 $n=5$ 时的费马大定理而有了名气。也就是说，他证明了不存在整数 x，y，z，使得 $x^5+y^5=z^5$。另一个是雅克斯·弗雷德里克·塞克（Jacques Frédéric Saigey），他是数学与天文学评论《费律萨克男爵通报》的编辑，阿贝尔为其写过几篇文章，这几篇文章基本上总结了他发在《克列尔杂志》上的论文。

疾病开始缠上阿贝尔，他认为自己患了纠缠不休的感冒，并且他一定咨询过几个医生。两年后，在他临终的卧榻上，可以听到他的喊叫，“在那里，你可明白，他们在巴黎说的不真实——我当然没有肺病。”从这里我们可推断出，法国医生的诊断是令人吃惊的——肺结核。在那时，阿贝尔拒绝承认他的病情，更惨的是，他的希望破灭，钱也将用光，于是他决心在 12 月 26 日离开巴黎去柏林。

他刚抵达柏林就病倒了。这可能是他很快就要离开人间的第一个征兆。克列尔竭力在财政上帮助阿贝尔，并且阿贝尔还从洪堡那里借了一笔钱。奇迹出现了，经济上的忧虑和恶化的健康都没有阻止阿贝尔完成他到目前为止影响最深远之作——“椭圆函数研究”，在他的《全集》中长达 125 页。这篇论文对人们熟悉的三角函数（例如 sin，cos）进行了极其一般化的处理，并且在数论中有重要的分支。克列尔想说服阿贝尔留在柏林，直到他能为阿贝尔争取一个职位。然而，阿贝尔很疲劳，并且遭受着思乡的痛苦。在 1827 年 5 月 20 日，由于债台高筑，并且看不到获得一个职位的前景，阿贝尔回到了克里斯汀尼亚。

回　　家

1827 年在克里斯汀尼亚的状况证实了阿贝尔的最坏的担心。回顾

一下他的补助是怎样的，就能明白回到挪威后他的经济来源枯竭了。在财政部拒绝他延长奖学金的申请后，学校设法拿出一小笔津贴给他生活（不过，财政部保留从他未来收入中扣除这笔津贴的权利）。即使有了这笔津贴，阿贝尔仍不得不为学生补习，以弥补起码的生活。克莱莉，他的未婚妻，在史密斯家谋得一个新的家庭教师工作，史密斯拥有挪威南部弗罗兰德的铁厂。

从 1828 年开始，阿贝尔的经济状况有了重要的改善。汉斯丁教授成功地得到一大笔赞助，用以研究地球磁场，因而使阿贝尔可以成为他在大学和军事学院的临时代课老师。同时，阿贝尔突然发现自己卷入了科学出版的竞赛中，这是他以前从未有过的体验。1827 年 9 月，出现了不是一篇，而是两篇椭圆函数的论文：其一是阿贝尔厚重的“椭圆函数研究”论文第一部分，其二是由年轻的德国数学家雅克布·雅克比（Jacob Jacobi）得到的结果。不想被捷足先登，阿贝尔疯狂地跑去印刷了他的手稿的第二部分，他在上面加了一条注释，以显示雅克比的结果是如何从他这里获得的。更重要的是，从本书的视角来看，他停下了正着手的应该是使用公式解方程问题的权威性答案的工作。这为另一位年轻的天才——埃瓦利斯特·伽罗瓦——提供答案和引入群论打开了一扇门。

在这时，对阿贝尔才能的认识正传遍欧洲。勒让德开始与阿贝尔和雅克比就椭圆函数理论通信，并宣称“你们俩［阿贝尔和雅克比］所做的这些工作将使你们处于当代最重要的分析家之列。”除了数学声望，阿贝尔不稳定的经济状况的现实，特别是通过克列尔孜孜不倦的努力，也开始为一些欧洲数学家所知。在一次空前的支持行动中，四名法国科学院的杰出成员写信给挪威和瑞典国王查理十四，劝他注意此事，以便创造一个与阿贝尔的天分相称的职位。但这些努力并未奏效。

阿贝尔与克莱莉和史密斯一家在弗罗兰德度过了 1828 年夏天。用他的话说，这是一个“到处都是天使”的地方。汉娜·史密斯（Hanna Smith），史密斯家的一个女儿，那时有 20 岁，她后来描述，在她记忆

中的阿贝尔通常既可爱又有趣。她栩栩如生地描写道，在满屋女士的包围下，他习惯于带着数学论文坐下，为了节省邮寄费用，他在最薄的纸上写他的新手稿。

两年前分配阿贝尔津贴所强加的灾难性条款又回来纠缠着他。财政部长坚持说，执行管理委员会“注意以前的预付款，从阿贝尔的薪水中足额扣除”。尽管学校拒绝执行这些蛮横的命令，但阿贝尔的收入仍比一块铅下降得还要快。在那年夏天给汉斯丁太太的一张便条上，他写着“您的最受贫穷打击的人”，另一张便条上写着“我就像教堂里的老鼠一样穷……您的备受摧残的人”，这概括了他的境况。

在 1828 年秋阿贝尔返回到克里斯汀尼亚，为即将开始的新学年做准备。在 9 月份过了几周后，他病得很厉害，以至于卧床不起。然而，在 12 月中旬，那是一个特别冷的冬天，他没有听从妹妹的建议，又动身去了弗罗兰德与未婚妻一起度圣诞。圣诞刚过，他就病了，开始不停咳嗽。尽管身体虚弱，他仍设法对他的巴黎论文做了一份极短的摘要(他担心这篇论文已经被永远地丢失了)，他将这份摘要寄往《克列尔杂志》。在 1 月 9 日，阿贝尔开始吐血，地方上的医生被叫去帮忙。医生犹豫着，使用了可怕的单词“肺结核”或“肺病”，诊断阿贝尔的病是肺炎，这是一个有效的死刑。接下来的几个月对每个当事人都是可怕的噩梦。克莱莉和史密斯家两个年长的女儿日夜轮流在床榻边伺候。在许多痛苦的不眠之夜她们会听到，阿贝尔诅咒整个医学界没有取得足够的进步来帮助他。过了几天身体稍微好点了。阿贝尔会重复几遍说数学家雅克布·雅克比是最能理解他的工作价值的人。有时阿贝尔会陷入自怜中，并且痛苦地抱怨一直与他做伴的贫穷。当冬天一天天过去时，阿贝尔的话语也逐日变得越来越沙哑，直到他周围的人几乎无法听清他的话。当春天来到时，他的情况更加恶化了。在经过 4 月 5 日的一个痛苦的夜晚后，这位年轻的挪威天才在 4 月 6 日凌晨 4 点离开了人世，克莱莉和史密斯家的一个姑娘陪在他的床边。他时年 26 岁。精神崩溃的克莱莉在 4 月 11 日写信给汉斯丁太太：“我的阿贝尔死了！我在这世上已

一无所有！没了，什么都没了。”

在4月8日，不知道阿贝尔已死，克列尔从柏林写了封信给他，喜气洋洋地道贺：“现在，我的亲爱的，可贵的朋友，我带给你一个好消息。教育部长已经决定让你来柏林，并且聘任你。”

在1829年4月13日，一场暴风雪之后的一天，阿贝尔被葬在了弗罗兰德。他的朋友克列尔为他购买了墓碑。在他的悼词中，克列尔写道：

> 异乎寻常的光辉和思想力形成了阿贝尔所有的工作……困难似乎都消失在他天才的志在必得的奋斗下。但是不仅是他极高的天分……使他的死无限可惜。他还以品行纯洁和高尚，特别谦虚而闻名，这使他这个人就像他的天分一样值得特别珍视。

1830年6月28日，法国科学院宣布，将代表数学成就的Grand Prix① 奖同时授予阿贝尔和雅克比两人。

但是，阿贝尔巴黎论文下落如何？在雅克比与勒让德交流后，并在挪威驻巴黎领事的干预下，1830年柯西终于同意公开手稿。过了11年，手稿终于得以印刷。但是，在这个遭人忽视的传奇即将画上句号时，手稿又在印刷过程中消失了，直到1952年才在佛罗伦萨重新露面。

在2002年，挪威政府成立了一个2200万的基金，以此授予数学方面的阿贝尔奖。挪威国王提议将该奖以诺贝尔奖的方式颁发。第一届奖，奖金816000美元，在2003年6月3日授予著名的法国数学家让-皮埃尔·塞尔（Jean-Pierre Serre）；2004年5月25日，第二届奖由另两位非凡的数学家——爱丁堡大学的迈克尔·弗兰西斯·阿蒂亚（Michael Francis Atiyah）爵士和麻省理工学院的艾瑟铎·M·辛格（Isadore M. Singer）先生共同获得。这个奖最终使证明了某种方程不可解的数学家

---

① 意思是大奖赛。

的名字——阿贝尔为普通公众所关注。具有讽刺意义的是，这位贫穷的数学家的杰出工作是由一笔巨额的奖金来纪念。

1826 年阴冷的秋天，在巴黎有一场从未发生的会见。阿贝尔不知道，仅仅住在几英里远的一位年轻的法国数学家正开始沉浸于令他感兴趣的完全相同的问题里，即五次方程存在公式解吗？甚或更一般地，哪些方程可以用公式解？当阿贝尔在巴黎时，埃瓦利斯特·伽罗瓦只有 15 岁，但是他已经贪婪地阅读了许多数学书，就好像每本书都是冒险故事一样。很悲哀，我们无从知道如果这两个时运不济的人会晤过一次，那将怎样改变他们的生活。不过有一件事情可以肯定：如果可以想到甚至有比阿贝尔更悲惨的故事，那么它就是伽罗瓦的故事。

第五章

浪漫的数学家

在 1832 年 5 月 30 日的早上，一发子弹从距离 25 步处射中了埃瓦利斯特·伽罗瓦的腹部。尽管是致命的创伤，伽罗瓦没有当场死去。他一直躺在地上，直到一个不露姓名的好心的撒马利亚人（也许以前是个军官，也许是个农民）发现了他，随后将他送到巴黎的科钦医院。第二天，伽罗瓦的弟弟阿尔弗雷德（Alfred）在他旁边，伽罗瓦死于腹膜炎。他的最后一句名言是："不要哭，我在 20 岁的年纪死去，需要我全部的勇气。"

这是一位最富于幻想的数学家一生的严酷结局——这位数学家令人难以置信地将莫扎特的天赋和拜伦勋爵的浪漫集于一身，所有萦绕在故事中的悲情堪比罗密欧与朱丽叶的爱情。

早年的伽罗瓦

埃瓦利斯特·伽罗瓦出生于 1811 年 10 月 25 日的夜里，在 10 月 26 日于教堂里唱了赞美诗之后取名（图 52 显示了出生证明，附录 8 给出了延长的家谱）。其父尼古拉斯-加布里埃尔·伽罗瓦（Nicolas-Gabriel Galois，图 53）是一位有教养的人，他当时正在布尔-拉-林城（今天巴黎的一个郊区）管理着一所十分有名的少年学校——这是他继承自埃瓦利斯特的祖父的职位。闲暇时，尼古拉斯-加布里埃尔创作风趣的散文和娱乐剧，这两种写作使他在那时成为乡间宴会上受欢迎的客人。其母阿代累达·玛利亚·德芒特（Adélaide Marie Demante）是一位巴黎法院法官的女儿，她本人精通古典文化。德芒特家几乎正好住在格兰德大街 54

号——伽罗瓦家的斜对面（图 54 显示了仍存在时的伽罗瓦家）。

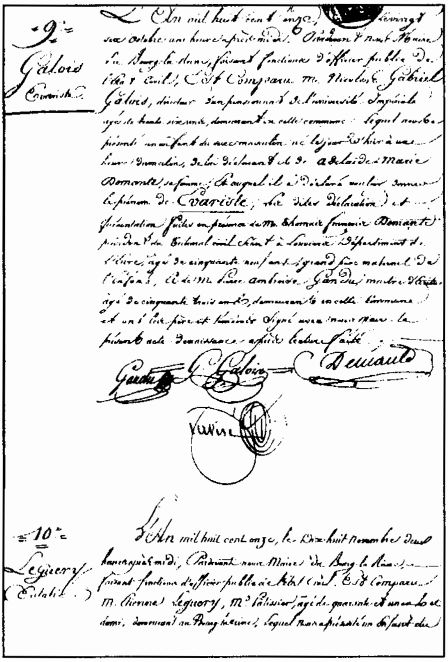

9e
Galois
Evariste
L'An mil huit cent onze
Evariste
Galois
Demante
10e
Leguery
L'An mil huit cent onze

图 52

图 53

图 54

在拿破仑执政中期，尼古拉斯-加布里埃尔是一名忠诚的帝国国民。他的兄弟甚至更忠诚地成为一名皇家禁卫队的军官。然而，由于后革命时代特别狂暴，并在俄罗斯遭受巨大失败后，拿破仑被迫于1814年退位，这有利于波旁王朝国王路易十八。这位国王目空一切的行为，再加上教会力量的逐渐恢复，足以重新点燃自由运动，尼古拉斯-加布里埃尔是自由运动有力的支持者。乘着公众不满的风云，拿破仑抓住机会在1815年3月返回政坛，只是在100天后又失败了，这次是永远的失败。在拿破仑短期复出期间，尼古拉斯-加布里埃尔被任命为布尔-拉-林的市长，即使拿破仑遭遇滑铁卢之后他仍继续保持此位置（图55，相当于尼古拉斯-加布里埃尔的一张护照）。频繁的权力变更和如变色龙一样的政治气候有助于法国社会分化为两个相对不同的阵营。左翼是自由党和共和党人，他们的思想广泛受到法国革命的洗礼。右翼是“正统王朝派”或“过激论者”（是激进的保皇党人的缩写①），他们的理想社会是一个教会占支配地位的君主政体。

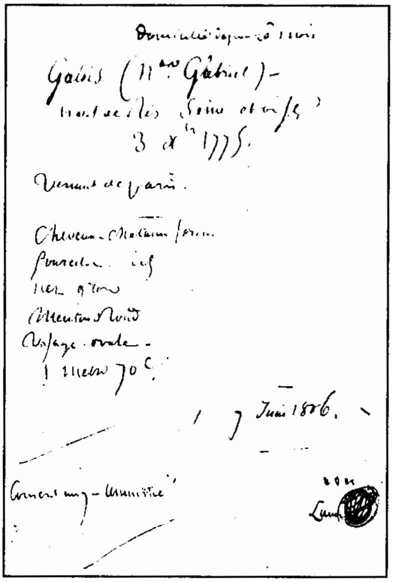


图 55

像阿贝尔一样，伽罗瓦在家接受了启蒙教育。阿代累达·玛利亚给她的孩子们提供了浓烈的古典文化和宗教学问背景，同时也向他们灌输自由思想。甚至在伽罗瓦满10岁后，他母亲对最初送他去兰斯的一所学校的想法感到后悔，并决定让他在家再待上2年多。

① wltras 是单词 wltraroyalists 的缩写。

在 1823 年 10 月，埃瓦利斯特终于离开了家，来到巴黎寄宿学校路易-勒-格兰德皇家中学。这座久负盛名的学校从 17 世纪就一直存在，它的杰出毕业生有革命者罗伯斯庇尔（Robespierre）和后来的小说家维克多·雨果（Victor Hugo）。在伽罗瓦入学前，甚至在法国革命喧嚣的年代，学校也鹤立鸡群地保持开放。尽管学校成果斐然，但它坐落在一座像监狱一样的建筑中，这座建筑物急需修理。学生是当时法国社会各政治阶层的优秀代表，这是动荡年代保持稳定的一个处方。学生中的叛乱、争吵和骚动是路易-勒-格兰德中学的常见现象。强加给学生的比军队还严格的纪律进一步滋生了反抗情绪。铁打不动的作息表，开始于下午 5:30，在上午 8:30 急剧结束，这个表被一丝不苟地执行，只允许极少的娱乐时间。甚至在吃饭时必须保持沉默，而这些饭本身极其缺乏营养。例如，早饭只有干面包和水。

在教室里，学生们成双地坐在光秃秃的台阶上，两人共用一只蜡烛照明。在课上老鼠穿行于教室地面是如此司空见惯，以致于不会引起注意。对管理程序稍有违逆——甚至只是在吃饭时拒绝食物——都会造成在单人房被单独监禁，这种单人房一共有 12 间。所有这一切，从安宁的、幸福的家庭氛围到粗暴的、受限制的学校环境的过渡一定给了伽罗瓦相当大的冲击。

在伽罗瓦进入路易-勒-格兰德中学前不久，保守的尼古拉斯·伯索特（Nicolas Berthot）被任命为学校校长。学生们怀疑这种安排只是右翼打算让学校恢复到耶稣会士掌握中的第一步。于是学生们通过做礼拜时拒绝唱赞歌和在 1824 年 1 月 28 日的一次学校宴会上不顾惯例，未向国王路易十八和其他高官显贵敬酒来表达他们的不满。学校的反应既迅速又严苛——117 名学生立即被驱逐出校。伽罗瓦那时刚上第一学期，未卷入该事件，但是无疑他的感情也受到了影响。

即使在耻辱的环境和不人道的苛刻的纪律下，伽罗瓦在路易-勒-格兰德中学的头两年仍取得了相当大的成绩。母亲给予他的出色的古典文化促成了他在拉丁语叙事和希腊文翻译方面的优势。在综合竞赛考试

中，他也收获了数学奖。然而，阴沉的环境也造成了一些损失。1825～1826年的那个潮湿的冬天给他带来了持续几个月的耳痛，这对伽罗瓦总是低落的情绪没什么好处。伽罗瓦的父亲通常喜欢与他交流风趣的对联，与其父的分离也使这个少年很难受。因此，他的学业开始变差。

发生在校门之外的政治事件变化很快。路易十八在1824年9月死去，由其弟继位。其弟自称查理十世国王。这次交接标志着教会与极端右翼保皇党人的力量急剧增长。当时，一直不被认同的“反宗教罪”的罪名可以执行死刑。

一位数学家的诞生

1826年秋见证了伽罗瓦第一次耻辱的退步。这发生在修辞班。当伽罗瓦在这门课上即使不热情却勤奋的努力已经大体得到了他的老师的欣赏时，新的极端保守的学校校长皮埃尔-劳伦特·拉博里（Pierre-Laurent Laborie）却有相当不同的看法。在他的僵化的观念里，伽罗瓦太年轻而不适合上高级班，他认为伽罗瓦需要“只有再成熟一些才会具有的判断”。因此1826年1月，令伽罗瓦及其父亲惊愕的是，他被迫重修三年级。诸如“有创造力的和古怪的”与“好的但是反常的”这样的短语出现在描述其性格的成绩单上。不过，在修辞班上的这次不愉快的经历却阴差阳错地使伽罗瓦对数学感兴趣。图56显示了大约在同一时期的伽罗瓦的一张肖像，由他的同班同学所作。

图 56

新来的见习数学教师西波里特·维纳（Hippolyte Vernier）先生决心引入一本新的几何研究的书，即勒让德的《几何原理》。该书于1794

年出了第一版，之后很快就风靡全欧洲。截至那时，这本经典教科书打破了稍微有点乏味的欧几里得传统中学几何。勒让德说，对数学如饥似渴的伽罗瓦仅在两天内就饱览了他的整本书，而这本书原本是要上足两年课程的。尽管不可能证实这个（可能夸大其词的）故事的真实性，但是毫无疑问，到 1827 年秋，伽罗瓦已经对其他任何科目失去了兴趣，唯有对数学如痴似狂。他的修辞学老师在第二学期之后正确地概括说：“他已经沉迷于数学的激动中。如果他的父母允许他只研究数学，我认为这对他是最好的。”起初，这位老师不理解伽罗瓦在课堂上的无精打采，并这样描述他的平凡表现：“在他的作业里除了奇怪的幻想和粗心大意外一无是处。”第三学期只是验证了这种判断：“被他对数学的激情所左右，他总是对其他事情视若无睹。”

伽罗瓦的确被数学迷住了。他丢掉传统教科书，一头扎进原始研究文章。他一本接一本地阅读专业数学文章，就像现在的一个比较普通的青年会连续地看哈利·波特系列故事一样，他现在完全沉浸在拉格朗日的论文集《论数值方程解法》和《解析函数论》中。这种开拓智力的体验促使了一次野心勃勃的尝试。伽罗瓦完全没有注意到鲁非尼和阿贝尔的工作，他花了两个月的时间尝试解五次方程。正像之前年轻的阿贝尔一样，伽罗瓦起初也认为自己已经找到了公式，只是随后就失望了，因为他发现了在他的解里的一个错误。图 57 显示了一个后来编辑的脚注，这个脚注指出，伽罗瓦重复了阿贝尔的错误（认为他已经解出了五次方程），而且，

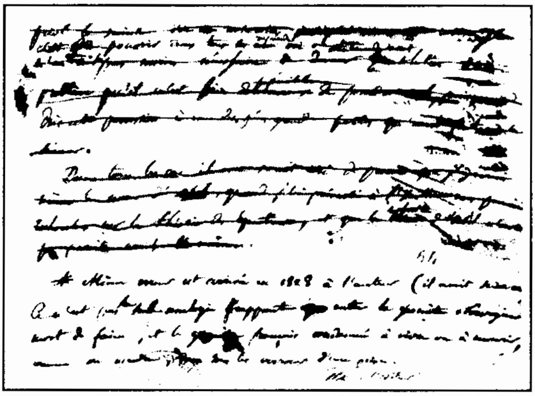


图 57

“这种错误并不是阿贝尔和伽罗瓦之间唯一惊人的相似之处，阿贝尔饥饿而死，伽罗瓦在从监狱里释放之后……自赌生死。”如同阿贝尔的情形，这个较小的挫折只是推动了伽罗瓦研究与代数方程不可解有关的更大问题。

还有更严重的障碍在后面，其中有些是伽罗瓦自己的不足。正如维纳先生所说的那样，尽管伽罗瓦具有天分和创造性的想象力，他却永远不能有方法地学习和系统地工作。在一些科目上取得了极大的进步，却在另一些科目上缺乏一些最基本的基础。未注意到他自己的缺陷，并且不理会维纳的建议，伽罗瓦在 1828 年 6 月勇敢地参加了传奇的综合技术学院一年一度的入学考试。综合技术学院创办于 1794 年，是培养工程师和科学家的主要学校。拉格朗日、勒让德、拉普拉斯和其他著名科学家都曾经在这里任教。学校也以其自由的氛围而著称。如果伽罗瓦通过了考试，那么对于他的攀登精神而言综合技术学院将是一个理想的培养场所。然而，由于准备不充分，伽罗瓦名落孙山是意料中的事。期望落空可能是他受害感的根源，他的受害感后来发展成明显偏执的念头。

伽罗瓦无奈地继续待在路易-勒-格兰德皇家中学，但他进入了路易-鲍尔-埃米尔·理查德（Louis-Paul-Émile Richard，1795～1849）的专业数学班。理查德之于伽罗瓦就如洪堡之于阿贝尔——他是一位能鼓舞人和启发人的老师与支持者。理查德本人不是一位耀眼的数学家，但是他熟读当时最新的数学成果。他很快就认识到伽罗瓦不同寻常的能力，并且鼓励他从事原创性研究，他热情地指出：“这个学生大大超过了他的其他同学。”他也指出，“这个学生只研究顶尖的数学。”正如毕加索的母亲和姐姐完全注意到他非凡的天赋，保留了他所有少年时代的绘画一样，理查德保留了 12 本伽罗瓦课堂作业的笔记本。这些文献最后保存在科学院的图书馆里。伽罗瓦同时遇到的另一位数学家是雅克斯-富兰索瓦·施图姆（Jacques-François Sturm，1803～1855）。施图姆后来成了少数直接认识到伽罗瓦的思想是未琢之钻石的人之一。

伽罗瓦在 1829 年发表了他的第一篇数学论文。这篇相对次要的论

文处理了被称为连分数的数学问题。这篇文章在二次方程方面有些应用，它发表在《纯粹与应用数学年鉴》杂志上。巧合的是，在伽罗瓦发表了第一篇论文的5天后阿贝尔去世。对于伽罗瓦而言，在数学研究方面初次施展手脚后不久他就转向揭示新思想。17岁的少年将要使代数学产生革命。尽管阿贝尔毫不含糊地证明，只使用涉及简单代数运算和开根号的公式不能解出一般五次方程，他过早地辞世却的确留下了更大的问题：一个人如何判断任何给定的方程（五次或更高次）是否可用公式解出？回想一下，许多特殊方程仍然是可解的。原则上，阿贝尔的证明仍允许每个具体的方程可以拥有自己的公式解。

为了回答可解性问题，伽罗瓦不仅必须引入开创性的群的概念，而且要阐述一门完整的新的代数学分支，现在人们称之为伽罗瓦理论。作为一个起点，伽罗瓦重新捡起了拉格朗日丢下的方程理论。他深入研究了一个方程的设定的解之间的关系（例如在四次方程 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的4个解 x_1，x_2，x_3，x_4 中的2个之间的关系 $x_1x_4=1$）与让这些关系保持不变的这些解的置换（参见注释中的例子）。然而，这才仅仅是他天分真正起飞的地方。伽罗瓦设法把该方程与该方程的一种“遗传密码”——这个方程的伽罗瓦群——联系起来，并且证明了伽罗瓦群的特点决定了这个方程是否可用一个公式解出。在这里，对称成了关键概念，伽罗瓦群是一个方程的对称性的直接量度。我将在第6章描述伽罗瓦的天才的证明的实质。理查德完全被伽罗瓦的思想打动了，所以他提出综合技术学院应免试让少年天才入学。为了给伽罗瓦一个实现抱负的机会，他鼓励伽罗瓦将其理论形成两本论文集的形式。为了呈给科学院，理查德准备亲自把这两本论文集带给伟大的柯西。1829年5月25日和6月1日论文集确实被提交了，由柯西做了简短的介绍，然后委托给柯西、约瑟夫·傅里叶（学院的秘书）以及数学物理学家克劳德·纳维尔与德尼斯·泊松审查。

在提交论文6个多月后的1830年1月18日，柯西向学院写了下面这封道歉信：

今天我必须向学院呈交的，首先是一份有关年轻的伽罗瓦的工作的报告，其次是我的一本关于初始根的分析决定的论文集，在这本论文集中，我阐述了如何减少所有根都是正整数的数值方程的解的决定因素。我现在身体不适待在家中。很遗憾不能参加今天的会议，但是我希望你们安排我参加下一次就这两个主题进行的会议。

然而，到 1 月 25 日再次举行会议时，自私自利的倾向显然再次支配了柯西，他只介绍了自己的论文集就结束了，而对伽罗瓦的论文内容又只字未提。不过，与这些手稿有关的不幸并未结束。1829 年 6 月，科学院宣布为数学建立一项新的 Grand Prix 奖。由于厌烦等候柯西的裁决，并且已经从《费律萨克男爵通报》获悉了阿贝尔关于方程理论的工作，伽罗瓦对其论文作了修改，他决定再次提交，以问鼎该奖。（我没有发现直接的证据可以支持柯西鼓励他尝试该奖的推测，尽管后来描述的一些间接的证据指出，柯西已经对其工作留下了印象。）伽罗瓦提交的文章（“一个方程可通过开方解出的条件”——四则算术运算和开方）后来被推为数学史上最具启发性的杰作之一。学院在 1830 年 2 月才收到其文章，此时离 3 月 1 日截止日期已不远。评委会包括数学家勒让德、泊松、拉克鲁瓦和波安索。不知什么原因，学院的秘书傅立叶把伽罗瓦的手稿带回了家，他在 5 月 16 日去世，但从未在他的文件中发现手稿。因此，由于对伽罗瓦一无所知，在评奖时甚至从未考虑过他。奖金最终颁发给了阿贝尔（已去世，颁发给其他人比较合适）和雅克比。你可以想得到，当伽罗瓦最后获知他的手稿被搞丢后的愤怒。日思夜想的年轻人现在相信，所有平庸的家伙已经联合起来否认他应得的美好声誉。

两次灾难打击

1829 年 6 月是伽罗瓦相对幸福的一个月，因为他已经把重要的手稿提交给学院，而 7 月则是他最糟糕的一个月之一。查理十世在 1824 年

的加冕造成了教会与保皇党人势力的显著增加。在布尔-拉-林城，一个新的牧师加入了其他右翼管理者的阵营，他企图将自由党人尼古拉斯-加布里埃尔·伽罗瓦从市长位子上赶下来。这位年轻的牧师在几首愚蠢的对联和卑劣的警句上伪造了市长的签名。显然是由于不能应对已经散播的丑陋的诽谤，尼古拉斯-加布里埃尔-伽罗瓦通过气体窒息自杀了。惨剧发生在 7 月 2 日，尼古拉斯-加布里埃尔在圣·让-德-博韦路的巴黎公寓里，距离埃瓦利斯特的学校仅一步之遥。悲恸的年轻人不得不经受又一次感情折磨——在葬礼中发生了骚动，人们对企图参加葬礼的恶毒的牧师表示抗议。图 58 显示了对于市长尼古拉斯-加布里埃尔·伽罗瓦的纪念碑，纪念碑至今仍保留于布尔-拉-林城市政府的墙上。

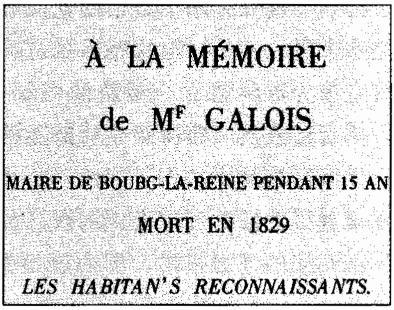


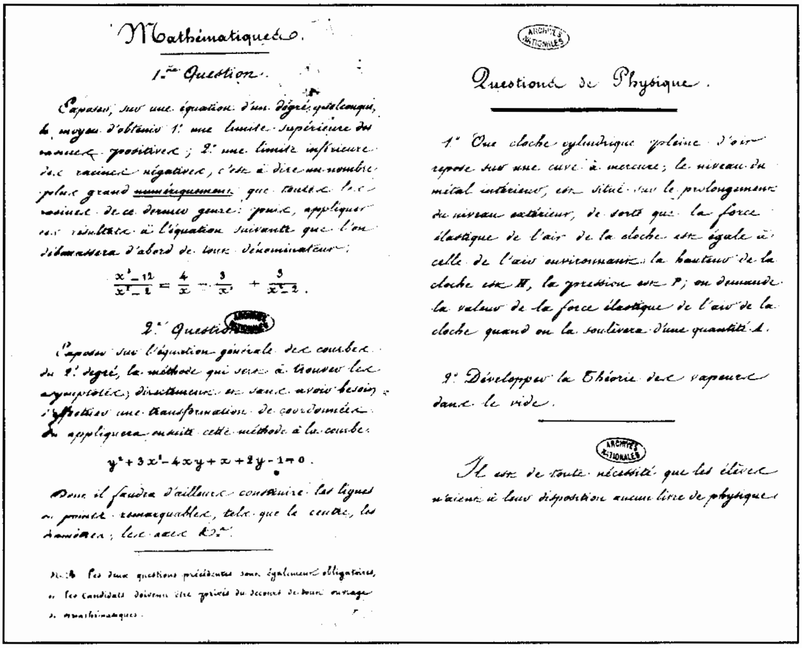
图 58

对于埃瓦利斯特来说，人们想不起有什么比他参加综合技术学院的第二次入学考试更糟糕的了。然而，造化弄人，考试恰好发生在葬礼后一个月的 8 月 3 日，星期一，此时伽罗瓦仍在服丧。在数学史上，这次声名狼藉的考试已经几乎成了伽利略被宗教裁判所审问的同义词。用数学史学家 E·T·贝尔的话说，与伽罗瓦相比，两个考官，查理斯·路易·狄奈（Charles Louis Dinet）和勒费布雷·德·富尔西（Lefebure de Fourcy），“没有资格做伽罗瓦的考官。”尽管狄奈本人以前是综合技术学院的学生，而且当年负责他的入学考试的老师不是别人，正是伟大的柯西，但是对于这两位数学家，人们记得最清楚的只有一件事——使那时最伟大的数学天才之一遭受了失败。伽罗瓦的名字根本没有出现在狄奈认为可以录取的 21 名考生的名单里。

我们无法确切地知道在这次考试中发生了什么。人们揣度说，伽罗

瓦最喜欢用脑计算，他可能只把最终结果写在黑板上，这在一次口试中留下了坏印象，因为口试要求他写出所有思考过程。尤其是狄奈以提相对简单的问题而出名，而且当谈到答案时他也完全不让步。当时伽罗瓦笼罩在父亲之死的氛围中，因此耐心已经达到了极限，这一点永远都不要仿效。有一种说法是当要伽罗瓦简要叙述算术对数理论时，他傲慢地告诉狄奈，正确地说没有算术对数。据说在考官不能理解他的非正统的方法时，他抄起黑板擦向一名考官扔了过去；这个故事不算出格，但可能是假的——至少数学家约瑟夫·伯兰德（Joseph Bertrand，1822～1900）这么认为。显然，在考试中的失败留给埃瓦利斯特的是更深的怨恨，并且加强了他的受害感。20 年后，《数学新年鉴》的编辑奥尔里·特尔克姆（Olry Terquem）说："一个较高智商的考生在一个较低智商的考官面前失败了。"在发表于 1848 年《画报》中的传记注释也断定："要不是拥有所谓的'黑板经历'，要不是已经练习过在大量观众面前大声解答详细的问题……宣布伽罗瓦不能入学。"由于最多允许参加两次入学考试，伽罗瓦现在被迫进入了声望较低的预备学校（后称师范学院）。然而，要进入这所预备学校仍有一个"小小的"障碍。即伽罗瓦不得不取得一个艺术与科学的 baccalaureate（相当于中学毕业证书）并通过口试。退一步说，他对除了数学以外的事物的全然忽视使他通过这些考试有困难。物理考官让·克劳德·佩克莱特（Jean Claude Peclet）甚至吃惊地写道"他绝对什么都不知道……人们告诉我他擅长数学。这使我极为惊讶。"然而，主要是基于他在数学上的成果，1830 年初科学部接收了他。图 59 显示了伽罗瓦的两门考试——数学（在 1828 年的普通竞赛中）和物理（在 1829 年他的最后的普通竞赛中）的第一页。

在伽罗瓦的一生中并非一切都是黑暗的。1830 年他的三篇文章——两篇关于方程式的和一篇关于数论的——发表在重要的《费律萨克男爵通报》杂志上。第一篇文章是伽罗瓦革命性的方程理论的发端之作。伽罗瓦的名字与当时主要数学家的名字一同出现在杂志上，这一定让伽罗瓦获得了一些满足。尤其在 6 月刊上，伽罗瓦的两篇论文中夹着



Mathématiques.

1.re Question.

Exposer, sur une équation d'un degré quelconque, le moyen d'obtenir 1.° une limite supérieure des racines positives ; 2.° une limite inférieure des racines négatives, c'est à dire un nombre plus grand numériquement que toutes les racines de ce dernier genre : puis, appliquer ces résultats à l'équation suivante que l'on débarrassera d'abord de tous dénominateurs :

$$\frac{x^3-12}{x^2-2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^2-2}.$$

2.e Question.

Exposer sur l'équation générale des courbes du 2.e degré, la méthode qui sert à trouver les asymptotes, directement et sans avoir besoin d'effectuer une transformation de coordonnées. On appliquera ensuite cette méthode à la courbe.

$$y^2+3x^2-4xy+x+2y-1=0.$$

Dont il faudra d'ailleurs construire les lignes et points remarquables, tels que le centre, les diamètres, les axes &c.a

N. B. Les deux questions précédentes sont également obligatoires, et les candidats doivent être privés du secours de tout ouvrage de mathématiques.

Questions de Physique.

1.° Une cloche cylindrique pleine d'air repose sur une cuve à mercure ; le niveau du métal intérieur, est situé sur le prolongement du niveau extérieur, de sorte que la force élastique de l'air de la cloche est égale à celle de l'air environnant. la hauteur de la cloche est H, la pression est P ; on demande la valeur de la force élastique de l'air de la cloche quand on la soulèvera d'une quantité h.

2.° Développer la Théorie des vapeurs dans le vide.

Il est de toute nécessité que les élèves n'aient à leur disposition aucun livre de physique.

图 59

一篇柯西的论文。同年，伽罗瓦也遇到了奥古斯特·薛瓦烈（Auguste Chevalier），奥古斯特后来成为他最好的朋友。奥古斯特和他的兄弟迈克尔向伽罗瓦介绍了新的社会主义思想，这种思想受到了被称为圣西门主义（以贵族圣西门伯爵命名）的宗教平等主义哲学的启发。这种意识形态的社会经济概念首先建立在彻底消除社会不公上。依照伽罗瓦热情的性格，他越来越卷入了暴风雨般的政治活动中，而这些活动为他招来了麻烦。

自由，平等，博爱

自从 1824 年加冕后，查理十世就引起了强烈的反对。波旁皇族的

反对者和保皇党人支配的政府的反对者分为两个阵营——共和党人与奥尔良党人。前一党派主要由学生和工人组成，他们在《百家争鸣》报纸上表达他们的革命激进观点。后一党派想用奥尔良公爵路易-菲力普(Louis-Philippe)取代查理十世，并把《国民日报》作为他们的主要喉舌。在1830年7月的选举中，反对者以政府席位的274票对143票取得了决定性胜利。由于面临退位，查理十世在7月26日发布了一系列臭名昭著的条令，企图使国家转向。首先他宣布："取消媒体自由……没有报纸和小册子……可以出现在巴黎或政府部门。"其他条令取消了选举结果，并设定了新的选举日期。条令伴有警察官员的警告，直接贴在公开场合，以便人们可以看到遭到查封的报纸。这超过了喜欢挑战的巴黎人所能容忍的范围，在7月27日，奥尔良党人路易-阿道夫·梯也尔(Louis-Adolphe Thiers)毫不含糊地号召人们起义。那天下午的头几个小时骚乱在街头上开始了。在每条街道的拐角处都可看到人们拿着家什。3天内树起了5000多个路障并爆发了大规模的战斗，巴黎所有教堂的钟声为其敲响。在那"Trois Glorieuses"("光荣的三天")里，综合技术学院的学生创造了历史，因为他们负责拉丁区内和周围的战斗。尤金·德拉克洛瓦(Eugéne Delacroix，1798～1863)的油画《自由女神领导着人民》(图60)优美地表现了"光荣的三天"的精神和爆炸性能量。在自由女神的后面，人们可以从人群中辨别出综合技术学院学生的典型帽子。

当这些重大事件正在进行时，伽罗瓦和他在师范学院的同学却受到了难以忍受的阻挠，他们被束缚在有栅栏的窗户和门后面，只能听到革命的呼声。学校的校长，M·吉尼奥(M. Guigniault)决心使用各种方式来阻止他的学生参与起义，包括威胁叫军队。在28日晚，伽罗瓦再也受不了了。他绝望地试着几次，翻越外面的围墙，但都没有成功。身上还擦伤了，他不得不接受错过革命的事实。

当硝烟散去时，几乎死了4000人。作为保皇党人与共和党人之间的一种妥协，奥尔良公爵在7月30日进入巴黎，于8月9日加冕，接受了被认定是相互妥协的头衔——法国国王路易-菲力普一世。查理十世

图 60

流落他乡，作为查理孙子的皇家教师，柯西总是忠于波旁王朝，因此也离开了法国。吉尼奥，见风使舵的师范学院校长，迅速为新成立的临时政府提供学生服务。伽罗瓦无比蔑视他那伪善的校长，于是他决心利用第一次机会揭露他的狡诈虚伪。

在布尔-拉-林城的那年夏天，令伽罗瓦家人震惊的是，那个曾经脆弱和保守的埃瓦利斯特已经转变成一位热情的革命者，他准备为他的共和理想而牺牲自己。在接下来的秋天里，伽罗瓦返回了学校，并加入了一个共和党的好战组织，即人民之友协会。在同一时期，他结交了几个注定要成为伟大的政治领袖的年轻共和党人：生物学家弗朗西瓦-文森特·拉斯佩尔（Francois-Vincent Raspail，1794～1878），法学学生路易·奥古斯特·布朗基（Louis Auguste Blanqui，1805～1881）和活跃的共和党人拿破仑·莱邦（Napoleon Lebon，1807～1856）。布朗基后来在监狱里度过了 36 年多。协会以毫不犹豫地使用斗争的甚至暴力的方式实现其目标。在它的领袖让-路易·胡伯特被逮捕之后，协会变成了一个地下秘密组织，拉斯佩尔担任了它的主席。

在师范学院，校长与伽罗瓦的紧张关系很快发展到摊牌。伽罗瓦不停地要这要那（例如一件与综合技术大学相似的制服；用于学生的军事培训），他其实一定知道这些是吉尼奥不会考虑的东西。同时，吉尼奥宣布的“好学生不应对政治感兴趣”的政策显然不是伽罗瓦所能接受的。最后，当吉尼奥于12月2日在两家学生报纸之一发表了一封信攻击路易-勒-格兰德中学的一位自由党老师时，得到的复信既迅速又辛辣。La gazette des écoles（《学校公报》）发表了下面这封来自一名“师范学院的学生”的信：

> 我认为，M·吉尼奥已经发表在昨天的《中学报》上的那封信，就是你们报纸上的一篇文章，似乎十分不妥。我想，你们会对揭露这个人的真实面貌感兴趣。
>
> 下面的事实有46名学生可以作证。
>
> 在7月28日早上，由于许多师范学院的学生希望加入起义，M·吉尼奥告诉他们两次，他会叫警察维持秩序。在7月28日的警察！
>
> 在同一天，M·吉尼奥像往常一样迂腐地对我们说：“双方许多勇敢的人已经被杀。如果我是一名士兵，我不知道该怎么做。我应该牺牲什么，自由还是正统？
>
> 第二天，这个人在他的帽子上插了一个巨大的三色玫瑰花饰。这是我们教条主义的自由党人！
>
> 我也愿意告诉你，先生，师范学院的学生们受到高尚的爱国精神的感染，最近向M·吉尼奥表白，他们打算去教育部请愿，要求武器，并且希望参加军事培训，以便在必要时保卫领土。
>
> 这里是M·吉尼奥的回复。它就像他在7月28日的回答那样自由：
>
> “向我提出的申请会使我们看起来很可笑；它是对高等学府里已经发生的事情的一种模仿：下面要讲。我本想指出，当来自这些

高等教育机构的同样的申请送给部长时，只有两位皇家委员会的成员投票赞成，他们恰恰是那些非自由党人的委员。部长接受了，因为他害怕学生们发生骚乱和他们的富于同情心的精神，骚乱和同情心似乎对毁灭大学和综合技术学院有威胁。”我相信，从某种观点看，M·吉尼奥用这样的方式保护自己是对的，这可使他避免因对师范学院的偏见而受到责难。对于他来说，没有什么像旧师范学院那样美丽的了，旧师范学院应有尽有。

我们最近要求得到一件制服，但是被拒绝了；他们在老学校里不穿它们。在老学校里，课程持续三年。尽管在建立了新学校后，第三年的课程被认为是没有意义的，但M·吉尼奥又将其恢复了。

很快，按照旧师范学院的规定，我们每月将只被允许出去一次，并且必须在下午5:00前返回。属于产生像库辛［指维克多·库辛，一个哲学家和教育委员会的保守成员］和吉尼奥这样的男人的教育系统，是多么精彩啊！

他做的一切显示了他的狭隘的见识和根深蒂固的保守主义。

先生，我希望，这些细节会使你感兴趣，你可以把它们放在你认为合适的地方，使它们对你们的报纸产生好处。

报纸编辑加了一句，他们已经慎重地从来信中删除了签名。

伽罗瓦既未证实，也未否认是这封信的作者，即使他受到了广泛的怀疑。然而，对于吉尼奥来说，这是驱逐伽罗瓦的充分的证据，他认为伽罗瓦是一个经常制造麻烦的人。在他向教育部长解释的信中，吉尼奥声称，他对伽罗瓦所说“完全承认”，并且他已经“容忍他的非传统行为、他的懒惰和他的非常古怪的性格”到了极点。

在师范学院的学生几乎没有支持伽罗瓦的。他们文学系的学生寄了一封信，站在了校长一方，他们担心自己的前途，并且可能受到了吉尼奥的怂恿。从发表在《学校公报》上的一段描写可以看出，至少有一个学生显示了一些勇气：

> 我们刚刚听说，师范学院校长分别问了每个人下面的问题：“你是《学校公报》上的那封信的作者吗？”头四个否认了，而第5个回答道：“先生，我不想回答这个问题，因为它会使我背叛我的一个同学。”M·吉尼奥对这个傲慢的、高尚的回答极其恼怒。

围绕开除伽罗瓦的痛苦交流持续了3周。那些支持吉尼奥的人在有利于证明伽罗瓦的信中塞了一些纸，这些信成了一种占据数页报纸的经常性特写。伽罗瓦在12月30日结束了他向同学们的最后一次呼吁，他这样写道：“我不为自己要求什么，只是希望你们为自己的荣誉和根据自己的良心大胆说话。”

在1831年1月2日，《学校公报》发表了一篇伽罗瓦的题为“关于科学的教学、教授、著作和考官”的文章。这是一篇非凡的宣言，它呼吁在科学教育方面进行彻底的改革。伽罗瓦大部分的牢骚今天听来仍十分恰当：

> 可怜的年轻人被迫听课或每天过着重复的生活要到什么时候？什么时候会给他们一些时间在一些不相关的计算中反思知识的积累，能够［找到一种方式］整理这种无止境的大量命题？……学生们对学习比对通过考试更不感兴趣。

可能影射他自己与考官的痛苦经历，伽罗瓦悲叹道：

> 为什么考官要以拐弯抹角的方式向考生提问？似乎他们害怕被他们正审问的考生理解；这种用人为的困难使问题复杂化的可叹的习惯的根源是什么？

不幸的是，不管他反对那个时代的教育系统是多么合理，甚至当环

境允许伽罗瓦开办他自己的“学校”时，它也不会成为伟大的成功。

波澜起伏的生活

伽罗瓦离开了学校，可以自由地追求自由主义的理想，他应募当了国民警卫队的炮兵。尽管这个组织以拥有自己独特的制服而骄傲，但它更像一个民兵组织。甚至在炮兵被解散后，伽罗瓦仍会穿着同样的制服，国民警卫队重新组织起来时只吸收纳税的平民，而他不属于他们。然而，不像一个学生有他的生活补贴——伽罗瓦现在没有收入来源。为了维持生活，他决心讲数学课，一个书商朋友为其提供拉·索邦路5号书店的一个房间。伽罗瓦在《学校公报》上登了一则广告，他将举办一个代数班，打算提供给那些“对专科学校的代数学习感到不满足，希望继续深造”的人。这对于赚钱来说不是一个好法子。十来个伽罗瓦的共和党朋友出于礼貌率先来听课，但是他们很快退出了这极其高深的课程。伽罗瓦的政治活动也不利于他，因为它们占据了他越来越多的时间。因此，伽罗瓦的教学抱负降到了低水平的辅导。

在研究前沿方面，1831年初发生了一件有希望的事情，只是后来又变成了另一次失望。伽罗瓦被要求重新向科学院提交他的论文。1月17日介绍了他的新版本《关于用根式解方程的可解性条件》，这次指定数学家德尼斯·泊松（Denis Poisson，1781～1840）和西尔维斯特·拉克鲁瓦（Sylvestre Lacroix，1765～1843）评价它。然而，两个多月过去了，从科学院没有传出任何消息。心灰意冷的伽罗瓦在1831年3月31日向院主席递交了一封询问信以宣泄他的厌恶之情，他还讥讽地补充说，“先生，我会非常感激你，如果你能邀请拉克鲁瓦先生和泊松先生公布他们是否也把我的论文弄丢了［像傅立叶所做的那样］，或者他们是否打算向科学院报告它，如果弄丢了或是根本没打算报告，我也不必费心关注了。”甚至这封挑衅的信也没有引起反应。

同时，政治事件正开始极大地影响伽罗瓦的生活。著名的数学家苏

菲·热尔曼（Sophie Germain，1776～1831）是第一位打破了流行的性别障碍并进入老男人俱乐部的妇女，她以有一种“侮辱的习惯”概括了她对那个时代的总体看法。她补充了一句悲哀的评论：“他们说，他会完全疯掉，我怕这会成为事实。”在4月，19名国民警卫队的炮兵在他们的编制被裁减时拒绝解除武装，因此被抓到了监狱。其中一位是彼歇·德·艾尔宾维尔，在涉及伽罗瓦之死时我们将谈到他。令共和党人高兴的是，在4月16日的一次公开审讯，后被称为“19人审讯”中，所有被抓的人都被宣判无罪。人民之友协会在勃艮第奥克斯·芬丹格斯饭店组织了一次大型宴会，以庆祝此事。200名共和党活动家在5月9日出席，其中包括著名的作家亚里山大·大仲马（Alexandre Dumas，1802～1870），生物学家、政治家拉斯佩尔，伽罗瓦和许多其他的人。用大仲马的话说：“在全巴黎难以找到比这200位客人对政府更有敌意的了。”当香槟开始在餐桌上四溢时，人们提了许多祝词：为1789年和1793年的革命干杯，为罗伯斯庇尔和许多其他仁人志士干杯。大仲马吐字清晰地提出了一个比较智慧的祝词，他宣布：“我为艺术而干杯！无论鹅毛笔还是画笔都可能做出像枪和剑一样多的贡献，我们已经把自己的生命献给了艺术，并准备为艺术而死。”当时，伽罗瓦正坐在一张桌子的末端，他马上站起来提了一个祝词。他同一只手里持着匕首举着酒杯，他喊道：“为路易-菲力普干杯！”后来大仲马在其文集里详细地描述了此事：

> 正当我与左首的那人在私下谈论时，突然，“路易-菲力普”的名字伴随着五、六声口哨钻入了我的耳朵。我环顾四周。一幕最鲜活的情景发生在离我15或20个座位处。
>
> 一个年轻人，一只手举着酒杯和匕首，正试图使人听他说话。他是埃瓦利斯特·伽罗瓦，后来在一次决斗中被彼歇·德·艾尔宾

维尔所杀伤，那个漂亮的年轻人①所做的就是用绢纸做蝇拍，并用玫瑰色绦带来装饰拍子。

埃瓦利斯特·伽罗瓦那时几乎不到二十三四岁。他是最热情洋溢的共和党人。喧闹声很大，对于产生喧哗的原因已经变得无从可考。

所有我可以察觉到的是，有人在威胁，并且听到了路易-菲力普的名字；拿着匕首的人的意图很清楚。

这超出了我对共和观念的认识界限。我迫于坐在左首的国王的喜剧演员的怂恿，不顾安全地从窗台跳进了花园。

我有点担心地回了家。显然，这个插曲会有它的后果。的确，两、三天后，埃瓦利斯特·伽罗瓦被逮捕了。

在大仲马的描述中存在着一些令人恼火的不确切之处（例如，关于伽罗瓦的年龄），但是基本事实无疑是正确的，在后面，我将回到那个杀伤伽罗瓦的人的身份问题。在伽罗瓦愤慨地与吉尼奥交流期间已经支持伽罗瓦的《学校公报》在5月12日的那期发表了它关于这个事件的版本："已经提出了许多祝词；好像一个煽动者，据说是个学生，从餐桌边站起来，从口袋里拔出一把匕首，并且在空中挥了挥，开始说：'这是我将用以向路易-菲力普宣誓的。'"通过挥舞匕首可以看出，伽罗瓦正威胁国王的生命。第二天他在母亲的房间里被捕了，将其关押在圣佩拉杰监狱作预防性拘禁，在1831年6月15日将其带去审讯。

法律程序开始了，主持法官例行公事地提了一系列问题，他主要想让伽罗瓦描述在宴会上的情景。然后发生了一些出人意料的事情。犯人被提问："你拿出一把匕首……并且说'为路易-菲力普干杯'了吗？"使所有人惊愕的是，伽罗瓦回答道："我有一把刀子，拿它在餐桌上切肉。我挥舞着它说：'为路易-菲力普干杯，如果他背叛了我们。'后面

① 指彼歇·德·艾尔宾维尔。

几个单词只有直接靠近我的人才可听到，因为所有的口哨声已经响起……人们把我的话理解成为路易-菲力普的身体健康干杯的祝词。”法官被迷惑了，询问伽罗瓦是否真的担心国王会放弃他的职责，并背叛祖国。伽罗瓦回答道：“国王的所有行动，即使还未显示出不守信用，也让我们怀疑他的真诚。”在法官和伽罗瓦之间的对话持续了一会。证人被传唤，既有起诉方，也有被告方的。聚会是私下还是公开的问题成了中心话题。如果是私下聚会，伽罗瓦模棱两可的祝词可以被视为一种旨在引起暴力反抗国王的挑拨。主持的法官打断了伽罗瓦自己的总结性陈词，他聪明地察觉到，这个热血青年的满不在乎的和煽动性的陈词会让他身败名裂。在经过持续半个小时的慎重思考后，伽罗瓦被无罪释放。根据传闻，当判决一经宣读，伽罗瓦就从容地从法庭的展示桌上收起他的匕首，并且静静地离开了法庭。还有种说法，在审讯中，伽罗瓦声称，当离开饭店时他已经把匕首落下了，这个传说无法证实。无论如何，冲动的19岁的少年发现自己又可以自由地走上街头。

在6月15日，即开始审讯伽罗瓦的同一天，《地球报》决定将伽罗瓦在科学院受挫的经历公之于众。很可能由伽罗瓦的朋友，薛瓦烈的一个兄弟所写的一篇文章一开头描写了伽罗瓦的天才和他独立地发现了椭圆函数（使阿贝尔声名远播）的事实。接着，那篇文章将伽罗瓦的不可思议的贡献与数学联系起来。特别是，该文将伽罗瓦关于方程不可解性的论文所遭遇的不幸进行了编年：

> 去年3月1日前，伽罗瓦先生送了一篇关于代数方程的可解性的论文给法国科学院的秘书。这篇论文是他获取Grand Prix数学奖的敲门砖。它克服了连拉格朗日本人都未解决的某些困难。柯西先生已经对作者在这方面的工作予以极高的评价。但是那件事情到底怎样呢？论文丢了，奖金也被颁发［给阿贝尔和雅克比］了，未让这位年轻专家参与竞争。在年轻的伽罗瓦给科学院的回信中，他抱怨对他的著作的漫不经心的处理，所有居维叶先生能写的就是：

> “事情非常简单。傅立叶已经被委托完成检查任务，论文因为傅立叶之死而丢失。”现在伽罗瓦重新写了论文，并再次将其递交给科学院，由泊松先生负责对其进行评价，但泊松先生仍未履行义务，结果是，可怜的作者等了5个多月，科学院也未给其只言片语的回复。

令人感兴趣的是，假如伽罗瓦本人把论文的内容提供给了薛瓦烈，我们就会明白，柯西的确表达了对伽罗瓦著作的赞赏，即使他没有向科学院显示同样的热情。也许，出于对公众批评科学院的漫不经心的反应，泊松和拉克鲁瓦最后提交了他们对伽罗瓦著作的评价。他们的报告完成于1831年7月4日，在7月11日科学院的会议上被陈述。冷淡的报告清晰地说明，泊松和拉克鲁瓦也没有理解或至少对伽罗瓦创新性的群论思想持有偏见，大会报告起草人不负责任地写道：

> 我们已经尽力来理解伽罗瓦先生的证明［一个方程存在公式解的条件］。但他的推理既不够清晰，也展开得不足以使我们能够判断其正确性，所以在这份报告里我们无法给出一种看法。作者指出，他的论文中的一些针对特殊主题的命题是一种一般理论的一部分，这种一般理论可以产生许多其他应用。经常见到的是，一种理论的不同部分可以互相印证，并且整体把握比孤立地考虑更容易。因此，我们应等待作者发表他的全部著作，以形成一种定论；但是对于目前这篇把部分著作提交给科学院的论文，我们不能推荐你获得认可。

科学院采用了这份消极的报告。我们承认，清晰从来不是伽罗瓦最擅长的，即使由此为伽罗瓦开脱，但是从结论中可以肯定的是，在代数学史上最有想象力的突破之一的杰作只得等待保守的读者终有一日可以接受。基本上，伽罗瓦的思想成了牺牲品，因为这不是泊松和拉克鲁瓦

所期望的。评判人认为，他们会在手稿中找到一条基于系数的简单准则，这个准则会直接告诉他们，任何特别的方程是否可由一个公式解出。但出乎意料，他们找到了一个全新的概念——群论——和方程存在公认的解的条件。不过，这在 1831 是太过于创新了，所以没有被接受。

入　　狱

科学院的判决给了伽罗瓦巨大的打击。然而，他相信自己的命题的正确性，他在泊松对于手稿的批评性评注下方加了几个单词："让读者判断吧"（图 61）。由于科学上所受的磨难和政治上的暴力倾向，他与母

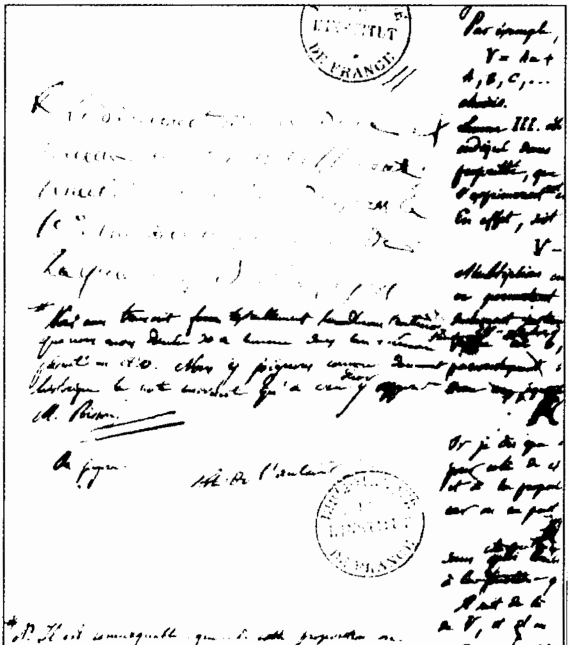


图 61

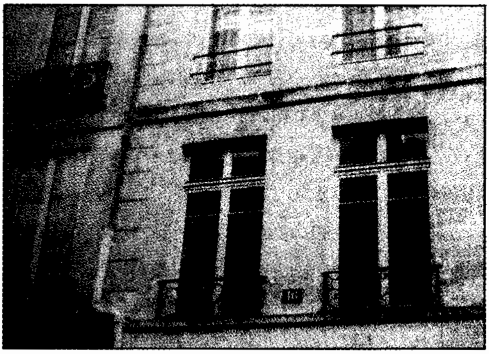


图 62

亲之间的关系也逐渐令人不快地紧张起来。因此，他离开了家人，自己在伯纳丁路 16 号租了一个房间（图 62）。

祸不单行，但是这次是军队引起的。攻占巴士底狱大革命纪念日（7 月 14 日）快到了，共和党人正筹划一次大型行动。他们想举行一个挑衅的仪式来特别纪念 40 年前在巴士底宫种下的一棵象征自由的树。警察采取了预防措施，并且在 7 月 13 日与 7 月 14 日之间的夜里逮捕了许多知名的活动家。伽罗瓦要想逃脱监禁，只有两条路：或者不上警察的“黑名单”，或者不在房间里睡觉。然而，大约在 7 月 14 日中午，伽罗瓦和他的朋友欧内斯特·达恰特里特（Ernest Duchatelet），文献学校的一个学生，领着约 600 人的一个队伍开始穿过新桥。埃瓦利斯特正穿着他的（那时是违法的）国民警卫队的制服，并且全副武装（带了几把手枪，一支装满了子弹的步枪，和一把匕首）。为了防止聚会可能产生的破坏，警察迅速干预了。伽罗瓦和达恰特里特在桥上被逮捕了，当时另一些共和党领袖在别处。使事情更糟糕的是，达恰特里特在囚室的墙上画了一个象征国王脑袋的梨（图 63 显示了画家所做的一幅漫画，在漫画中路易-菲力普变成了一个梨）。紧邻国王的头画了一个断头台，并且附有受那时的共和党人欢迎的宣告：“哦，自由女神。菲力普把他的头送上了您的祭坛，”审讯伽罗瓦和达恰特里特开始于 1831 年 10 月 23 日。由于对穿着违法的制服的指控几乎不能否认，十分清楚，伽罗瓦将被宣布有罪（在那时携带武器是十分寻常的）。有点使人震惊的是不合理的苛刻的 6 个月牢狱刑期。达恰特里特可能在制造麻烦方面名声较小，只判了 3 个月监禁。（无论如何我也找不到证据支持一

个推测，这个推测是，达恰特里特的刑期被减是以他同意与警察合作为交换条件的。）伽罗瓦上诉了，但是他的刑期在 12 月 3 日得到了确认。他们都被送到了离植物园不太远的巴黎第五行政区的圣佩拉杰监狱（图 64）。在其他被逮捕的共和党人中，生物学家拉斯佩尔本身是人民之友的一位杰出领袖，在 1832 年 1 月审讯他期间，他特别富有鼓动力。他竟然宣布，“背叛了他的人民的国王应该被活埋在杜伊勒里的废墟里。”毋庸置疑，这种陈辞不会让他获得法官的许多同情，他被判在圣佩拉杰监狱待上 15 个月。

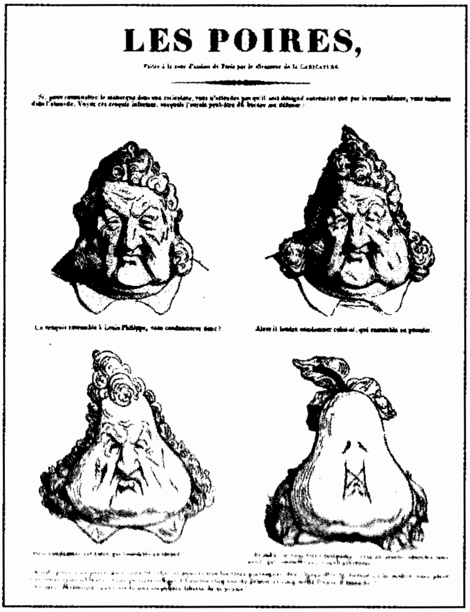


图 63

图 64

圣佩拉杰监狱是在那个时期的巴黎人们愿意住的那类监狱。一堵巨墙包围了整个监狱，建筑主要是许多囚房，这些囚房分布在三进内院里。根据犯人们的犯罪类型安排他们的住处，政治犯占了一个侧院。按照伽罗瓦的经济能力，他属于

最低级别的，最有可能住进一个6人间宿舍。那些能付得起钱的甚至可以住进单间，自己支付生活费用，从当地饭店购买食品。关于伽罗瓦在监狱里的凄惨状况的大部分信息来自3位关心这位年轻人的人的作品：他的亲密战友拉斯佩尔，他的《巴黎监狱通信》8年后发表；诗人杰拉德·得·奈瓦尔（Gérard de Nerval，1808～1855），他在1832年2月被逮捕，甚至写过一首关于监狱的诗；伽罗瓦亲爱的姐姐，娜塔莉-西奥多（Nathalie－Théodore），她尽可能经常地看望她的弟弟，并且力所能及地为他加强营养，抚慰他的精神。在拉斯佩尔的文集中描述的两件生动的事件特别值得注目。在7月29日，当犯人们正在纪念"光荣的三日"的第三天时，一发子弹从监狱前面的隐士井路射伤了伽罗瓦囚房的一位犯人。在一次接下来的犯人代表团与监狱长的会议中，伽罗瓦作为代表团的一名成员，明确控告了一名监狱看守是射手，并且进而侮辱了监狱长。因此，他被投入了地牢里，这引起了犯人们的激烈反应。拉斯佩尔引用一个犯人与监狱长的谈话："您知道，这个小伽罗瓦没有提高他的嗓门；当他和您谈话时，他仍然像他的数学一样冷冰冰的。"其他犯人一致地表达了他们的意见："地牢里的伽罗瓦啊！噢，那些杂种们！他们仇恨我们的小学者。"随着这表示支持的惊呼，犯人们控制了监狱，并且仅在第二天就恢复了秩序。由于害怕进一步的骚乱，伽罗瓦被从地牢里放了出来。对于伽罗瓦企图自杀的描述，拉斯佩尔也语焉含糊，让人烦恼。显然，年轻的伽罗瓦还没有习惯于酗酒，因此经常喝得昏死过去，还受到了他的狱友的嘲笑。"你是一个喝水的人，年轻人，"他们嘲弄他，"吟游诗人（犯人们给伽罗瓦起的绰号！）脱离共和党，回到你的数学中去吧。"在一次这样的场合，喝醉了的年轻人向拉斯佩尔吐露自从父亲死后他所经历的苦闷："我已经失去了父亲，没有人会取代他。"他接着补充了一句："我将因为下贱的卖弄风情的女子在一次决斗中死去。"这句话将证明是一个充满寒意的预言。当拉斯佩尔和几个别的犯人试图将他放在床上时，烂醉的伽罗瓦嚷道，"你们让我绝望，你们谁是我的朋友！你们是对的，但是我犯了罪，所以必须自杀！"只是在犯

人们的迅速的干预下才阻止了伽罗瓦实施他的自杀念头。

奈瓦尔对他在监狱里的最后几分钟的描述同样感人："现在是5点钟了。一个狱友将我领到门口，并且吻了我，他答应一出监狱就来看我。他还有两三个月的刑期。这是不幸的伽罗瓦，我再也没有看到他，因为他在获得自由的早上就在一次决斗中被杀死。"

不过，伽罗瓦的姐姐，娜塔莉-西奥多，描绘的关于他弟弟的身体和心理状态的画面最伤感。在一次痛苦的探视后，她在日记中苦恼地写道："还要忍受5个多月，不能呼吸新鲜空气！这是一种很糟糕的前景，我怕他的健康会因之受损。他总是那么累。他不让自己被任何想法搞得心烦意乱，他性格忧郁，这使他比他的实际年龄老成。他的眼睛是空空的，就好像他50岁了。"

当不喝酒时，伽罗瓦的大部分时间都在监狱的院子里不停地踱步，通常在深沉地思考。晚上共和党人会进行热闹的聚会，并且绕着三色旗举行爱国仪式。不过，伽罗瓦还是找到了时间，来为他的数学杰作写一个很长的前言（图65显示了第一页）。这真是对整个科学的建立及其实践的严厉的控诉。前言首先嘲弄了科学等级和对获取支持的需要所施加的极端限制。

> 首先，你们会注意到，前言的第2页并未受到诸如姓氏、教名、标题、荣誉和一些吝啬王子的颂词的影响和阻碍，这些吝啬王子只懂得在香烟燃起时把钱包打开，烟盒空了再关上。实际上，从比你的头还高三倍的论文堆中，你是看不到对那些权威的科学名人和那些明智的资助者的丝毫敬意的。这种情形，对于任何一个打算在20岁就写东西的年轻人来说，想必是不可或缺的（我想说是不可避免的）。

如果一个人用"赞助商"取代单词"王子"，那么伽罗瓦的观点在今天将仍与在170年前一样典型。一个卓越的科学家曾告诉我："在写

我打算做什么的资助建议与我已经做了什么的报告之间，实际上没有留下时间做别的事情！”

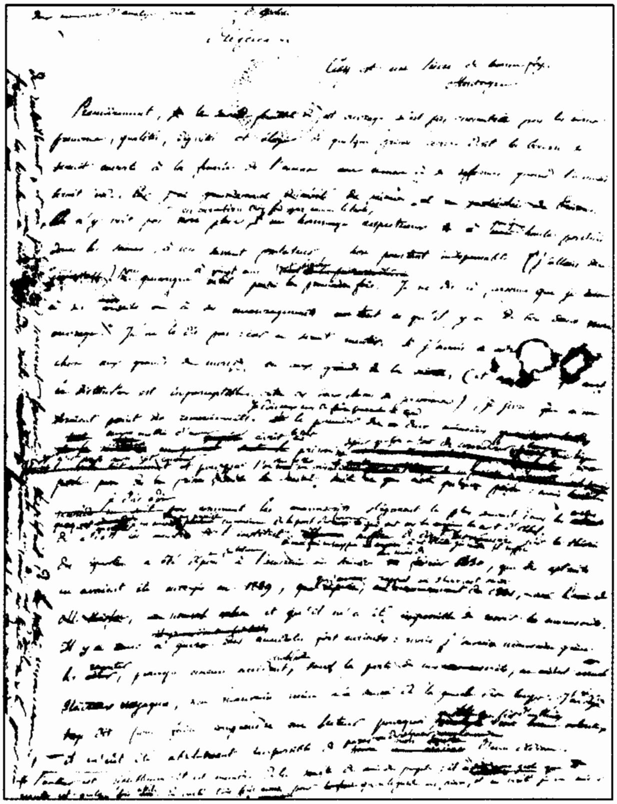


图 65

伽罗瓦的前言以一种蔑视的但又带有希望的语调结束了：“当竞争——也就是自私——不再统治科学时，当人民彼此联系是为了研究而非为了向科学院递送秘密包裹时，他们会急于发表即使很小的结果，只要这些结果是新的，此时可以补充一句‘我不知道其他’”。

浪漫的爱

1832年春，一种破坏性的霍乱流行病横扫欧洲。巴黎受害颇深。塞纳河被污染的水每天引起大约100个人死亡。也许是他脆弱的身体的部分原因，但是最可能因为这是政治犯的一种惯例，在3月13日伽罗瓦被从圣佩拉杰监狱转移到了在劳辛路的84～86号（后来变成了目前的布罗卡路94号）的康复之家，他在此获得了假释。在这个那时被称为佛尔特里埃（Faultrier）先生“健康之家”的家里，一些戏剧性的事情发生了：伽罗瓦陷入了爱河。直到那时，可能因为他母亲专断的个性，伽罗瓦没有和女性发生过联系。事实上，在监狱里的一次放纵的狂饮之后，他向拉斯佩尔坦白，“我不喜欢女人，对我来说，我只能爱上塔尔皮亚（Tarpeia）或格拉柯查（Graccha）”（两位传奇的罗马女人；塔尔皮亚背叛了她的城市，跑到了萨宾人那里，格拉柯查即科妮莉娅·格拉古［Cornelia Gracchus］，是提比略［Tiberius］和盖乌斯［Gaius］的母亲/教育者）。他热烈地爱着的人是年轻的斯蒂芬妮·波特林·杜·莫特尔（Stéphanie Potterin du Motel），她住在康复之家的同一幢楼里。她的父亲，让-鲍尔·路易·奥古斯特·波特林·杜·莫特尔（Jean－Paul Louis Auguste Potterin du Motel），以前是拿破仑军队的一名军官；她的弟弟，那时有16岁，后来成了一位内科医生。波特林·杜·莫特尔与康复之家的主人保持着一种亲密的友谊。

在历史上只有少数爱情有较悲惨的结果。斯蒂芬妮最初可能对热情而又聪明的年轻人显示了一些兴趣，但没过多久，她就冷淡地拒绝了与伽罗瓦继续发展。伽罗瓦在他已经用过的一篇论文的背面，抄录了斯蒂芬妮的两封信。不幸的是，这些信现在有一些缺口，在缺口的地方漏掉了许多单词和音节。最可能的是，伽罗瓦在一次恼怒之下撕碎了原物。后来，他绝望地打算从碎片里拼接他所爱的人的信，那些话一定让人很伤心。

曾经生活过的最伟大的天才之一的命运就要被一个“声名狼藉的卖

弄风情之女子”的令人伤心的评价所封杀，那个女子当时不到17岁。第一封信，日期是1832年5月14日，写道：

> 就让我们对那件事做个了结吧。我没有足够的热情持续这种通信，但是我将尽可能地保持足够的［热情］与你谈话，像在事情发生前我过去所做的那样。就是这样，先生，……有……必须……你……不是或：对于我，不再考虑那件可能不存在，永远也不会存在的事情。

这封信几乎没有疑问地表明，缺乏经验，也许是过于激动的伽罗瓦做了或说了一些冒犯斯蒂芬妮的话，或者把她吓跑了。冷淡的语调说明，年轻的女人可能一开始就不热情。第二封信，最可能写于几天后，甚至更要命，斯蒂芬妮甚至对单纯的友谊也不再感兴趣。

> 我听从你的建议，并进行了仔细考虑……已经发生的事……，在我们之间发生，无论你想叫它什么。而且，先生，可以断定，最可能的是，永远不会再发生什么了；你做了错误的假设，你的遗憾是没有根据的。除非在同性之间，否则真正的友谊几乎不存在，特别是……朋友……在真空中呻吟……任何这种感情的缺乏……我的信任……但是它已经受到了严重的伤害……你已经看到我很悲哀，［你］已经问过［我］原因，我回答说，我的感情已经被伤害了。我想，你会像任何人一样接受它，在这些人前面从……发出一则消息……一个人不……
>
> 我的平静的想法让我可以自由地判断我常看到的人，而不必深思；这是为什么我对被他们误解或在我的观点中受到他们的影响而几乎不遗憾的原因。关于感情我不同意你……超过……需求，也不……［我］真诚地感谢你所有那些［感情］，从那些感情可见，你愿意想办法接近我。

伽罗瓦伤心不已。此事对他的心情和他对生活的情感态度造成了剧烈的影响，大体可以从他在 5 月 25 日给他的好友奥古斯特·薛瓦烈的信中断定这一点。那时，奥古斯特，他的弟弟迈克尔和其他 36 名圣西门主义者已经在巴黎东部的迈尼蒙坦特建立了一个小社区。伽罗瓦忧郁地写道：

> 我的亲爱的朋友，
>
> 如果一个人有希望得到安慰，那么悲哀中也会有快乐。如果一个人有朋友，那么即使遭受了苦难也仍然是幸福的。你的信充满了天使圣徒般的抚慰，给我带来了一点宁静。但是怎能消除我的遭遇在我脑海里产生的那样激动、那样狂暴的情景？当我已经在一个月里耗去了一个人所能拥有的最好的幸福之源时，我怎样才能安慰自己？当我已经耗尽了幸福和希望，当我肯定我已经耗尽了一生的时候？

他继续以一种卡珊德拉①的方式描述了他痛苦的内心斗争："你说，我将不再继续做研究，我想怀疑你的残酷的预言。但是，我必须承认，在预言里可能存在一些真理；要做一名学者就必须只是一名学者。我违背理智地感到内心愤懑。但是我并不像你那样补充说：'非常遗憾'。"他以一种微弱的希望结束了："我将在 6 月 1 日看到你。我希望，在 6 月的头两个星期我们可以彼此经常见面。我大约在 15 日动身前往多芬。"但是最后一段里暗示的希望之光到后记的最后一句迅速熄灭了："我憎恨的世界怎么能侮辱我呢？"

伽罗瓦永远也没有再见到奥古斯特。

现在我们进入了伽罗瓦故事中最错综复杂的部分——他的神秘之死。我要在开始之前指出，从纯数学角度，或者对于群论及其在对称性上的应用的历史，伽罗瓦为何死或者谁杀死了他并不重要。然而，任何

① 传说中特洛伊最美丽的公主，凶事预言家。

关于这个非凡的天才的生活的陈述都不会避开讨论这些问题。特别是，在无法解出的方程式的传奇中的两个主要人物——阿贝尔和伽罗瓦的生活有着显著的相似性。他们早期都受到了单亲教育，并且得到了一个有才能的老师的指点。他们都在少年时失去了父亲，并且都打算解出同样的声名昭著的难题。不过这并非全部。他们还都是同一保守数学机构（尤其是柯西）的受害者，在他们的爱情之路上都很悲惨（因为不同的原因），并且都在如花般灿烂的青年时代就悲剧地死去。然而，我们知道阿贝尔死时周围环境的几乎每个细微之处，而伽罗瓦的死则蒙上了神秘的、有争议的和揣度的面纱。这——我该怎么说呢？——缺少对称性真的让我困惑。因此，我有意识地决定花上大量必要的时间和功夫来研究伽罗瓦生活的各个方面，尤其是他的死。我已经尽了最大努力不错过任何线索，读了我可以找到的所有文献，并且访问了大部分相关的地方。我仅希望结果可以证明我的努力。

神秘的死

关于伽罗瓦在5月25日以及宿命的5月30日早上与对手使用手枪进行一场决斗时的活动，已知的事实极少。在5月29日决斗前夕，他写了三封信。一封是“给所有共和党人”的道歉信：

> 我请求我的爱国的朋友们，不要责备我不是为祖国献出生命。我将作为一个下流的卖俏女人和两个被她愚弄的人的牺牲品死去。我的生命的火花，在一件可悲的风流韵事中熄灭了。啊！为什么要为这样无聊的事情死去，为这样可鄙的事情死去！
>
> 苍天作证，我已尽力试图拒绝这场决斗，只是迫不得已才接受挑战。我后悔对这些不能冷静地倾听真情的人说了招致不幸的实话。但我终究说了真话，我将带着不受谎言和爱国者的血所沾染的良心进入坟墓。

永别了！我已经为公众的幸福献出了自己大部分生命。不要责怪杀死我的人。他们是讲信用的。

最后一句话，是对基督被绑在十字架上所说的话的回忆（“忘记他们；因为他们不知道他们做了什么”），反映了他早年间从他母亲那里接受的宗教教育。另外，当把这封信的表面意义与斯蒂芬妮的信联系起来考虑时，从这封短信上展现的图像相当清晰。通过语言或行动，伽罗瓦冒犯了年轻的女人，她的两个“受愚弄的人”挑起了一场决斗。伽罗瓦不恨那两个“守信用的”人，并且他只是后悔太诚实了。人们可以从这封信中嗅出一种让步和向权威投降的味道，用伽罗瓦的话说：“我只是勉强地、被迫地接受了挑战。”稍后我将返回到这个重要的观点。

接着，伽罗瓦给两名共和党朋友 N. L.（几乎肯定是拿破仑·莱邦）和 V. D.（几乎肯定是文森特·德劳内）写了一封信：

我的两位好朋友，

两个爱国者向我挑起了［一场决斗］……我不可能拒绝。

请原谅我没有通知你们之中任何一人。只是我的对手们要我保证预先不通知任何一位爱国者。

你们的任务很简单：你们应当证实，我是违背自己意愿参加决斗的，就是说，用尽一切办法想和平了结而不成后才决斗的；你们还应当证实，我对无聊的事，甚至像上述的无聊的事也不善于撒谎。

不要忘了我！因为命运不让我活到祖国知道我的名字的时候。

我至死还是你们的朋友。

再一次从表面意义理解，这封令人压抑的信，补充了一条重要的信息：对手是“爱国者”，指活跃的共和党人。伽罗瓦屈服于权威的感情进一步加强了：“我不可能拒绝……我的对手们要我保证预先不通知任何一位爱国者……我是违背自己意愿参加决斗的。”伽罗瓦也激烈地强

调了他的诚实："证实我不善于撒谎。"

第三封，也是最重要的一封信从科学的角度概括了伽罗瓦的数学遗产。这封很长的信，写给他最意气相投的朋友奥古斯特·薛瓦烈，对遭到泊松和拉克鲁瓦拒绝的著名论文，以及其他文章提供了一个简明的内容提要：

> 我亲爱的朋友，
>
> 我在分析上有了某种新发现。首先是关于方程理论的，其他的是积分函数。
>
> 在方程理论中，我已经研究了在什么条件下方程可用根式［用一个公式］解出：这已经给了我机会使这门理论更加深刻，即使在一个方程不能用根式解出时，也可描绘出这个方程的所有可能的变换。
>
> 所有这些组成了3篇论文。

伽罗瓦接着描绘了今天被称为伽罗瓦理论的轮廓，为提交给科学院的原始手稿补充了几个新定理。快结束时，他强调："你知道，我亲爱的奥古斯特，这些题目并非我已经研究的全部。"接着，简短地描述了另外几个主题，他遗憾地总结道："我没有时间，我的思想在那个领域未能得到充足的发展——那个领域是巨大的。"

最后，正像之前的阿贝尔一样，他把信任寄托在德国数学家雅克比的判断上："请你公开向雅可比和高斯请教，并请他们就这些想法的重要性，而不是正确性，发表他们的意见。我希望，这样将来总会有人认识到，从这种杂乱无章的情况整理出秩序来，对他们是大有好处的。热情地拥抱你。"只有一件事仍然需要做——为手稿本身引入一些次序。伽罗瓦迅速地浏览了他的数学论文，并做了最后的校正和注释。这些注释中包括了一个成为他最令人难忘，也是最悲伤的名言（图66）："我没有时间。"

决斗发生在1832年5月30日早上，地点在冈提勒（现在巴黎13区）的葛技塞尔湖附近。这出戏的确切情况是未知的。根据验尸报告，伽罗瓦被从右侧射中腹部。子弹穿过了几段肠子，最后停在了他的左肾中。接着发生了什么不清楚。证人离开现场了吗？还是，他们中有一个人把伽罗瓦带到了医院？科钦医院记录表明，早上9:30伽罗瓦被带到了医院（图67显示了医院在19世纪末的门口和一个侧面图），并被安排在圣-丹尼斯病房6号床。根据伽罗瓦表哥加布里埃尔·德芒特（Gabriel Demante）后来提供的一份证词，把伽罗瓦送到医院的是一位路过的农民，但是由埃瓦利斯特以前的同班同学皮埃尔·鲍尔·弗洛热格斯（Pierre Paul Flaugergues）所写的发表在《画报》上的一封短信认为，这个撒马利亚角色是一个“以前的军官”。伽罗瓦的小弟阿尔弗雷德是唯一一个被通知的家庭成员，他跑到医院。主治外科医生丹尼斯·盖波医生马上意识到，两兄弟生离死别在即。伽罗瓦仍然意识清醒，他拒绝了一个牧师的服务。看到流泪的阿尔弗雷德，伽罗瓦以安慰的口气要求说：“不要哭，我在20岁的年纪死去，这需要我全部的勇气。”埃瓦利斯特·伽罗瓦在5月31日上午10：00离开人世，死亡证书签的是6月1日。他的死几乎没有引起注意。5月31日的《巴黎通报》错误地发了一则简讯：“莱伽罗瓦之死。”

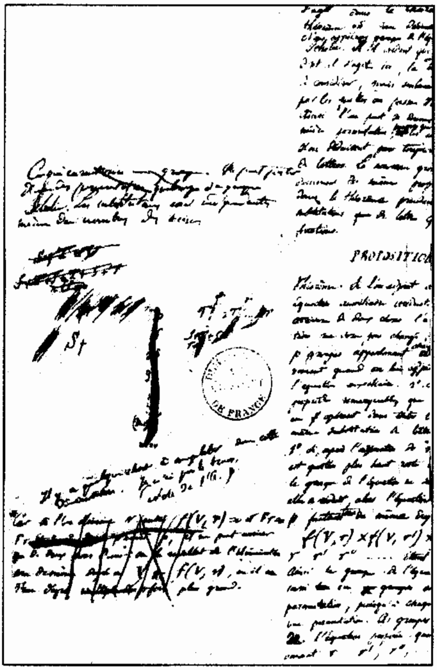


图 66

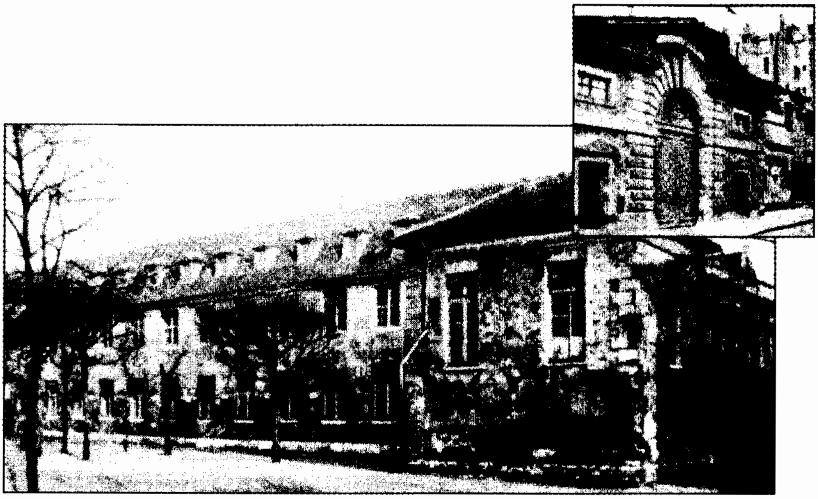


图 67

里昂报纸《先驱报》与人民之友联系密切，在 6 月 4 日期和 6 月 5 日期发表了下面陈述（图 68）：

巴黎，6 月 1 日消息——昨天，一场不幸的决斗从科学界夺走了一位前途极其灿烂的青年。可叹他过早的声望仅仅和他的政治活动有关。由于在勃艮第芬丹格斯饭店宴会上曾经举杯致词，年轻的埃瓦里斯特·伽罗瓦被判刑 1 年，跟自己的一位老朋友，像他一样的年轻人进行了决斗。两位年轻人都是人民之友协会的会员，两人都曾在政治诉讼案中出庭受审。有消息说，决斗起因是由于恋爱事件。决斗双方挑选手枪作为决斗武器：他们从前曾经是朋友，因此认为不屑互相瞄射而决定听天由命。他们用枪口互相顶着对方射击，但其中只有一支手枪装着子弹，子弹射穿了伽罗瓦，他被送到了科钦医院，2 个小时以后就在那里死去，伽罗瓦时年 22 岁，他的对手 L. D. 比他稍为年轻一点。

> — Un duel déplorable a enlevé hier aux sciences exactes un jeune homme qui donnait les plus hautes espérances, et dont la célébrité précoce, ne rappelle cependant que des souvenirs politiques. Le jeune Evariste Gallois, condamné il y a un an pour des propos tenus au banquet des Vendanges de Bourgogne, s'est battu avec un de ses anciens amis, tout jeune homme comme lui, comme lui membre de la société des Amis du Peuple, et qui avait, pour dernier rapport avec lui, d'avoir figuré également dans un procès politique. On dit que l'amour a été la cause du combat. Le pistolet étant l'arme choisie par les deux adversaires, ils ont trouvé trop dur pour leur ancienne amitié d'avoir à viser l'un sur l'autre, et ils s'en sont remis à l'aveugle décision du sort. A bout portant, chacun d'eux a été armé d'un pistolet, et a fait feu. Une seule de ces armes était chargée. Gallois a été percé d'outre en outre par la balle de son adversaire; on l'a transporté à l'hôpital Cochin, où il est mort au bout de deux heures. Il était âgé de 22 ans. L. D., son adversaire, est un peu plus jeune encore.

图 68

像许多我们如今熟悉的被新闻媒体报道的事件的例子一样，这篇报道充满了不实之处：决斗发生在 5 月 30 日，而不是 31 日；根据验尸报告，射击时不是“顶着”，而是距离 25 步；伽罗瓦没有在 2 个小时内死去，而是死于第二天；他没有“被判刑 1 年”，而是 6 个月；他不是 22 岁，而是 20 岁。因此，我们不能不认为，这篇文章其他信息也掺了水分。当我们认识到这篇报道发生在远离首都的里昂时，上面的看法就特别真实。然而，如果我们要严肃而详细地描述对手，那会是谁呢？容易回答：达恰特里特。他的确比伽罗瓦小一点，与伽罗瓦一起在新桥被逮捕，正好在伽罗瓦之前已经被审讯。但是达恰特里特的名字是欧内斯特，而这篇文章给的首写字母是“L. D.”。

有一些我们应该考虑的其他证据：首先，伽罗瓦的表兄加布里埃尔·德芒特写信给伽罗瓦的第一位传记作者鲍尔·迪皮伊（Paul Dupuy），在伽罗瓦与斯蒂芬妮的最后一次会面时，伽罗瓦本人发现出现了“一位所谓的叔叔和一位所谓的未婚夫”，他们俩都挑起了那场决斗。伽

罗瓦本人在谈起那两个人时始终一致（无论在他“给所有的共和党人”的信中还是给他的朋友们的信中）。因此，任何揭开真相的打算都应该确认这两位对手，而非只一位。

其次，回忆一下作家亚里山大·大仲马，当在文集中描述围绕伽罗瓦的引起麻烦的祝词时，称彼歇·德·艾尔宾维尔（Pescheux d' Herbinville）杀了伽罗瓦。通常人们不会把“D”作为德·艾尔宾维尔的首写字母，19 世纪的拼写惯例和风格允许这样。例如斯蒂芬妮的姓有时拼做 du Motel，在其他时候又可拼做 Dumotel。甚至埃瓦利斯特母亲方的家族姓氏也可以拼做 de Mante 或 Demante（附录 8）。彼歇·德·艾尔宾维尔从未与伽罗瓦一道被审讯，但是受到了“19 世纪的审讯”。

最后，警察局长亨利-约瑟夫·吉斯凯（Henri-Joseph Gisquet，1792～1866）在他 1840 年的文集中写道，伽罗瓦“已经被他的一个朋友杀死”。

那么所有这些归结为什么？

众说纷纭话谋杀

相当多的伽罗瓦的传记作者推断，伽罗瓦是被政敌杀死的。这样的一些说法甚至让他们的情节虚构得更加扑朔迷离，他们假定，“臭名昭著的风情女子”事实上是一位妓女或一名神秘的警察，她起着煽风点火的作用。这不奇怪。阿尔弗雷德·伽罗瓦本人终其一生都仍坚持说，他的哥哥是国王的秘密警察的受害者。但是这样的谋杀论有什么可说服人的证据吗？这不是真的。大部分这些奇怪的描述都是在明确鉴定“臭名昭著的风情女子”是斯蒂芬妮·杜·莫特尔之前创造的。揭示斯蒂芬妮身份的“法院的”调查由一名不可信的侦探——一位乌拉圭牧师完成。蒙得维的亚大学的卡洛斯·阿尔伯特·印范托兹（Carlos Alberto Infantozzi）只是不想放弃。首先，他使用一个放大镜和特殊的照明设备遮住了斯蒂芬妮的名字和伽罗瓦几份手稿上有关她的签名。然后，他煞费苦

心地审查了档案文件，以发现她的父亲的名字让·路易·奥古斯特·波特林·杜·莫特尔，以及她在佛尔特里埃康复之家的家庭地址。几乎没有疑问，斯蒂芬妮既不是一个妓女，也不是一名警察。她最后与奥斯卡·西奥多·巴里欧（Oscar Théodore Barrieu），一位语言学教授，在1840年1月11日结了婚。斯蒂芬妮的父亲不是一位内科医生，这是一些传记作者根据印范托兹所推断的，他其实是前拿破仑军队的一名军官和监狱系统的一名监察员。在他女儿结婚时他已经去世。斯蒂芬妮的弟弟，尤金·P·波特林·杜·莫特尔（Eugene P. Potterin du Motel），却确实最后成了一名医生，但是当斯蒂芬妮与伽罗瓦发生“风流韵事”时，他只有16岁。研究者让-鲍尔·奥弗雷（Jean-Paul Auffray）进行了可能最广泛的与伽罗瓦有关的文献调查，揭开了另一个有趣的事实。丹尼斯·路易·格里高利·佛尔特里埃（Denis Louis Grégoire Faultrier）本人以前曾是国民警卫队的一名上尉，康复之家以其名字命名。在斯蒂芬妮的父亲死后，这位波特林·杜·莫特尔家族的亲密朋友与斯蒂芬妮的母亲结婚了。我们很快就会明白，这可能为解开谜底提供了一个关键线索。

那么，你可能想知道，为什么阿尔弗雷德·伽罗瓦坚持认为，他的哥哥是被警察谋杀的？我们应该记得，阿尔弗雷德那时18岁，对他的年长的哥哥有着无限的钦佩。他对于哥哥的整个概念就是“天才”、“勇敢”，但是原本多病的、近视的哥哥却卷入了一场决斗，而这场决斗看起来是不公平的。然后，伽罗瓦的第一位传记作者迪皮伊，他在1896年发表了广泛的文章，当时回顾道，在所有阿尔弗雷德的断言（包括一个完全未被发现的主张，即伽罗瓦首击未中）中“一个人感到了一种浪漫的创造”。目前在布尔马尔学院的物理学家兼作者托尼·罗斯曼（Tony Rothman）得出了一个相似的结论。1982年，在对许多传记进行彻底检查后，他总结道：“贝尔、霍伊尔和英费尔德［伽罗瓦的所有传记作者］即便不是拜占庭式的，也是巴洛克式的创造。”我完全同意他的说法。

不过，还有另外一个谋杀论，需要严肃考虑。在一本最近的，也是最全面的伽罗瓦传记中，意大利数学家兼数学史家劳拉·托蒂·里加特雷（Laura Toti Rigatelli）推断，那个沮丧的、心灰意冷的伽罗瓦决心为共和党人的理想牺牲自我。共和党人需要一具尸体来引发起义，于是他提供了自己的——决斗是精心安排的。托蒂·里加特雷的推测基于广泛的研究，尤其是，她检查了警察局长吉斯凯和他的一个秘密探员吕西安·德·拉·霍德（Lucien de la Hodde）的手迹。

尽管托蒂·里加特雷的说法肯定让人感兴趣，但我个人没发现它有特别的说服力。为了让她的故事站住脚，托蒂·里加特雷被迫宣称伽罗瓦编造了他的最后三封信，目的是"防止任何人怀疑他死亡的真相"。伽罗瓦总是坚持他所看到的真理，所以，这不仅完全不符合伽罗瓦的性格，而且本身也与其他谋杀论相悖。当然为了调查一场革命，一封谴责警察应对他的死负责的信是更有效的。对托蒂·里加特雷所描写情节的较仔细的检查发现，用她的话说，她认定的伽罗瓦自我牺牲的铁证，是在他致"所有共和党人"以及致莱邦和德劳内的信中他对以某种方式死去的坚持。但是从一个 20 岁的被碾碎了浪漫之梦的年轻人在决斗前夕所写的这封诀别信中，一个人可以期望得到别的什么呢？而且，正如我很快就要说明的，有许多理由可以相信在伽罗瓦的对手中，至少有一位比他更擅长使用手枪。因此，伽罗瓦对于死的预期是完全可以理解的。那么是谁杀了伽罗瓦，又为什么要杀他？

浪漫的死

积累的证据无可争辩地说明了决斗的真相。所有的线索也暗示了，这是一个经典的"求偶"案例。不管是因无心的语言还是因太过冲动的行为，不知何故，伽罗瓦冒犯了年轻的小姐，她马上告诉了两个别的男人。当这两个"受愚弄的人"对抗伽罗瓦时，他又错误地把整个事件指为"一件可悲的风流韵事"，因而使之雪上加霜。结果令人神伤。那两

个男人迅速维护斯蒂芬妮的声誉，并向伽罗瓦发出决斗的挑战。这两个男人是谁？从伽罗瓦所写的信中我们知道，他们都是共和党的“爱国者”。伽罗瓦的话也强烈地暗示了，至少他的一个对手掌握了一些权力，这使伽罗瓦被迫屈服。斯蒂芬妮的父亲让·路易·波特林·杜·莫特尔，是一名拿破仑伟大军队的前任军官，康复之家的主人，丹尼斯·佛尔特里埃是一名国民警卫队的前队长，他们俩都符合这个角色。不过，请注意，丹尼斯·佛尔特里埃也符合另一份证据。伽罗瓦的表兄将其中一名对手描述为一个“所谓的叔叔”。佛尔特里埃是莫特尔一家亲密的朋友，后来又与斯蒂芬妮的母亲结婚，因此，伽罗瓦表兄的描述就如为其量身打造一般。至于第二个对手的身份，情况有点欠清晰。在最近的、考据详实的伽罗瓦传记里，奥弗雷推测，那两个男人事实上是斯蒂芬妮的父亲与佛尔特里埃。这既忽视了伽罗瓦表兄的证词（关于一个“所谓的未婚夫”），也与《先驱报》中的描述不符，所以，我发现很难接受这种推敲。《先驱报》的文章固然包含了许多不实之处，但在报道中的不实之处是可预料的。将加布里埃尔·德芒特一个“所谓的未婚夫”的描述与报纸报道结合起来看，似乎增加了另一名对手是一个年轻的情人的可能性。但是他是谁？

欧内斯特·阿曼德·达恰特里特，文献学校的一个年轻的学生，伽罗瓦的朋友，最恰当地填充了问卷。回忆下，吉斯凯警官也证实，伽罗瓦“已经被他的一个朋友杀死”。我必须承认，我不能找到任何文字证据可以说明，达恰特里特曾经在康复之家待过一段时间——在伽罗瓦被转移到那里之前，他就已经获释几个月了。然而，习惯上政治犯可以在这样一个“健康之家”获得假释，所以在伽罗瓦去那里之前达恰特里特可能已经在那里了。而且，当在佛尔特里埃的健康之家时，伽罗瓦被允许探视，他的朋友奥古斯特·薛瓦烈也的确到此看望过他。如果我们将此延伸并推断达恰特里特也来过，那么这并非不可思议。最后，这两位朋友（像报纸上描述的）不愿互相瞄准对方，而是他们决定听天由命，只将一只手枪上了子弹，是完全符合他们的性格的。

对手会是彼歇·德·艾尔宾维尔吗？可能性很小。他不符合报纸的描述；即使有机会遇见斯蒂芬妮（由于极不同的社交圈），机会也极其微小；而且，他甚至可能是一个同性恋（像大仲马对他的描述中所影射的那样）。那么，大仲马究竟为什么说是他呢？我不知道，但是人们知道，大仲马在许多方面描写的细节都是错误的。他将一名年轻的共和党人与另外一名混为一谈，这不会让人感到吃惊。

因此，我谨慎地提出，伽罗瓦的两名对手是达恰特里特和佛尔特里埃。谁杀了伽罗瓦，又为什么杀他的几乎 200 年的悬案被最后解决了吗？可能。尽管我强烈地相信，佛尔特里埃-达恰特里特这两人符合所有已知的事实，但是由于严重缺乏可靠信息，所以，如果将来没有出现新证据，仍然会有许多不确定性。

如果我关于两名对手身份的结论是正确的，那么决斗当天产生的画面应当如下：在 1832 年 5 月 30 日早上，伽罗瓦和达恰特里特在距离 25 步处相对而立，让佛尔特里埃等候上场。按照俄罗斯轮盘赌的程序，达恰特里特碰巧捡起了有子弹的枪，并且射中了伽罗瓦。

验尸报告揭示了额外两条有趣的信息。首先，当伽罗瓦被从侧面射击时，他完全没有向旁边躲闪，如果他躲闪了，那就会将他被射中的几率降到最小。他不在乎生命吗？从他的心理状态来看这是不可能的。别忘记，从伽罗瓦的惨淡的观点来看，他的生活故事可以大体总结如下：进入综合技术学院的两次努力都失败了；论文三次被科学院所拒；两次监禁；和一颗因爱未被接纳所造成的破碎的心。事实上，在死前，伽罗瓦将他本人画成了理科特·阿·拉·侯皮（Riquet *à* la Houppe）（图 69），一个虚构的驼背侏儒，这个侏儒绝顶聪明，行侠仗义，但是受到了周围所有人的嘲笑。

在 17 世纪的故事里，理科特治愈了一位年轻妇女的愚昧，最终赢得了她的芳心，这成了美女与野兽变形版的象征。悲哀的是，伽罗瓦在真实生活中运气欠佳。其次，验尸报告描述了在伽罗瓦头部的一大块瘀伤，这可能是他跌倒时造成的。如果无意识地被撞，并且假定没感觉

图 69

到，这可能解释一个困惑了许多伽罗瓦的传记作者的事实——大多数（即使不是全部）传记作者陈述决斗时都漏掉了这个情景。如果有可能把佛尔特里埃确认为一个对手，则解决了另一个迷惑了许多研究者的谜——为什么目击者之一不把伽罗瓦送到医院？在提到的情节里，佛尔特里埃，“以前的军官”，可能的确是那个把伽罗瓦送到科钦医院的人。关于伽罗瓦经常存在的对于其父的记忆，下面的趣事可以提供一条线索：当在医院被问及住址时，伽罗瓦给的是巴黎圣-让-德-博韦路 6 号，尼古拉斯-加布里埃尔自杀的地方。

身死名扬

伽罗瓦的葬礼在6月2日星期六举行。参加葬礼的有几千人，包括他的朋友，人民之友的成员，法律系和医学系的学生代表。人民之友的领袖，普拉格尼奥尔与查理·皮内尔发表了热情洋溢的颂词。如果共和党人有任何利用这次葬礼挑起一场暴动的计划，那么不可预料的形势变化会很快将他们驱散。警察局长吉斯凯正密切地注视着队伍，为了预防起见，他在头天晚上就已经逮捕了30名共和党人。他在其文集中写道：

> 在6月2日，有两三千共和党人参加了莱伽罗瓦［对伽罗瓦的误拼］的葬礼游行，他们打算返回时开始设置路障；但是他们获悉了拉玛克将军［在拿破仑军队中的一位著名将军］的死，并且马上认识到他们在这样一个事件中占据的优势，即将军的葬礼会吸引大量人群。因此他们修改了计划：帝国的一位将军，暨爱国者的代表的棺材将成为起义的信号。最后将运动推迟到5日。

命运甚至因此抢去了伽罗瓦死时引燃起义的机会。悲痛的奥古斯特·薛瓦烈写了一则简短的讣告，在1832年9月发表。

幸运的是，上帝对伽罗瓦的数学遗产较为慷慨。两位顽强的年轻人，伽罗瓦的弟弟阿尔弗雷德和他的朋友奥古斯特·薛瓦烈，他们毅然保证会将埃瓦利斯特的遗物与他的数学论文保存起来，以免其湮没（图70显示了一幅伽罗瓦的肖像，由阿尔弗雷德在1848年根据记忆所绘）。历尽辛苦，他们收集了每一张论文，为所有的手稿做了目录，并把这宝贵的财富交给了数学家约瑟夫·刘维尔（Joseph Liouville，1809～1882）。约瑟夫无比震惊，在1843年开始向科学院写信：“我希望科学院会对下面的宣布感兴趣。在埃瓦利斯特·伽罗瓦的论文里，我已经找

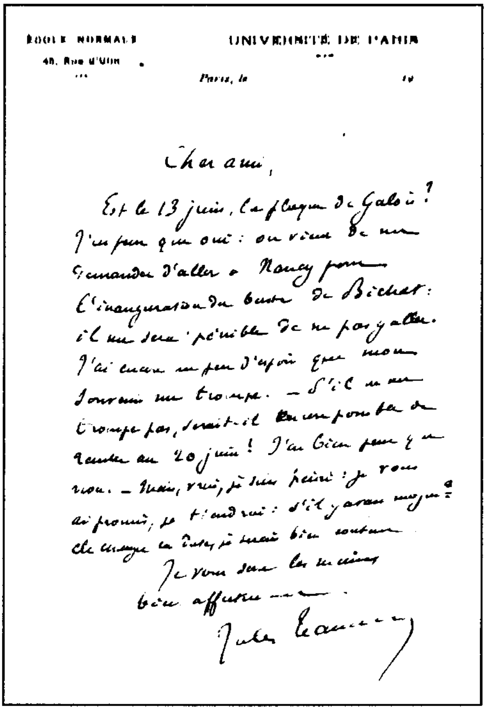
到了一个漂亮的关于解的定理，它既准确又深邃。定理是：给定一个不可约的素数次方程，判定它是否存在根式解。”1846 年，刘维尔在他的杂志上发表了这些论文，向世界宣布：“我承认伽罗瓦证明的方法是完全正确的，尤其是这个漂亮的定理［关于方程的不可解性］。”不久，更多的公认接踵而来。伽罗瓦所信任的雅克比的确是完成这项任务的理想人选。在读了发表在《刘维尔杂志》上的伽罗瓦的论文后，他立即与阿尔弗雷德联系，打算发现更多的伽罗瓦所做的超越函数的作品。到 1856 年，法国和德国代数学的高级课程引入了伽罗瓦理论。

图 70

曾经驱逐伽罗瓦的学校最终也洗心革面。在百年庆典上，师范学院请著名的挪威数学家索甫斯·李（Sophus Lie，1842～1899）写一篇文章，总结伽罗瓦理论对数学史的影响。李总结道：“在数学中殊为难得的是，两位几何学家的著作已经做出了两个最深刻的发现（阿贝尔定理和伽罗瓦的代数方程理论），他们就是大约 22 岁完成其著作的阿贝尔和还不到 19 岁就完成其著作的伽罗瓦。”当伟大的数学家埃米尔·皮卡德（Émile Picard，1856～1941）在 1897 年评价 19 世纪的数学成就时，他这样谈论伽罗瓦：“在开创性和概念的深邃方面无人能及。”

历史轮回，1909 年 6 月 13 日，师范学院的校长居里斯·坦内里（Jules Tannery）来到布尔-拉-林市，在伽罗瓦家安放纪念碑的地方（图 71 显示了一封坦内里致布尔-拉-林市长的信，图 72 显示了在伽罗瓦最初的家里的碑刻）敬献了一件特别的赠礼。坦内里几乎不能控制他的感情，发表了一篇感人的“我的过失”的讲话：

因为我在师范学院所处的位置，我拥有在这里演讲的荣誉。市长先生，感谢您允许我以这个学校的名义向天才伽罗瓦表示歉意，他原本不愿意进入这个学校，在学校里他受到了误解，还被驱逐，但是我们不能忘记，因为他是我们学校最夺目的一颗星。


ÉCOLE NORMALE
45, Rue d'Ulm
UNIVERSITÉ DE PARIS
Paris, le 19

Cher ami,

图 71

当我站在布尔-拉-林墓地时，这些诚恳的话回荡在我的耳边。现在对尼古拉斯-加布里埃尔和埃瓦利斯特·伽罗瓦的纪念是分开的（图73）。纪念碑上标示了埃瓦利斯特短暂的一生。

但是不管多么有创造性，怎样才能发明一个工具，可以用它确定一

个方程是否可解，并将其演化成一门描述世界上所有对称性的语言？毕竟，当我们讨论对称性时，代数方程不是最初映入脑海的事物。伽罗瓦本人不能肯定他的理论将导向何方："完全理解我提出的一般命题是可能的，只要应用它的人仔细读我的著作。"这正是光辉的思想微弱的开始——群论的统一魔力由此诞生。英国数学家 H. F. 贝克尔（H. F. Baker）为此倾倒。为了完整地欣赏由伽罗瓦开创的概念所环绕的不可思议的力量，现在我们将返回群和对称性的王国。

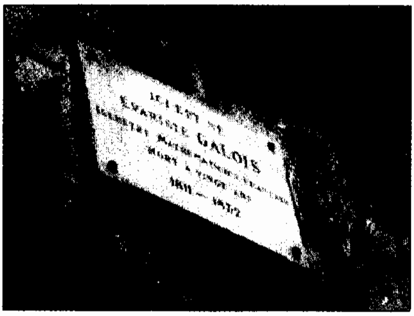


图 72

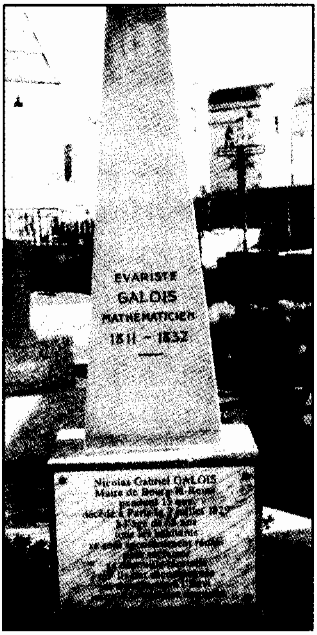


图 73

第六章

群

伽罗瓦引发了代数学的革命性变化。如果你想知道一个方程是否可解，你只需试着去解它就行了，对吗？伽罗瓦说，错误。你需要做的全部就是检验假设解的置换。我们甚至不知道，解的置换怎么能告诉我们关于可解性的事情呢？置换至少可以提供一些新信息，这个事实长期以来为数学界所熟知。片语——由字母按照不同顺序形成的单词或短语——就是这样。以 GALOIS[①] 这个名字为例。由两个单词构成的片语使我们联想到诸如 OIL GAS、GOAL IS、GO SAIL 之类的组合。我们利用 GALOIS 中的字母能够构造出多少种不同的排列呢（不考虑含义）？答案并不难，不过我们可以从一个比较简单的例子来揭示一般规则。字母 A 和 B 允许有两种排列：AB 和 BA。A、B、C 三个字母可以形成六种排列：ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA。这种出现方式是简单的。在 A，B，C 中，字母 A 有三个位置可以放置（第一、第二、第三）。如果 A 在三种选择中选了一个位置，留给字母 B 的位置正好有两个，而为字母 C 所留的位置只有一个。因此可以排列的总数是 $3\times2\times1=6$。同样的逻辑也适用任何数量的对象，因此对于 GALOIS 中的六个字母有 $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ 种不同的排列，对于任何 n 个不同对象有 $n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times1$ 种排列。为节约空间，法国科学家克里斯蒂安·克朗普（Christian Kramp，1760～1826）引入了符号 $n!$（n 的阶乘），用以表示最后的乘积。因此，n 个不同对象的排列数恰好是 $n!$。

关于排列的最早记录的研究之一不是出现在数学书中，而是出现在

① GALOIS 是伽罗瓦的英文拼写。

一本犹太人的神秘主义的书里，这本书的时间可以追溯到第三世纪与第六世纪之间的某个时候。The Sefer yetzira（《创世纪》）是一本简短而又难以理解的书，该书建议通过检验希伯来字母的组合来解决创世纪的秘密。这本书（来源于犹太人祖先亚伯拉罕的卡巴拉①传说）的一般前提是，不同类别的字母组成了所有事物赖以构建的神圣的建筑基础。根据这个前提，这本书陈述道："两个字母构成两个单词，三个字母构成六个单词，四个字母构成 24 个单词，五个字母构成 120 个单词，6 个字母构成 720 个单词，7 个字母构成 5040 个单词。"

为了明白揭示不同置换之间的关系和它们的性质如何导致全新而深刻的见解，我们检验一下将 GALOIS 置换成 AGLISO 的运算。这个运算表示如下（使用第 2 章介绍的符号）：

$$\begin{pmatrix} G & A & L & O & I & S \\ A & G & L & I & S & O \end{pmatrix}$$

其中，上一行的每一个字母都被它正对着的下一行字母所代替。具体地说，G 被 A 代替，A 被 G 代替，L 保持不变，O 被 I 代替，I 被 S 代替，S 被 O 代替。

如果我们应用同样的运算两次，将会发生什么呢？显而易见，再一次进行完全相同的替代将把 AGLISO 转变为 GALSOI。现在想象一下，从 GALOIS 开始，让一台计算机无序地重复同样的运算，比如说，1327 次，我们能够预测最终的结果吗？当然，我们可以通过反复应用该运算艰难地找到结果，但这是极其冗长的，难免要犯很多错误。有没有找到答案的更简单的方法？你也许要花几分钟来思考这个问题，因为它的解释揭示了置换的有趣特点，而置换是伽罗瓦证明中的精华。不管怎样，

---

① 卡巴拉被认为是犹太教的密宗。卡巴拉的英文有许多种拼法，如 kabalah，kabbalah，kabala，qabalah，cabala 等。实际上，卡巴拉是犹太人由灵性源头，包括先知，而接收的一系列受推崇的教诲与见解，它们并不必然根植于人类的逻辑、发现或者发明。然而，一旦它们被驾御，某人便可应用逻辑与推理到达更深的了悟，由此发现卡巴拉诸概念间的互相关系。

我马上会给出答案。

从娱乐数学这个角度来看，置换及其特点至少在两个非常著名的谜题——14－15之谜和魔方方面起着显著重要的作用。

14－15之谜在19世纪70年代由美国最伟大的出谜人萨缪尔·劳依德（Samuel Loyd，1841～1911）所提出，它一度使全世界为之疯狂。劳依德那时已经是美国最重要的国际象棋问题设计者，也是几个杂志的象棋专栏作家。不过，在著名的14－15之谜之前，他就已经开始发表各种各样的数学谜题了。

14－15之谜由标号为1～15的4×4方格构成（图74a）。一般目标是从任一最初的构造出发，向上、向下或向侧面滑动瓷砖，最后按照连续的顺序重新排列它们。造成极大反响的特殊版本的14－15之谜是，除了14与15之外的其他数字都依正常的顺序排列，而14和15是颠倒的（如图74b所示）。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(a)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

(b)

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

(c)

图 74

劳依德提供了1000美元的奖金，奖给能够摆出连续的瓷砖并且14和15颠倒的第一人。这个谜题产生了空前的狂热，吸引了各行各业的人们。劳依德的儿子后来出版了一本他父亲的令人难以置信的、引人入胜的谜题集（《谜题百科全书》），在书中他描写了全世界的狂热，为了解决难以处理的谜题，"据说甚至农民们都已经放下了犁头"。实际上，劳依德非常清楚他提供的奖金绝对没有任何风险——他能够证明这个谜

题是不可解的。为了理解劳依德证明的关键，例如，考虑如下置换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 12 & 5 & 10 & 11 & 15 & 9 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

显而易见，如果起初按连续的顺序排列（如图 74a 所示），由劳依德的 1－15 方格可以得到这个置换。即使你手头没有劳依德的方格，通过在内心想象下面的移动顺序（这里每一个数代表将要移动到空白处的方格）——15，14，13，9，5，6，7，8，12，15——你将发现，它产生了上面想要的置换。让我们数一下在这个置换中有多少对数背离了它们的自然顺序。例如，按照自然顺序，6 在 5 之后，但在这个置换中 6 和 5 的顺序颠倒了。我们可以按顺序取第二行中的每一个阿拉伯数字，并计算其颠倒的次数。

1	不用颠倒	颠倒 0 次
2	不用颠倒	颠倒 0 次
3	不用颠倒	颠倒 0 次
4	不用颠倒	颠倒 0 次
6	在 5 之前	颠倒 1 次
7	在 5 之前	颠倒 1 次
8	在 5 之前	颠倒 1 次
12	在 5，10，11，9 之前	颠倒 4 次
5	不用颠倒	颠倒 0 次
10	在 9 之前	颠倒 1 次
11	在 9 之前	颠倒 1 次
15	在 9，13，14 之前	颠倒 3 次
9	不用颠倒	颠倒 0 次
13	不用颠倒	颠倒 0 次
14	不用颠倒	颠倒 0 次
	颠倒总次数	12

总次数 12 是个偶数，因此这个特殊的置换叫做偶置换。相似地，当颠倒的总次数是奇数时，我们称之为奇置换。经过设计，一个小实验将使你相信，只要你以自然顺序出发，以使右下角为空结束，那么用劳依德的玩具得到的置换总是偶数的。既然只颠倒 14 和 15 这一对数造成了一个奇排列（颠倒 1 次），那么不管你如何努力，你永远不可能恢复自然顺序。劳依德确信他将永远不必支付这笔奖金。

如果 14 - 15 之谜莫明地迎合了你的喜好，并且你碰巧拥有劳依德的玩具，那么你可能想尝试下面的事情：从 14 与 15 颠倒的最初构造（图 74b）出发，如果在最终构造中的空方格位于左上角（如图 74c 所示），能否得到自然顺序？该题的答案将在附录 9 中列示。

在劳依德谜题出现大约一个世纪后，匈牙利的建筑师爱尔诺·鲁毕克（Ernö Rubik）设计了一个更复杂而且极流行的装置。鲁毕克的魔方（图 75）是由更小立方体组成的 3×3×3 矩阵。小立方体的各面被刷成不同颜色；大立方体各面装在转轴上，以便它可以沿不同方向旋转。这个谜题的目标是建立一个构造，使大立方体的每一面都由同一颜色构成。鲁毕克在 1974 年发明了这种魔方，到 1980 年它在国际上产生了轰动效应。大约三年后鲁毕克魔方就疯狂席卷了全球。从学校的小朋友到奇特办公室的 CEO 们，每个人都在试图拼出这种魔方，并且都试图在最短的时间内拼出它。为了纪念这个发明家，1982 年 6 月 5 日布达佩斯作为东道主举办了首届鲁毕克魔方世界锦标赛。这之前，19 个国家分

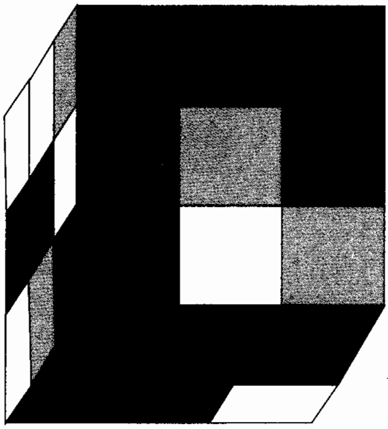


图 75

别举办了比赛，以产生来布达佩斯参赛的各国冠军。最终获胜者是美国的明泰（Minh Thai)，他在令人吃惊的 22.95 秒内完成了这个任务，因为在这次比赛中使用的魔方都是新的，所以它们要比“训练”所用魔方旋转得慢。此后仍有更短的时间被记录。在写这本书时，丹麦的耶斯·邦德（Jess Bonde）已经登记了在官方锦标赛中所达到的最短时间——16.53秒！即使人们打算排除数不清的魔方仿制品，截至目前为止，全球仍售出了超过 2 亿个魔方，这一数字是令人震惊的。

既然有多达 43,252,003,274,489,856,000 种不同类型的可以展示的魔方，你可以想象，实际上没有人尝试把它们一一拼出。当然，魔方的每一次移动都可由其顶点的一种置换来表示。魔方谜题的解答完全可以用群论的语言来说明。美国海军学院的数学家大卫·乔伊讷（David Joyner）甚至已经围绕魔方和类似数学玩具在群论中系统地设置了一门完整的课程。

现在回到本节开始介绍的 GALOIS - AGLISO 谜题，我们在应用了 1327 次同样的变换后会得到什么样的置换呢？首先，我们注意到在该运算中第三个位置的字母 L 保持不变。其次，我们发现字母 O、I、S 这样置换的结果是，它们“绕着一个圆”移动（图 76)。

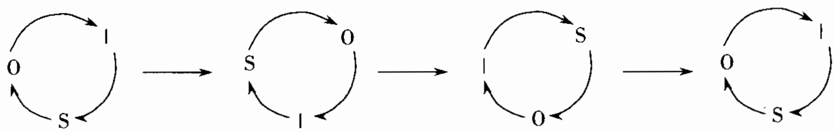


图 76

这与篮球练习路线是相似的，即练习中所有运动员排成一个队列，每一名运动员在投篮后返回队列后面。这种类型的置换被称为循环置换。循环置换的一个重要性质是进行固定次数的置换后它们又恢复到原来的顺序，这个固定次数就是所谓的周期。图 76 显示循环置换 O，I，S 的周期是 3——OIS 的顺序经过三步置换后恢复原样。关于 GALOIS - AGLISO 运算要注意的最后一点是字母 G 和 A 是互换位置的，每经过两次置换后又

恢复到它们原来的顺序。如果我们把所有这些零碎的信息合在一起，我们就能发现解决这个问题的一个比较容易的方法。既然 O，I，S 每三步，G、A 每两步恢复最初的顺序（L 保持不变），因而我们每 3×2＝6 步恢复原来的单词 GALOIS（你可以通过反复替代 6 次来验证这一点）。数 1327 等于 6×221＋1。这意味着经过 1326（＝6×221）步后这几个字母拼做 GALOIS，接着只要再有一步就将其改变为 AGLISO——最终的单词。在此可以学到重要的一课：**对置换性质的分析使我们可以自信地预测最终的结果，而不必实际进行试验。这也是伽罗瓦理论背后的基本哲学。**他发现了一个判定方程是否可解的设计精巧的方法，这个方法就是检验方程解的置换的对称性质。

正如对一副牌连续洗两次只是产生了一种不同的牌序，在一次置换后再进行一次置换就产生了第三种置换。因而置换自动遵循群的封闭性原则。回忆一下，封闭性意味着两个群元素通过群运算进行结合后会产生另一个群元素。例如，全体正数集合（整数、分数和无理数）在乘法运算后构成另一个群。因为任何两个正数的乘积也是一个正数，因此满足封闭性的要求。认识到置换是值得研究的至关重要的数学对象，于是伽罗瓦走上了公理化群论的道路。

群和置换

置换和群密切相关。事实上群的概念就来源于对置换的研究。对伽罗瓦而言，这仅仅是他伟大证明过程中所产生一系列独创性发明和思想的第一步。

让我们简单地回顾一下在第二章介绍的群的准确定义。一个群的组成，必须满足群运算的四个法则。举个例子，考虑在一块培乐多①上能

---

① 培乐多（Play－Doh）彩泥系列始创于 1956 年，其产品是幼教博士为了启发儿童创意，发展其身心智能而设计的训练教材。主要针对 3 岁以上小孩。

够进行的所有可能变形的集合，定义运算为“伴随”。规则如下：首先，任意两个元素通过群运算的结合必须生成另一个元素（这个性质叫封闭性）。显然，培乐多的一次变形伴随第二次变形的运算只是产生了另一次变形。其次，运算必须是可结合的，这意味着当三个有顺序的元素进行结合时，其结果不取决于哪两个元素首先结合。像培乐多变形这样连续的变换自动满足这条法则。再次，群必须包含一个“现状”或单位元，当与另一个元素组合时，它使该元素保持不变。对培乐多而言，“什么也没做”的变形就起到这个作用。最后，群中的每一个元素都必须有一个“如你一样”的逆元，这样当一个元素与其逆元进行结合时就生成单位元。对每个培乐多变形而言，存在一个使其恢复原状的反变形。

现在来检验一下 1、2、3 三个数的所有可能置换的集合：

$$\underset{I}{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}},\quad \underset{s_1}{\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}},\quad \underset{s_2}{\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}},\quad \underset{t_1}{\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}},\quad \underset{t_2}{\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}},\quad \underset{t_3}{\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}}$$

这里，为了能指明它们，我已经给每一个不同的运算贴了标签。使每一个数变成它自身的单位元记为 I。t_1、t_2 和 t_3 中的每个运算颠倒或互换了其中的两个数，同时第三个数不变。s_1 和 s_2 两个运算都是循环置换，即绕一个圆移动数字。

现在观察一下，当我们连续应用两次置换运算时将发生什么。记住，重要的是哪个数代替哪个数，而不是它们的书写顺序。以 t_1 伴随 s_1 为例。运算 t_1 使 1 保持不变，然后 s_1 将 1 变为 2。因此，净结果是置换 $1\to2$。同时 t_1 用 3 代替 2，随后 s_1 用 1 代替 3，产生净结果：$2\to1$。最后，3 被运算 t_1 置换为 2，然后又被运算 s_1 变回为 3。我们发现 t_1 伴随 s_1 给出置换：

$$\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$$

这恰恰就是运算 t_3。换句话说，如果符号 $\circ$ 表示运算“伴随”，我们发现 $s_1 \circ t_1 = t_3$（回忆一下，第一次应用的运算总是向右的）。

对这六种置换而言，完整的“乘法表”采用如下形式：

$\circ$	I	s_1	s_2	t_1	t_2	t_3
I	I	s_1	s_2	t_1	t_2	t_3
s_1	s_1	s_2	I	t_3	t_1	t_2
s_2	s_2	I	s_1	t_2	t_3	t_1
t_1	t_1	t_2	t_3	I	s_1	s_2
t_2	t_2	t_3	t_1	s_2	I	s_1
t_3	t_3	t_1	t_2	s_1	s_2	I

其中，例如 s_2 行和 t_3 列的条目给出了 $s_2 \circ t_3$ 的结果，即 t_1。乍一看，这个表好像混乱一团，但是更仔细的检查揭示了一个重要的事实：三个对象的所有置换的集合形成了一个群。事实上，这个命题对于任意数量对象的置换都是正确的。这个表既证明了封闭性（三个对象的任何两种置换的结合给出了三个对象的另一种置换），也证明了每一种置换都有一个逆置换——逆置换“取消”了第一次置换的效果。在这个例子中，你可以检验 s_1 和 s_2 互为逆置换——在一种运算后应用另一种运算可恢复原来的顺序（$s_1 \circ s_2 = I$；$s_2 \circ s_1 = I$）。同样，t_1、t_2 和 t_3 中的每一种运算都有其自身的逆运算。也就是说，应用它们中任一个运算两次将会恢复原状（$t_1 \circ t_1 = I$；$t_2 \circ t_2 = I$；$t_3 \circ t_3 = I$）。n 个不同对象的所有 $n!$ 个置换构成的群通常记为 S_n。一个群中元素的数量叫做群的阶。例如，三个对象的置换群 S_3 的阶是 6，因为恰有六种这样的置换。

我们为什么关心置换是否形成群呢？不仅因为从历史上看置换是首先产生群的概念的对象，而且因为这些特殊的群在某种意义上处于群论的中心舞台。

为了证明置换群的特殊作用，让我们再检查一次等边三角形的对称性。记住，有六种这样的对称让三角形保持不变，它们对应于恒等，120°旋转，240°旋转，关于3个轴（参阅第15页的图9）的反射。我们在第二章发现，任何对象的对称集合构成一个群。既然三角形的对称群与三个对象的置换群的元素数量恰恰相同——都是六阶的——搞清楚这两个群是否有某种相关性是有意义的。但是通过把三角形逆时针旋转120°实际上会有什么结果？它仅仅使顶点A从位置1移到位置2。同时，将顶点B从位置2移到位置3，将顶点C从位置3移到位置1。换句话说，我们可以仅把这种旋转看作是关于旋转三角形三个顶点位置1，2，3的置换：

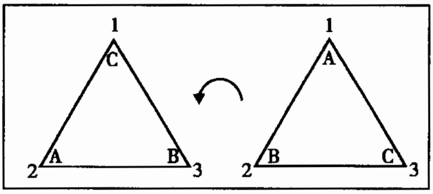


图 77

$$\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$$

同样，三角形剩下的五种对称中的每一个都对应着一种其他的置换——**这两个群的结构是相同的！**通过群论，这在对称和置换之间建立了一种出人意料的密切联系。这一认识形成了英国数学家亚瑟·凯莱（Arthur Cayley，1821～1895）在1878年所证明的一个重要定理的基础。该定理使用简单的语言叙述了一个非常不平凡的事实：**每一个群都映射在具有相同的模的置换群上。**也就是说，尽管群的定义允许有广大的范围，但对于任意的群总存在一个实际上与它相同的置换群。用数学术语来说，两个具有相同结构或相同“乘法表”的群，例如三个对象的置换群和等边三角形的对称群，**被称为同构的。**为给出另一例子，回顾一下第二章中包含两个元素的人体对称群——恒等变换和关于一个垂直平面的反射（后者代表两侧对称）。（因为应用两次反射变换将恢复最初的图形）这个群在“伴随”运算下的“乘法表”（其中I和r分别表示恒等变换和反射变换）采取如下形式：

$\circ$	I	r
I	I	r
r	r	I

现在考察一个由两个数字 1 和 −1 采用普通乘法运算所构成的简单群，这个群的乘法表（这次是实际上的乘法）如下：

$\times$	1	−1
1	1	−1
−1	−1	1

如果你检查了这两个表，你立刻会发现：一旦你做出对应 $I\leftrightarrow 1$，$r\leftrightarrow -1$，这两个群恰好具有相同的结构。人体对称群同构于这个两元乘法群。

除了基本的置换群概念，还有另一个伽罗瓦需要用到的有力的数学工具，它能使他着手证明一般的五次方程（以及任何更高次方程）不能用根式解。这就是子群的思想。像一些政党或组织的分裂者偶而又自成一党一样，一个群的元素的某类子集可能自身就满足成为一个群的四个要求（封闭性、结合律、单位元、逆元）。在这种情况下可以说子集形成一个子群。例如，在 170 页的置换 I 和 t_3 形成三个对象的置换群 S_3 的一个子群，因为 $I\circ t_3=t_3$，$t_3\circ t_3=I$（见第 170 页的表），隐含着封闭性和 t_3 与 I 都是其本身的逆元的意义。如果我们用子群的阶（对上述的子群而言是 2）去除母群的阶（阶即元素的个数，在 S_3 这个例子中是 6），我们就得到了指数。在上面这个例子中指数是 6÷2 即 3。这样运算的结果为一个整数的事实并非偶然。由拉格朗日的一个重要定理可确保情况总是如此：有限子群的阶总是等分其有限母群的阶。你永远不可能发现一个 12 阶的群有一个阶数为 5，7 或 8 的子群；它可能有阶数为 2，3，4，或 6 的子群。

伽罗瓦现在拥有了所有他感觉到证明需要的工具，但是一步巨大的富有想象力的飞跃仍然要求把所有这些因素整合到一起，以创造一幅连贯的画面。这将载入数学史册。

伽罗瓦光辉的证明

在一幅著名的希德尼·哈列斯（Sidney Harris）漫画中，可以看到两个数学家紧挨着一块被方程覆盖了的黑板。漫画中一位数学家指着写在两个复杂公式之间的短语“于是奇迹发生了”。漫画的标题是：“我想你在第二步应该更明确些。”伽罗瓦的洞察力简直可以说是一个奇迹。在科学史上，即使再伟大的发现通常都可以追溯到当时一些“流传的东西”。这只是由谁来发现的问题。例如，绝大多数物理学家会承认，即使爱因斯坦没有提出产生著名公式 $E=mc^2$ 的狭义相对论，其他人迟早也会提出同样的思想。一个值得注意的例外是爱因斯坦的广义相对论——在广义相对论中几乎没有什么“流传的东西”——其中所蕴涵的同样伟大的思想可能只有在很久很久以后才会物质化。这是那种重力仅仅反映时空几何学的观念。正如重的保龄球导致蹦床下陷，巨大的物体使其周围的时空弯曲。在行星围绕太阳的运动中，它们遵循弯曲的轨道不是因为一些难以解释的引力，而是因为这种时空弯曲。由于这种思想代表了感知宇宙的非常构造的这样一种革命，所以著名的美国物理学家理查德·费曼（Richard Feynman，1918～1988）曾经说过：“我依然不明白他是如何想出它的。”即使在今天——第一篇关于广义相对论的论文发表 90 年后，爱因斯坦的直觉仍然是令人震惊的（我将在第 7 章继续讨论广义相对论）。

当许多数学家想到伽罗瓦时，他们也表示同样的敬畏。伊利诺斯大学的约瑟夫·罗特曼（Joseph Rotman）告诉我：“伽罗瓦对于群的发现抒写了天才的一笔。别忘了，伟大的数学家阿贝尔同时也在研究利用根式的可解性问题，他却没有提出群论。实际上，只有当柯西在 19 世纪

40 年代回到法国时，他似乎才领略到了伽罗瓦的成就，柯西的紧致群理论研究导致了群论在其他数学领域中的应用。”牛津大学的代数学家彼特·纽曼（Peter Neumann）补充说：“伽罗瓦对正确地理解群有着非凡的洞察力，而同样非凡的是他对如何将群应用于方程理论的理解——最后创立了我们现在所称的伽罗瓦理论（别忘了，这就是现代方程理论）。”

那么，伽罗瓦是如何证明其创造性命题的呢？尽管伽罗瓦的证明实际上多少有点技术性，但它提供了这样一个进入他的不可超越的创造性的独一无二的窗口，而这种创造性确实值得花费精力去探究。沿着证明的逻辑步骤前进，就像当莫扎特创作一首协奏曲时，我们走进了他大脑的迷宫。

该证明包含三个关键的因素，所有因素都带有原创性和想象力。伽罗瓦首先说明了每个方程都有其自身的“对称外形”，“对称外形”即一个置换群（现在称为伽罗瓦群），它代表了方程的对称性质。这一步的重要性怎么强调都不为过。在伽罗瓦之前，方程总是根据其次数进行分类：二次方程，三次方程，五次方程，等等。伽罗瓦发现对称是一个更重要的特征。根据方程的次数对方程进行分类类似于根据尺寸对玩具箱中的木质积木构件进行分组。伽罗瓦根据对称性质的分类就等于说他意识到了建筑材料的形状——圆的，方的或三角形的——更为基本。特别地，一个方程的伽罗瓦群是方程假定解的最大置换群，它使这些解的某种组合值保持不变。例如，考虑两个对象的置换群。这个群由两个元素组成——恒等变换和互换两个对象的运算。现在来考察二次方程。我们可以用 x_1 和 x_2 来表示其两个假定解。显然，组合，即两个解的和 x_1+x_2，在两对象置换群的两元素的运算下保持不变。恒等变换使 x_1 和 x_2 原封不动；互换 x_1 和 x_2 仅仅将 x_1+x_2 转换成 x_2+x_1，而它们具有相同的值。对于 n 次方程而言，我们从高斯的代数基本定理知道它们具有 n 个解。n 个解的可能置换的最大数是 $n!$。而包含所有置换的群就是我们前面称为 S_n 的群。伽罗瓦能够证明，对任何次数 n，一个人总能找到

一些方程，这些方程的伽罗瓦群实际是整个 S_n。换句话说，他表明了，在任何次数上都存在拥有最大对称可能性的方程。例如存在五次方程，其伽罗瓦群是 S_5。

伽罗瓦证明中的第二个因素仍然是又一个创新。已经引入子群的概念后，伽罗瓦通过定义一个正规子群给子群的概念增加了一种扭曲变换。以三个对象六种置换的群 S_3 为例。易于检验，有三种运算 I，s_1，s_2（见第 170 页）组成的子集形成 S_3 的一个子群。$s_1 \circ s_1 = s_2$，$s_2 \circ s_2 = s_1$，并且 s_1 和 s_2 互逆（$s_1 \circ s_2 = I$），这样的事实（见 170 页的乘法表）确保了封闭性。我们可以用 T 表示这个有三个元素的子群。现在设想取 T 的任一元素，例如 s_1，然后用母群 S_3 的一个元素，比如说 t_1，去左乘它，用这一元素的逆元素（恰巧也是 t_1，因为 t_1 是其自身的逆）去右乘它。也就是说，我们构造这样的运算顺序 $t_1 \circ s_1 \circ t_1$。利用第 170 页的乘法表我们发现 $s_1 \circ t_1 = t_3$，$t_1 \circ t_3 = s_2$。换句话说，$t_1 \circ s_1 \circ t_1 = s_2$，而且 s_2 自身就是子群 T 的一个元素。如果子群的任一元素都满足这个性质（母群的一个元素左乘它，并由这一元素的逆元素右乘它，结果得出子群的一个元素），那么该子群叫做正规子群。容易验证 T 确实是 S_3 的一个正规子群。事实上，T 是 S_3 的最大的（最高阶的）正规子群。一般说来，如果一个群完全具有正规子群（群自身以外），其中一个将是最大的。反过来，这个最大子群可能有它自身的子正规子群。其中一个又有最高的阶。在这个意义上，可以追踪最大正规子群的一个完整家系。我们可以用这些子群的系谱去创造一个指数（母群的阶被最大正规子群的阶所除）顺序。在 S_3 和 T 的情形下，指数是 $6 \div 3 = 2$。T 的唯一的正规子群是最简单的，事实上是最小群——仅由单位元 I 组成的群。该群的阶为 1。因此在 T 和其正规子群之间的指数是 $3 \div 1 = 3$。几代群的层级 S_3、T 和仅由单位元构成的那个群就给了我们一个指数顺序2，3。

没有什么地方能比伽罗瓦证明的第三步使他的天才更加辉煌地闪耀。这里他使用了他的想象力的全部创造性。甚至伟大的阿贝尔也未解

决的这个问题——使用一个公式解方程的条件是什么？——将要被解答。伽罗瓦证明，一个方程要有公式解，方程必须具有一种特定类型的伽罗瓦群。特别地，如果由后代最大正规子群产生的每一个单独的指数是一个素数（只能被1和其自身所整除），那么伽罗瓦称这个群是可解的。然后，他能够证明，一个方程存在公式解的条件是其伽罗瓦群可解，由此完全证明了“可解性”这个名字的使用是正当的。本质上，伽罗瓦表明了，当一个方程的伽罗瓦群可解时，方程求解的过程可以分解为较简单的步骤，每一步仅涉及较低次方程的求解。

该定理如何应用于实践呢？例如在一般的三次方程情形里，当方程的群是 S_3（三个解的所有置换的群）时，方程是最对称的。然而，S_3 显然是可解的——正如我们已经看到的，2 和 3 两个指数都是质数。因此，正如费罗、塔尔塔利亚和卡尔达诺已经证明的那样，一般的三次方程存在公式解。另一方面，对于一般的五次方程，伽罗瓦以类似的方法开始，首先证明了，存在伽罗瓦群是五个解的置换群 S_5 这样的方程。然而，妙就妙在这里。伽罗瓦证明了，S_5 作为一个群是不可解的（其中一个指数证实是60，这不是一个质数）。因此五次方程不具有正常的伽罗瓦群。这完成了一般五次方程（同理，任何较高次的一般方程）不可能有公式解的证明。这样，数学史上一个最让人感兴趣的问题得以彻底解决。然而，为了完成这个需要花大力气的任务，伽罗瓦不仅提出了光辉的思想，而且建立了一个全新的数学分支，并确认对称性是方程最本质特征的根源。

五次方程公式解的不可能性的明确论断乍一看是个令人失望的结果，但这失望却孕育了财富。这让我们想起了圣经中扫罗王的故事。当扫罗的父亲基士丢了几头驴时，他就吩咐儿子扫罗说：“你带一个仆人去寻找驴。”对丢失的驴的寻找引导扫罗到了先知撒母耳那里。撒母耳拥立这个年轻人为以色列的第一个王。这里，伽罗瓦对五次方程解的寻找产生了“数学抽象的顶尖艺术”——群论。

约会游戏

虽然发明群论时伽罗瓦内心并没有那么宏伟的目标，但群论后来却成为所有对称性的“正宗”语言。置换在群论中所起的突出作用乍看起来多少让人感到惊讶。毕竟，当我们完全认识群论后，置换在日常生活中对我们的冲击并非那么显著。然而，即使是悄悄地，而且有时是在最意想不到的地方，但置换的确出现了。

考虑一下这样一个极其重要的问题——寻找婚姻的另一半。从遇到的一个再转移到下一个，每个人都在寻找一个适合的心心相印的伴侣。但是寻觅者如何知道他或她何时出现？会不会（如同电影中那样）当你一看到这个特别的人时，立刻就知道他或她就是你满世界寻找的那个人？或者用电影《缘分天注定》中一个人的话来说，什么时候你才应该停止寻找白马王子/梦中佳丽，而满足于一见钟情的先生/女士呢？为了把这个决定一生的问题转化为一个更易处理的问题，进行一些简化的假设是有益的。假设一个女人或男人在一生的合适的时期平均遇到 4 个可以考虑作为潜在配偶的人（随后我将讨论不同数量候选对象的情况）。进一步假设寻找伴侣的人能够检查所有四个候选对象，他或她可按照从最差（记为 1）到最合适（记为 4）的顺序对他们排名，没有两个人顺序相同的情况。通常不可能一下子遇见所有潜在伴侣。而且，正常的得体的社会礼仪禁止一个人回头去找先前被拒绝的候选对象。进而，生活的急流带着男人和女人穿过一系列按随机顺序发生的约会。因此，对四个潜在的伴侣来说，以下 4！＝24 种约会顺序的置换的每一个都有相同的发生概率：

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

例如，顺序3142意思是第一次会见次好的候选对象，第二次会见最差的候选对象，第三次会见最好的候选对象，最后会见次差的候选对象。在这个例子中，等待最后出现的候选对象是白马王子/梦中佳丽当然不能产生最想要的结果。的确，择偶过程太长可能造成回头机会减少。那么，可怜的年轻（和不太年轻的）人该做些什么呢？更甚者，如何使找到最佳伴侣的机会最大化呢？

首先要意识到的是，准确地处理这类（显然简化了的）问题确实存在一个一般策略。如果潜在的伴侣数是4，办法是在1和4之间选择一个数，称之为k。然后，经过相见和详细考查$k-1$个潜在的伴侣后，选择比前面考查过的所有那些人都好的第一个人（如果没有这个人，就选择最后一个）。例如，如果$k=2$，办法是仔细考察第一个候选对象（$k-1=1$），随后选择比已经检验的那个人更好的第一个潜在的候选对象（记住，假定是不能回头找以前的潜在候选对象）。这个策略背后的合理性是明显的——一方面，它充分利用了已经获得的信息，另一方面它注意了未来不确定的事实。不过，一般的策略不会告诉你，要为k选择哪个值。为了解决这个问题，我们必须查明哪个k值可以使选择最好候选对象（4号）的概率最高。例如，对$k=1$（$k-1=0$），看了第一候选对象就结束了，所以只能选他。要使这个选择最好，求偶者依赖于在相遇顺序中4首先出现的六种置换：4321，4312，4231，4213，4132，4123。显然，这六种置换在已知的24种可能性中命中一个的概率是

1/4。这容易理解——即如果求偶者还没有遇到任何一个候选对象，在第一次约会中有1/4的机会找到最好的。当$k=4$时也是这样。在这种情况下（$k-1=3$），一个人赌第四位，也是最后一位候选对象是最好的。这对应着按约会顺序的六个置换：3214，3124，2314，2134，1324，1234，命中6种置换的概率还是1/4。当$k=3$（$k-1=2$）时，求偶者已经遇见了两位潜在伴侣，然后，选择紧随其后出现的比前两位都好的那位候选对象。在这种情形中产生最佳选择（4号）的置换是：3241，3214，3142，3124，2341，2314，2143，1342，1324，1243。例如，如果遇见的顺序是3241，求偶者首先遇见候选对象3和2，然后，由于4号比那两位中的任一位都好，4号将是被选择的那位。当顺序是3214时，第三位候选对象（1号）不比前两位好，因而继续寻找下去，直到找到4号。上面这个表（当$k=3$时）显示在这种情况下存在10种置换可以产生最佳的选择。因此，成功的可能性是10/24或者约为42%。最后，当$k=2$（$k-1=1$）时，选择是，在遇见第一位后又遇见的第一位更好的候选对象你可以验证，在这种情形里使得找到4号的置换是：3421，3412，3241，3214，3142，3124，2431，2413，2143，1432，1423。例如，当顺序是3412时，第二位候选对象已经比第一位候选对象好了，因此这位候选对象将被选中。另一方面，当顺序是3214时，求偶者拒绝第二和第三位候选对象，因为他们不比第一位好，他/她不得不等候最后潜在的伴侣以找到较好的那位。既然$k=2$在24种顺序中有11种，或者以大约46%的成功率获得了合意的结果，因此这是可采取的最好的策略。类似的计算表明，如果潜在的伴侣数是5，6，7，或8时，$k=3$时给出了最高的可能性。如果潜在的配偶数是9或10，你将在$k=4$时最大化你的机会。

生活当然比这个过分简化的模型复杂得多，特别当涉及心理问题时。选择伴侣是件非常严肃的事，所以不能把它归纳为一种纯粹的置换检查。虽然如此，依然真实的是，置换可能在人们最料想不到的地方突然出现。顺便说一下，上面列举的一般策略可以被应用到很多其他（特

别是不怎么要紧的）情况中：从选择一辆二手汽车到选择一位家庭牙医。如果潜在的选择数很大（比如说，大于 30 个），可以从数学上证明“37%”法则将产生最好的成功机会。也就是说，检验 37%的可能的汽车、饭店或家庭医生，然后选择比你曾看到的任何一个都好的第一个。（如果有更强烈的数学倾向的读者想知道，37%这个奇怪的数是从哪里来的，它约等于 1/e，这里 e 是自然对数的底。）

摇动，而非搅动

通过数学寻找你生命中的爱情并不是置换进入众人注意的焦点的唯一过程。抽签则使置换进入了众人的注意焦点，没有什么地方比 1970 越战时期的征兵抽签更富戏剧性的了。

1969 年 11 月 26 日，理查德·尼克松（Richard Nixon）总统签署了一项总统令，要求义务兵役制建立一个征召的随机选择顺序。总统令规定抽签基于出生日期，但却没有提供具体的确定日期的精确方法。

用抽签来决定征召，这在历史上并非第一次。圣经中法官基甸（Gideon）的故事特别有趣。第一次上帝告诉基甸：“你所带的军队过多，所以不能打败米甸人。以色列会说‘我自己的手已经拯救了我’，这只是减损了我的声誉。因此，现在你要向军队宣告，‘凡惧怕和战栗的人可以回家。’”于是基甸对他们进行了筛选；有二万二千人回家，只剩下 1 万人。

在第二次抽签阶段，上帝给基甸增加了第二条选择标准。基甸被要求带着他的军队停在水旁喝水。然后，上帝要他只选择那 300 个“把水捧到嘴边”舔水喝的人，直接打发走所有剩下的“跪下喝水”的人。很显然，基甸的抽签离随机选择还很远——全体候选对象的所有可能的置换没有受到公平对待。对于第二个独特的选择标准有很多解释，最简单的是，为了放大奇迹般的胜利所给人们的印象，于是采用了只一小部分人的整个计划。更复杂的解释是将下跪与其他神的崇拜的习惯联系在一

起，或者说用手（而不是直接从河里喝）证明了这个人考虑周全，并且不贪婪。

相当奇特的是，即使经过了数千年，1970 年的征兵抽签也遭遇了随机化问题的困惑。

程序本身是足够简单的。官员将写有一年 366 天（包括 2 月 29 日）日期的纸片塞进胶囊。并于 1969 年 12 月 1 日从一个碗中将这些胶囊一个接一个地抽出。按照挑出出生日期的顺序，每一个出生于 1944 年至 1948 年的男人被分配一个征兵号。例如，第一个抽出来的日期是 9 月 14 日，那么所有具有该生日的男人被分配为 1 号。出生于 6 月 8 日（最后抽出来的胶囊）的男人被分配为 366 号。显然，每次抽签代表 366 个日期的一个置换。他的征兵号越小，一个男人实际被征召的机会越高。下表显示了 1970 年抽签所得到的按月分布的平均抽签数。

月份	平均数	月份	平均数
1 月	201	7 月	182
2 月	203	8 月	174
3 月	226	9 月	157
4 月	204	10 月	183
5 月	208	11 月	149
6 月	196	12 月	122

即使不是一位专业的统计学家，一个人也可以察觉到在这些数中的一种清晰的趋势。当 1～5 月的平均数相对保持不变时，6～12 月相应的数却有显著且几乎稳定的下降。特别是 11 月和 12 月，较之 1～5 月它们有相当低的平均数。结果却令人困惑——在一年中出生较晚的男人具有非常高的可能性去参加一场艰苦的战争。

在真正的随机化条件下，所有日期的可能排序之一具有相等的概率

1/366!（366! 为可能的置换数），并且你可以预期不同月份的平均数大致相等，约183或184。但是，数据显示前六个月中每个月的平均数都高于这个数，而后六个月中每个月的平均数都低于这个数。统计学家可以证明，表中显示的分布类型在真正的随机选择过程中发生的概率不足1/50000。这是怎么发生的呢？

设定抽签程序的描述提供了一些重要的线索：

> 一个男人数出31个胶囊，把写有1月份日期的纸片塞进去。随后将1月份的胶囊放进一个巨大的正方形木箱中，再用一个纸板分配器将其推到一侧，使箱子局部为空。接着，将29个2月份的胶囊倒进箱子的空余部分，再数一下后用分配器将其丢入1月份的胶囊中。于是，根据帕斯卡上尉（义务兵役制的公共信息长官）的说法，1月份和2月份的胶囊就被彻底混合了。在随后的每个月继续进行同样的过程，数据胶囊被投入到箱子的空余侧，然后用分配器将其推入上个月的胶囊中。这样，1月份的胶囊被与其他胶囊混合11次，2月份的胶囊被混合10次，以此类推。由于11月份的胶囊与其他月份的胶囊只混合2次，12月份的胶囊与其他月份的胶囊只混合1次……在公众监督下，这些胶囊被从黑箱子里倒进一个两英尺深的碗里。一旦进入碗里，胶囊就不再被搅拌……抽取胶囊的人……虽然偶尔他会将手伸到碗的中间或碗底但一般他是从上面挑的。

这种详细的描写几乎可使人确信，这是一种不充分的混合，由于逐月放入胶囊，这就造成了因此产生的非随机风险。在听从了一些公众的批评后，1971年的征兵抽签程序得到了纠正。的确，在实践中进行完美的随机化可能比一个人想像的更难。例如，就拿人们为在两个困难之间的选择进行随机决策而提出的，被认为是最公平的事情——掷硬币——来说吧。得到正反面的概率是相等的，对吗？不完全正确。由斯坦福大

学的统计学家泊斯·迪科尼斯（Persi Diaconis）和苏珊·赫尔墨斯（Susan Holmes），加利福尼亚圣克鲁兹大学的理查德·蒙哥马利（Richard Montgomery）所进行的一项近期研究表明：由于不完美的投掷（甚至有时导致硬币根本不翻转），一枚硬币更可能以抛出它时的那一面落地。虽然两种结果的差异不是很大——在大约51%的次数中，一枚硬币将以它开始时的那一面落地——然而，它说明即使这么简单的事情也不是理所当然的。没有人比迪科尼斯更有条件检验事情是否为随机的。他是证明了以下命题的统计学家——玩纸牌的人平均要洗不下7次牌，才可在一副牌中创造一种随机排序。他还因披露和揭穿了各种“精神”现象而闻名。迪科尼斯用硬币进行的广泛的实验证明，你永远都不要根据一个在桌上直立旋转的便士来做出任何重要的决策——由于正面具有较多的重量，这种便士在落地时更常是反面。

虽然它们是重要的，但一提起群论，置换本身远非整个故事——群导致了抽象的更加巨大的扩展。特别地，如果两个明显不同的问题以相互同构的群（具有相同的结构）为特征，那么，这一重要暗示表明，那两个问题可能比你所能猜想的联系更紧密。

抽象的顶尖艺术

在一本出现于1870年的题为《商业自然史》的书里，约翰·耶兹（John Yeats）写道：“没有大量的抽象推理就不可能使我们发现铁的性质和用途。”他可能是正确的。然而抽象正好赋予数学结构以便利性。它们可以从一门学科延续到另一门学科，从一个概念环境延续到另一个概念环境。

凯莱定理——每一个群，不管其元素或元素之间的运算，基本上都是一个置换群的翻版（同构）——这为理解抽象实体的群建立了一个舞台。凯莱自己的著作和他之后数学家卡米耶·约当（Camille Jordan）、法利克斯·克莱因（Felix Klein）、华尔特·冯·迪克（Walter von Dyck）

及其他人的创新性发展都证明了，一个人基本上可以从任何群出发，逐字地剥去其大部分现象，直到仅仅保留赤裸裸的本质。这个被揭开的骨架足以抓住群的结构和所有重要性质。不可避免地浮现于我们脑海的一个类比是，最小化主义的20世纪艺术学校。还有，诸如卡尔·阿卓（Carl Andre）、多纳德·贾德（Donald Judd）、罗伯特·莫里斯（Robert Morris）和其他艺术家的目标是，专注于最基础的东西，并将直观形式极度简化。从设计的本质来看，欣赏最小化艺术实为欣赏数学，这基本上总是需要知识，因而是习得的而不是直觉的。

早在1854年，从置换群（当时所知的唯一的群）出发，凯莱就跨出了一大步，他系统地陈述了他关于抽象群概念的第一直觉。不过，和伽罗瓦的情况一样，他的原创思想如此超前于他们的时代，以至于它们没有引起任何注意。正如历史学家兼数学教育评论家莫里斯·克莱恩（Morris Kline）所指出的："无论是数学家还是学生，他们都没有听到抽象这个早产儿所发出的第一声啼哭。"因此，从智力上看，凯莱（图78）可以被看作是伽罗瓦最直接的继承人之一。另一方面，凯莱的一生与苦命的法国浪漫主义天才①截然不同。亚瑟·凯莱在伦敦皇家学院的老师们很快认识到了他不同寻常的数学才能。当他在剑桥大学继续接受教育时，大学主考官给凯莱的评价是"超越第一"。这个年轻人没有辜负导师的期望；甚至在25岁之前，凯莱名下就已经拥有两打数学论文。他的全面的多产只有柯西和欧拉能与其相提并论。

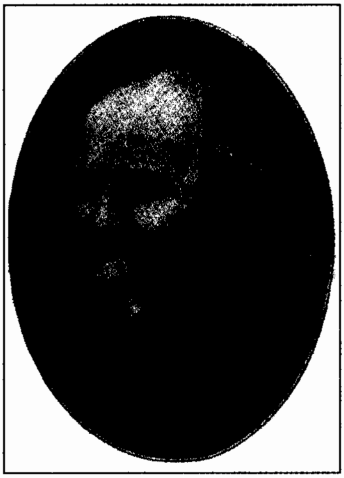


图 78

① 指伽罗瓦。

不像伽罗瓦一生的大起大落（大部分是大落!），凯莱的一生走得平稳而成功。在他 1854 年的富有洞察力的尽管相对没有引起注意的论文之后，凯莱将其注意力转向了数学领域的其他重要主题，但在 1878 年他猛然转向了群论。在他的 4 篇系列的开创性论文中，他成功地将群论推向数学研究的核心。确实，在凯莱的工作之后，仅仅过了 4 年多，关于群论的抽象的公理化的定义就出现了。

数学学者詹姆斯·R·纽曼在他的纪念文集《数学世界》中写道："群论是一门数学分支，在群论中，一个人对某事物进行某种处理，然后，对另一事物进行相同的处理，或者对同一事物进行不同的处理，并比较它们处理的结果。"在任何一本字典里，几乎不能将这种令人困惑的陈述视为一种可接受的定义，然而它抓住了已经成为群论特征的抽象水平。我将用几个非数学的例子来解释一下这个概念。

在不同的语境和环境下，同样的笑话可以有不同的复述。一个物理学家要表达他对一些人智能的蔑视，可能会说："他如此愚蠢，光都要绕过他。"对于同样的蔑视，一个在互联网时代成长起来的人可能使用"我认为，他的 URL 不允许外部访问"这样形象化的比喻。一个税收顾问会说："如果对大脑征税，他就会得到退税。"一个化学家可能选择这样的字眼："他已经达到了大约室温的 IQ。"同样，尽管用词不同，在相隔数世纪的阿米斯纸草书，斐波那契的书和童谣集《鹅妈妈》（第 3 章）中出现的 7 的力量之谜基本上是一样的。最后，一个人可能认为，很多神话故事，如"白雪公主"和"灰姑娘"，事实上都是同一故事的不同包装：一位恶毒的继母一直虐待未来的王妃，直到一位英俊的王子来拯救这年轻的女孩脱离苦海。群论允许一种类似的抽象。一种相同的群结构可以描述似乎全然不同的概念。我将用几个相当简单的例子来证明群的统一力量。

以可以在任何一条牛仔裤上进行的 4 种运算开始。X 将代表运算"将裤子从后翻到前"（当你不穿它时!）。Y 代表"将长裤翻出"。Z 代表"将裤子从后翻到前，再翻出"，并且我将以 I 表示这种恒等变换，

即什么也不做。两个运算的结合（标记为“∘”），只通过“伴随”就可达到。你能容易地检验，这些运算构成了一个群。特别地，每个运算是其自身的逆：$X\circ X=I$（从后面翻到前两次就恢复到最初的位置）；$Y\circ Y=I$（翻出两次使长裤恢复原来的样子），任何两个运算的组合给出了第三种运算）。例如，$Z\circ Y=X$，因为“翻出”伴随“从后翻到前，再翻出”只是造成“从后翻到前”。所以，这个群的“乘法表”采取如下形式（回忆一下，对应于行 X 和列 Y 的项是 $X\circ Y$，意思是 Y 伴随 X）：

∘	I	X	Y	Z
I	I	X	Y	Z
X	X	I	Z	Y
Y	Y	Z	I	X
Z	Z	Y	X	I

下面考虑一种通常用符号 Δ 表示的有趣运算，符号 Δ 能够结合（以某种方式）任何两个对象集。例如，如果集合 A 由那些皮毛中至少有些黑斑点的猫组成，集合 B 由那些至少有些白斑点的猫组成，那么 $A\Delta B$ 得到一个皮毛上要么有黑斑点，要么有白斑点，但不兼而有之的猫的集合。用图来说，如果在图 79 中 A 和 B 代表圆的面积符号，那么 $A\Delta B$ 对应着阴影面积。Δ 将两个集合合在一起，但排除了重叠部分。下面取 4 个简单的集合：集合 X 仅有一个对象：一只小鸡。集合 Y 也只包含一个对象：一头母牛。集合 Z 由两个对象组成：一头母牛和一只小鸡。集合 I 是空集，它没有任何对象（这个集合的作用与普通加法中 0 的作用相同）。现在用运算 Δ 将任意两个这样的

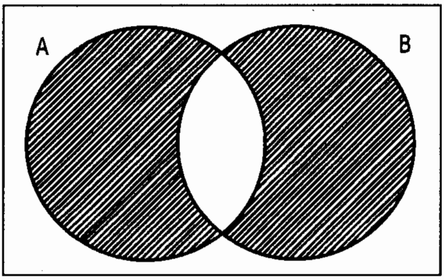


图 79

集合结合起来。例如，$X\Delta Z=Y$，因为在 X 或 Z 中，而又不同时在两者之中的对象的集合，是包含一头母牛的集合。相似地，$Y\Delta I = Y$①因为 Y 中有一头母牛，而母牛显然不属于空集 I。集合 I 因此起着单位元的作用。每个 X、Y、Z 都是它自己的逆，因为不同在 X 与 X 中的对象集显然是空集：$X\Delta X=I$。

你能很容易地检查出由运算 Δ 结合起来的集合 X，Y，Z，I 构成一个群，其表是：

Δ	I	X	Y	Z
I	I	X	Y	Z
X	X	I	Z	Y
Y	Y	Z	I	X
Z	Z	Y	X	I

然而，这是一张与牛仔裤变换中得到的那个表完全相同的表。尽管在这两个例子中的群元素和群运算完全不同，但这两个群都具有相同的结构——它们互相同构。这仅仅是因为我们所选择的两个群有点特殊吗？为了使我们自己相信情况并非如此，我们可以考虑一个非常普通的旋转群。为了使变换形象化，我们将更简单地进行，你可能想用一些表面带有不同图案的矩形盒，例如火柴盒或一本厚书检验下面 4 种运算（图 80）：

X——围绕 X 轴翻转半周。

Y——围绕 Y 轴翻转半周。

Z——围绕 Z 轴翻转半周。

I——单位元，即让盒子“不动”。

如果进行一些实验，例如 X 伴随 Y，你将得到与进行的运算 Z 同样

① 原书中使用的是 $Y \circ I = Y$，但根据上下文推测，这里的符号应是 Δ。$X\Delta X=I$ 的情况也是这样。

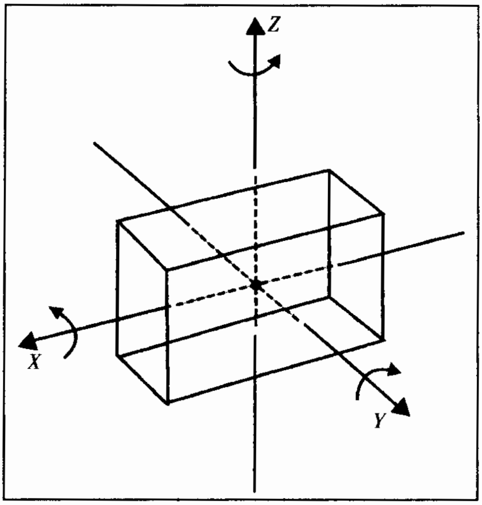


图 80

的结果。同时，如果对 X，Y，Z 中的任何一个运算进行两次，最初的结构（单位元）就恢复了。这个群的表与前面两个的表是相同的——这个几何群与牛仔裤群和小鸡-母牛群是同构的。

也许没有哪个领域比人类学领域对群论的应用更令人惊讶。在一个澳大利亚土著部落凯瑞拉中发现的极其复杂的姻亲系统，使人类学家非常困惑。每个凯瑞拉人都属于 4 个类别或宗族之一：班那卡、凯瑞莫拉、布瑞和帕雷瑞。人类学家发现，婚姻和下一代与类别的联系遵守如下严格的规则：

1. 一个班那卡人只能与一个布瑞人结婚。
2. 一个凯瑞莫拉人只能与一个帕雷瑞人结婚。
3. 一个班那卡男人和一个布瑞女人的小孩是帕雷瑞人。
4. 一个布瑞男人和一个班那卡女人的小孩是凯瑞莫拉人。
5. 一个凯瑞莫拉男人和一个帕雷瑞女人的小孩是布瑞人。

6. 一个帕雷瑞男人和一个凯瑞莫拉女人的小孩是班那卡人。

被这个不寻常的制度所困惑，著名的法国人类学家克劳德·列维-斯特劳斯（Claude Lévi－Strauss，生于1908年）在1940年代向他的同胞、数学家安迪·威尔（André Weil，1906～1998）描述了这个规则，希望威尔能识别出一些指导性的模式。威尔正是可以求助的理想人选。除了他的杰出的数学技巧，他也拥有杰出的语言表达能力和语言知识。他对梵文和古文知识，例如宗教史诗《摩诃婆罗多》的热情使他在印度的艾里格伊斯兰大学获得了第一个职位。经过一番深思熟虑，威尔的确能够把整个凯瑞拉方案翻译成群论的语言。为了重述威尔的说明，我将4个类别表示如下：

班那卡——A
凯瑞莫拉——B
布瑞——C
帕雷瑞——D

上述婚姻规则（1）和（2）就是一个 A 只能与一个 C 结婚（反之亦然），一个 B 只能与一个 D 结婚，这些可以用下面的家庭映射表示，记位“f”：

$$f=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}$$

注意，如果对这个置换施行两次，它将恢复最初的顺序——$f \circ f = I$（这里 I 是单位元：f 将 A 变为 C，C 变为 A，因此应用 f 两次就将 A 变成自身，对其他字母亦然）。根据后裔规则3～6，孩子的类别可以由其父系祖先（例如，一个班那卡男人的孩子总是帕雷瑞人）或者由其母系祖先（例如，一个班那卡女人的孩子总是一个凯瑞莫拉人）决定。应用类别符号，以及分别代表父系和母系规则的 p，m，这可以用两个置换来表示：

$$p=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ D & C & B & A\end{pmatrix} \qquad m=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & A & D & C\end{pmatrix}$$

再次注意，$p\circ p=I$ 和 $\mathrm{m}\circ\mathrm{m}=I$。而且，对置换 f，p，m 中的每两种进行连续运算都产生第三种置换（例如 $f\circ p=m$）。现在我们可以为四种置换 I，f，p 和 m 构建完整的“乘法表”：

$\circ$	I	f	p	m
I	I	f	p	m
f	f	I	m	p
p	p	m	I	f
m	m	p	f	I

我们发现，不仅凯瑞拉婚姻-血族关系规则形成一个群，而且仔细研究这个乘法表就会使你明白，这个群与牛仔裤、小鸡-母牛群、旋转群也是同构的！事实上，我可以考虑用这个表来描述任何抽象的群，在群中，三个元素 X，Y，Z 中的每一个都是其自身的逆，任何两个的结合给出第三个。

顺便说一句，你可能想知道，怎么能把复杂的凯瑞拉血族关系规则翻译成西方文明的等价物？它们的确能。设想有两个家族，史密斯家族与琼斯家族。两个家族的成员都居住在纽约和洛杉矶，因而可以定义四个类别：居住在纽约的史密斯家族成员；居住在洛杉矶的史密斯家族成员；纽约的琼斯家族成员；洛杉矶的琼斯家族成员。规则可以阐述如下：一个史密斯成员只能与一个琼斯成员结婚（反之亦然），一个纽约人只能与一个洛杉矶人结婚（反之亦然）；孩子在母亲居住地生活但采用父亲家族的姓氏。这些（显然人为的）血族关系规则恰恰产生出与凯瑞拉血族关系相同的结构。

显然，没有人猜想凯瑞拉人知道群论。对他们的婚姻规则的群论的

描述从人类学研究来看可能还不完全必要。然而，以这种方式分析这个规则能够揭示原本难以认识或者可能被混淆的内在结构。从不同的学科抽象出群，在很多方面与对不同语言结构的分析是相似的。对他们，比如说印-欧语系之间相互联系的认识，是由相似的过程产生的。因此，克劳德·列维-斯特劳斯在社会人类学领域的广泛分析，正如他的《血族关系的基本结构》中所表达的那样，一般被看做是现代结构主义背后的驱动力量——寻找基本元件和负责将它们装配在一起的规则。

结构主义从瑞士语言学家费迪南德·德·索绪尔（Ferdinand de Saussure，1857～1913）的语言学著作中获得其组织原理，并从其著作中汲取灵感。传统的语言方法主要基于历史和哲学研究，索绪尔放弃了语言研究的传统方法，支持结构分析。一名检验一架雷格斯制造的飞机的结构主义者不是十分关心其模型是否确实能飞。相反，特别像一名群论学家，结构学家会认识到有不同的建造材料，并且这些基本元件根据非常具体的规则被连接在一起。在语言上，这些元件可能是制造所有语音（在英语中有 31 个）的音素，规则就是单词据以组织的语法。事实是，利用相对一套相当有限的语法规则和一套有限的音素或术语，人类就能够创作出令人印象深刻的作品，例如莎士比亚的戏剧、但丁的《神曲》和《大英百科全书》。即使是蹒跚学步的孩子也能说出从未有人表达过的完整短语。孩子能学习语言这一惊人一步，与存在于学习过程本身和全球儿童所犯典型错误的相似性，已经触发了一种普遍文法的思想。正像群论原理构成了所有对称性的基础，普通文法理论假定，所有的语言都有全人类固有的潜在的语法原理。在某种意义上，普通文法不是一种真正的语法，只是所有人拥有的语言能力的一种初始状态。记住，这并不意味着所有语言具有相同的语法，只是存在共同和不变的基本准则而已。这种见解部分来源于结构主义，MIT 的研究人员诺姆·乔姆斯基（Noam Chomsky）已经将此见解应用于语言学理论和认知心理学。在意大利，小说家兼哲学家乌姆伯特·艾克（Umberto Eco）也因为其在社会和文学语境下，在符号意义（符号语言学）领域的详细的结

构主义分析而著名。

鉴于在群论和语言学之间具有的哲学相似性，下面两件事大约同时出现就毫不奇怪——当索绪尔正在革命化语言学时，挪威数学家艾克瑟尔·修（Axel Thue，1863～1922）正在引入一门公式语言的概念——一套可以通过某种公式语法（一套精确定义的规则）描述的单词（或由一些字母构成的字符串）。一个关于一门公式语言的非常简单的例子可以是一个由字母 g 和 l 组成的字符串集合。例如，“语法”可以用如下的规则来定义：

1. 从 g 开始。
2. 每当在一个单词中遇到字母 g 时，用 gl 代替它。
3. 每当遇到字母 l 时，用 lg 代替它。

你可以验证，这种语言将包括的单词有 g，gl，$gllg$，$gllglggl$，等等。公式语言在计算机科学和复杂性理论（涉及计算任务内在的复杂性）方面起着重要作用。如果看到艾克瑟尔对公式语言的定义能使你回想起群论的元素和定义，那么这决非偶然。这两个话题是密切相关的，特别是通过一个重要的所谓“单词问题”的问题：使用语法所允许的替换，判断任意两个单词是否可以相互转换。

所有这些例子将使我们得出什么结论呢？群论能达到一个人通常使用普通数所联系到的同样的抽象水平。不管我们是说七个日本武士，七个好年景，一周的七天，七个兄弟的七个新娘，还是说七个政治家（实际上，我不确信谁想谈起他们），这些都是同一抽象实体的——数字七的表示。类似地，我们刚刚遇到的四个群（牛仔裤变换，凯瑞拉，等等）全都是一个并且相同的抽象群的具体表现。通过构造一个置换群，意外地发现凯瑞拉法则提供了凯莱定理的另一种表达——确实存在一个置换群，其结构与另外三个群相同。

数学家通常谈到相互同构的群，就好像它们仅是一个群。德国数学

家法利克斯·克里斯蒂安·克莱因(Felix Christian Klein,1849～1925)由牛仔裤和凯瑞拉法则认识到了这类特别的群,所以在他之后将这类群称为克莱因四群。克莱因完成了群论应用中的一个重要突破——认识到几何、对称和群论是不可避免地相联系的。事实上,不仅仅只是有联系。克莱因证明,在很多方面,几何就是群论。这种奇怪的陈述代表了传统几何观念的一种戏剧性突破,而这值得更详细地说明。

何为几何学?

大约公元前 300 年,希腊亚历山大的数学家欧几里得出版了将在所有时代畅销的数学教科书——《几何原本》。在这十三卷的巨著里,欧几里得奠定了我们在学校里所学习的欧氏几何的基础,直到 19 世纪这都是人们所知的唯一的几何。欧几里得打算在完美定义的逻辑基础之上建立一套完整的几何理论。于是他仅从五条假定或公理出发,假定他们正确,并且设法在这些假定的基础上利用逻辑推理去证明所有其他命题。公理就像游戏规则,其"真理性"无需辩论。如果你想改变公理,那你就在玩一个不同的游戏。例如,第一公理说:"任意两点之间可画一直线。"在这个和其他公理的支持下,欧氏几何描述了经推断为正确的命题。第二,第三和第四公理同样简洁。但第五公理不同,在表达上它较为复杂,因而它具有一种比较费解的历史。欧几里得本人可能对第五公理也不十分满意,因为他努力尽其所能地避开它——《几何原本》的前 28 个命题的证明没有使用第五公理。今天最常引用的被称为平行公理的第五公理版本是由苏格兰数学家约翰·普雷菲尔(John Playfair,1748～1819)命名的,虽然它首先出现在 5 世纪希腊数学家普罗克拉斯(Proclus)的《欧几里得注释》中。第五公理是:"给定一条直线和直线外的一点,通过该点只能作一直线与已知直线平行。"数世纪以来,许多不满意的几何学家试图从前四条公理证明第五公理,努力构造一种更经济的几何,但都没有成功。然而,这些并没有完全失败,因为它们的

确提供了新的见解。特别是这些努力使人们理解了第五公理可以用其他表达方式陈述，而且这些陈述彼此等价。最后，这条蜿蜒的道路为新的非欧几何学的发展开辟了道路。

在非欧几何学方面取得重要进步的第一个人是天主教耶稣会士乔瓦尼·吉罗拉莫·撒凯里（Giovanni Girolamo Saccheri，1667～1733），不过他自己没有意识到这一点。在当时一篇非常有价值的论文——Euclides ab omni naevo vindicatus（《欧几里得无暇获释》）中，撒凯里考察了一个令人感兴趣的“如果……会怎样？”的问题——如果一个三角形的内角和不等于180°（如同我们在欧氏几何中所学的），而是大于或小于180°，那会怎样呢？一个人还能建立一种自圆其说的几何学吗？大约一个世纪后，勒让德重拾撒凯里留下的问题，并在他著名的几何著作（伽罗瓦曾经研究过的那本）中证明了，内角和等于180°的陈述与欧几里得的第五公理完全等价（也就是说，一个人可以假设两个中的一个是正确的，从而证明另一个）。然而撒凯里和勒让德都没有领会这些替代可能性的全部含意，并因错误的矛盾而停滞不前。然而这些工作和阿尔萨斯数学家约翰·海因里希·兰伯特（Johann Heinrich Lambert，1728～1777）的补充研究有助于人们关注“平行假定”，1767年法国数学家让·达朗贝尔讥讽这个假定是“基础几何学的丑闻”。来自3个国家的4位数学家——高斯，鲍耶，罗巴切夫斯基和黎曼——最终为正确地阐述第一门非欧几何学做出了贡献。在这些新的几何学中，第五公理事实上被它的一个否命题所取代：“通过直线外一点，要么没有，要么有多于一条的直线与已知直线平行。”或等价地说：一个三角形的内角和要么不到180°，要么比180°大。

展现如何认识到这种几何学并不困难。考察一下图81中的3个表面。欧氏几何是平面空间几何，即在一个桌面上遇到的那种几何。在这种几何中，平行（假定为无限的）线永不相交，任意三角形内角和总为180°。另一方面，在一个形如弯曲的马鞍形的表面上，一个三角形的内角和总是不到180°。在一个球面上，例如地球的表面，三角形的内角和

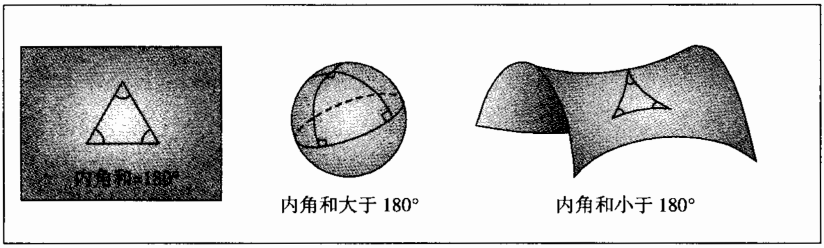


图 81

超过了 180°（图中显示的特殊情形的内角和实际上是 270°)。马鞍面几何现在被称为双曲几何。到 1824 年，一位年轻的匈牙利数学家雅诺斯·鲍耶（János Bolyai，1802～1860）算出了这种几何的很多特征。在给他的父亲，数学家法卡斯·鲍耶的一封信中，他无法抑制对于发现的兴奋："我已从虚无缥缈中创造了另一个新奇的世界。"到 1831 年，杰出的雅诺斯·鲍耶完成了他的新几何的详细的论述。由于父亲要出版一本关于几何学、代数学和分析基础的大部头论文集（《实验》)，雅诺斯准备将其手稿以附录的形式放入他父亲的书中。这篇文章曾寄给高斯，请他发表意见，高斯的回信很快浇灭了鲍耶的热情之火。高斯首先表达了他对论文思想的敬佩，但他随即指出"论文的整个内容……与在 30～35 年前已经占据我头脑的思考几乎不谋而合。"虽然无疑高斯确实预测到了如果不是全部也是大部分的鲍耶的结果，但他从未发表他们。(显然害怕这种激进的新几何学会被看做是哲学的异端)。鲍耶认识到他不是该思想的原创者，他伤心至极。由于受到这次事件的影响，鲍耶之后的数学作品都缺乏双曲几何那种富于想象力的质量了。

对鲍耶和高斯都一无所知的俄国数学家尼古拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基（Nikolai Ivanovich Lobachevsky，1792～1856）在 1829 年发表了一篇完整的论文，宣布双曲几何是欧氏几何的一种替代。然而，由于其出现在无名气的《喀山通讯》上，所以，1837 年在《克列尔杂志》上发表一篇法文版之前，它几乎完全没有引起注意。意大利的尤金诺·贝

特拉米（Eugenio Beltrami，1835～1900）最终赋予鲍耶-罗巴切夫斯基几何以与欧几里得几何相同的地位。

在一篇发表于1854年6月10日的经典演讲中，高斯才华横溢的学生乔治·弗里德里希·伯恩哈德·黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826～1866）第一次讨论了椭圆几何，例如一个人遇到的在一个球面上的最简单的形式。黎曼的论文使其排名为众多数学家中的前10位。

在椭圆几何与欧氏几何之间的一个关键区别是，在一个球面上两点之间的最短距离不是一条直线。相反，它是大圆的一段，该大圆的圆心与球心一致（如同地球仪上的赤道或经线中的情形）。从洛杉矶飞往伦敦就利用了这个事实，不是遵循地图上显示的一条直线，而是按照洛杉矶向北的一个大圆（图82）。你能容易地验证，任何两个大圆相交，其交点就是该球直径的两端（例如，在赤道上平行的两条经线相交于两极）。因此，在这种几何里根本就没有平行线。黎曼更进一步地采用了抽象的非欧几何概念，并介绍了三维甚至更高维的弯曲空间。在一些这样的空间里，几何学的性质可能到处改变，一些区域是椭圆的，另一些地区则是双曲的。在黎曼的著作和他的所有前辈们（包括高斯）的研究之间的一个关键区别是视角的变化。当高斯分析一个两维的曲面时，他将它看做一个人研究一个球面——从外部的三维视角。另一方面，黎曼却从描在表面上的一个点的视角来考察同一球面。

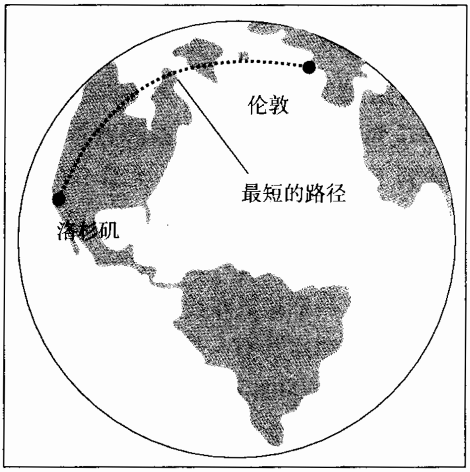


图 82

尽管非欧几何是极富想象力的数学人物的独创性发明，但起初看起来却毫无实用价值。然而，正如我们在下一章将要看到的，用于描述时空结构的爱因斯坦方程，其求解过程正出人意料地需要上面描述的几何类型来证明。黎曼的视角奠定了现代宇宙学——把宇宙作为一个整体来研究的基础，这种视角源自考虑之中的弯曲空间的一部分内容。如果你稍微仔细考虑一下，这是一个绝对令人惊奇的事实。撒凯里的显得很单纯的关于第五公理的“如果……会怎样?”的问题引起的决不仅是人们对几何的思考，人们思考的这种几何提供了爱因斯坦解释宇宙构造所需要的工具。正如伽罗瓦的群论已经成为对称性的语言一样，非欧几何已经成为宇宙学家的语言，数学家提供后世物理学家的需要，这种类型的“预知”本身已经在科学史上重复很多次了。

几何的一般化和抽象化是一个值得庆幸的进步，但到 19 世纪 70 年代，几何的发展好像完全失控。除了上面所有的非欧几何，还有形形色色的射影几何（处理射影几何图形的性质，例如当赛璐珞胶片上的一种形象被投射到电影院中的屏幕上时）；保形几何（处理空间的保角紧致化）；微分几何（利用微积分研究几何）；以及很多其他几何。如果像柏拉图所相信的，“上帝是一位几何学家”，那么所有这些几何哪一种能得到神的认可呢？23 岁的法利克斯·克莱因（图 83 显示的是他 23 岁以后的图像）用群论的方法解答了这一问题，秩序由此从混沌中破土而出。

图 83

在 1872 年于埃尔朗根大学发表的题为“关于近期几何研究的比较考察”的开创性演讲中，克莱因大胆地颠倒了对称和几何的作用。用他

的话说："存在根本不会改变图形几何性质的空间变换。这些性质的本质与图形所在空间位置、绝对尺寸、方向均无关。"在克莱因之前，数学家首先根据几何对象如圆、三角形或立方体进行思考。相反，克莱因在其所谓的埃尔朗根纲领①中提出，几何自身的特点和定义，不是通过对象，而是通过使其不变的变换群来表达的。以刚性运动的群为例——所谓刚性运动是指维持距离和角度和随之的形状不变的运动。由于这种运动是欧氏几何的生存基础，因此可以将欧氏几何定义为：在刚性运动的群的所有变换下保持不变的几何。无论你怎样转动，一个给定半径的圆仍然是同一个圆。对于两个完全重合的三角形（这是欧氏几何很多定理中的对象，也是一个令中学生经常头痛的根源），即使你平移、旋转，或者反射它们，它们都会保持全等。无论如何，克莱因的激进思想使更广泛的几何得以存在。可以扭曲或拉伸对象的其他变换可以定义新的几何。换句话说，构成每种几何支柱的统一的基本概念是*对称群*。尽管许多几何中的任一个可能建立在不同的变换群之上，但所有几何的基本蓝图是相同的。例如在射影几何中，距离显然是变化的。电影《金刚》胶片上捕捉的模型只有 18 英寸高，非常不同于屏幕上 50 英尺高的形象。因此，射影几何以一种与欧氏几何不同的对称变换群为特征（如存在于射影中的"六边形的"或"椭圆形的"概念）。根据克莱因的说法，为了定义一种几何，数学家要做的是提供一种变换群，并识别在那些变换下仍不变的全部实体。后来，两位数学巨人：挪威群论学家索福斯·李（1842～1899）和 19 世纪后期数学界杰出人物——法国人亨利·庞加莱（1854～1912）扩展并进一步深化了这些思想。

利用克莱因革新性的埃尔朗根纲领，凯莱对群的抽象，李的朝向结构化思考的趋势，庞加莱的包含一切的数学，对称和群论为众多数学提供基础这一点开始明朗化。事实上，对庞加莱来说，"所有数学大都是群"。此前出现的似乎完全无关的领域，例如代数方程理论，众多的几

① 即前面提到的克莱因演讲"关于近代几何研究的比较考察"。

何学，甚至数论（通过欧拉和高斯的开创性工作），都突然被一种基本结构统一了。尽管克莱因被他那个时代的一些（非常傲慢的）柏林数学家看做是“一个没有真正价值的吹牛者”，但在他的故事中还有另外一个优美的结果。即他用一种群论的神技将代数和几何连结起来，并将之都向后连接到——信不信由你——伽罗瓦关于五次方程的著作。然而这不是一个人的表演。普鲁士的列奥波尔德·克罗内克和法国人查理斯·赫米特为这些深刻的相互联系铺平了道路。

回到五次方程

列奥波尔德·克罗内克（Leopold Kronecker，1823～1891）代表了一位真正罕见的集天才数学家与成功商人于一身的人。他能够认识那些在金融或数学界正如日中天的人，并且很快成为他们的朋友，这种非凡才能对促进其自身的职业生涯也是非常有用的。克罗内克的一些主要数学贡献在椭圆函数论（在这方面阿贝尔写过他著名的 125 页论文）和代数数论（关于某些代数方程的解的数论）方面。

克罗内克的舅舅在 1845 年去世了。这位舅舅曾经是位兴旺发达的银行家和农业企业经理。管理他的生意的担子落在了年轻的克罗内克肩上，在那年 8 月 14 日他刚刚通过博士学位论文答辩。克罗内克以极大的干劲和毫不妥协的精神承担起责任。虽然苛求的工作迫使他在以后的 8 年里成了一名商人，但他并没有丢下数学。当在他那个位置上的其他人从事简单的娱乐活动以打发闲暇时光时，克罗内克却致力于获得可能是所有 19 世纪 40 年代后期数学家中对伽罗瓦群论的最深刻的理解（回忆一下，刘维尔在 1846 年发表了伽罗瓦的论文）。其结果就是，在 1853 年，他发表了一篇论方程可解性的通俗易懂的论文。在对其著作的描述中，数学史家 E·T·贝尔大加赞扬：“克罗内克拿着前辈提炼的金子，像个有灵感的宝石匠那样对其精雕细刻，镶上他自己的宝石，根据以前的原始材料制作一件完美无瑕的艺术作品，并在其上留下他不可能出错

的艺术个性的印象。”完全转向数学后，在随后的5年里，克罗内克直接向五次方程攀登冲击。正如你所记得的，阿贝尔和伽罗瓦都证明了，一般的五次方程不可能通过涉及系数的简单运算的公式解出，但并不是说它根本不可解。然而实际的解法仍然难以捉摸。像科学发现的时代已经到来时经常发生的情况那样，正当克罗内克试图最终破解五次方程时，一位法国数学家也在忙着做完全相同的事。

查理斯·赫米特（Charles Hermite，1822～1901）是费迪南德·赫米特（Ferdinand Hermite）和玛德琳·拉里玛恩德（Madeleine Lallemand）的第6个孩子，赫米特夫妇育有5个男孩和2个女孩。在查理的童年时期，由于他们家的布料生意很红火，全家从迪兹搬到了大城市南锡。在南锡进入一所学校后，听从巴黎亨利六世中学的建议，赫米特在伽罗瓦离开路易-勒-格兰德皇家中学11年后进入了这所中学。他的数学老师——你猜是谁——就是曾经担任伽罗瓦指导教师的路易·理查德。这位天才的老师又一次很快认识到，赫米特是“一位年轻的拉格朗日”。如果你曾经怀疑历史有重演的习惯，那么想想这件事就不再怀疑了。当还在路易-勒-格兰德皇家中学时，赫米特就发表了两篇数学论文。其中一篇题目是《关于五次方程代数解的思考》。这是一篇有趣的论文，它证明了拉格朗日的解法（第3章）不可行。不过，论文的题目和内容也说明了，至少在20岁时，赫米特就已经完全领会了阿贝尔或伽罗瓦的著作（当时数学界的其他人并非都知道伽罗瓦的著作）。为了再续赫米特和伽罗瓦之间类似的学校经历，赫米特也尝试报考了综合技术学院（Ecole Polytechniqu）。不像悲惨的伽罗瓦，他通过了入学考试，但是只排在第68位。接着，雪上加霜，在综合技术学院仅仅过了一年后，赫米特就因为右脚残疾的身体障碍被迫离开了学校。

赫米特在19世纪50年代又重新开始研究五次方程，他在这方面的论文出现于1858年——同一年克罗内克也发表了一篇相同题目的论文《论一般五次方程的解》。赫米特的结论是引人入胜的。他第一次利用一类特殊的椭圆函数去解一般的五次方程。这使几个世纪的反复攻克终于

有了战利品。

克罗内克甚至取得了更进一步的成绩。首先，他实际上获得了与赫米特相同的解，不过他使用了一种不同的方法，其精神与伽罗瓦的思想比较接近。其次，在随后于 1861 年发表的一篇论文中，他深入挖掘了所采用的方法之所以成功的内在原因。换句话说，阿贝尔和伽罗瓦证明了一般的五次方程不可能用一个公式解出；克罗内克努力去理解为什么可以用椭圆函数来解出它。克罗内克的另一个成就是（在 1879 年）出版了一个关于阿贝尔证明的更简单的、更短的、组织更好的译本。他还改正了原版较长证明中的一个小错误（幸运的是，它对结果没有影响）。这为法利克斯·克莱因的决定性的进展建立了舞台。

克莱因研究背后的哲学确实十分简单。在这一章之前我们使用了熟悉的等边三角形的对称群和三元素的置换群的性质证明了，这两个群实际上是一个相同的群（同构的）。克莱因彻底改变了这种逻辑。他首先证明了两个似乎全然不同的群是同构的，然后利用这个事实揭示了产生这种出人意料的联系的原因。克莱因的发现在 1884 年发表于一本厚重的小册子里，他使用了一个古怪的题目“关于 20 面体和五次方程解的演讲”。在标题中的这两个论题是如何联系的？克莱因从对所谓 20 面体（图 84 ）的固体的简单考察开始。柏拉图把这个漂亮的固体看作是宇宙的基本构成元件之一（其余的是四面体、立方体、8 面体和 12 面体，所有的合在一起称为柏拉图固体）。20 面体有 12 个顶点，20 个面（每个

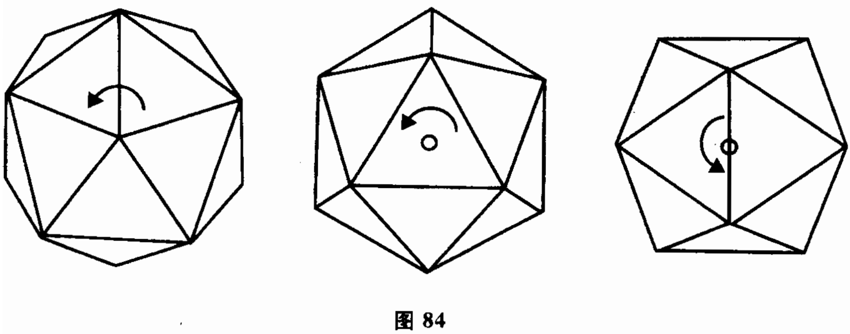


图 84

面都是一个等边三角形）和 30 条边（任意两个面的交线）。克莱因首次证明，恰有 60 种旋转使 20 面体保持不变。这些是（图 84）：四种通过绕连接相对的顶点（共有 24 个）的直线的 72°倍数的旋转；两种绕连接相对面（共有 20 个）中心直线的 120°旋转；绕连接相对边（共有 15 条）中点直线旋转 180°；使其“不变”的单位元。然后，克莱因证明了这些旋转构成了一个群。接着，他考察了五次方程的五个假定解形成的一种特殊置换群。更特别的是，他只考察了偶置换（它包括偶数次变换）。既然五个元素总共有 5！＝120 种置换，那么恰好就有 60 种偶置换和 60 种奇置换。随之就是对问题的彻底解决。克莱因证明了 20 面体群和置换群是同构的。但是回忆一下，伽罗瓦关于方程可解性的证明，完全依赖于根据在解的置换下的对称性质对方程进行的分类。置换和 20 面体的旋转之间的意外联系使得克莱因可以编织一条华丽的织锦，在织锦上五次方程、旋转群和椭圆函数都交织在一起。如同拼完的七巧板揭示了完整的图像一样，克莱因发现的基本的相互联系提供了五次方程为什么能用椭圆函数来解的正确的答案。

群论的统一力量是如此难以抗拒，到 19 世纪末时已经很清楚，它的触角将超越纯粹数学。特别是物理学家已开始注意。首先，通过爱因斯坦的广义相对论，几何大体上被看作是宇宙的关键性质。其次，对称被确认为所有自然法则最终孕育的基础。这两个简单的真理实际上保证了对宇宙中包罗万象的理论的寻找可以大体上转化为对潜在群的寻找。

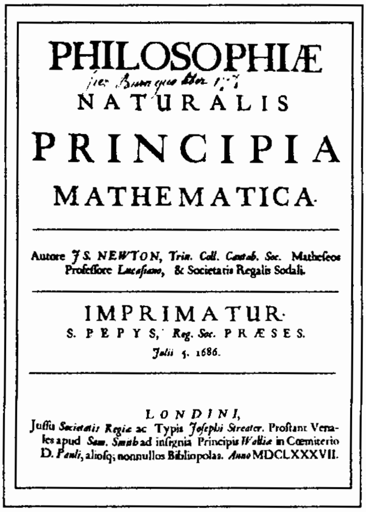
第七章

对称法则

大自然对我们是仁慈的。因为在宇宙法则而不只是在狭小的地域性法则统治下，她已经给予我们解释其伟大设计之谜的机会。不像真实的房地产业——一切都是位置，位置，位置——对于自然法则，无论我们在空间中的位置，还是我们关于地球、太阳或恒星的定位都不会有任何差异。要不是自然法则在平移和旋转下的这种对称性，科学实验将不得不在全球每个新的实验室里重复进行，理解宇宙中遥不可及部分的任何希望都将落空。这是一个强有力的概念。当牛顿第一次提出可以用数学公式来描述天体动力学，而且在此基础上，这些公式表达了宇宙的法则时，它引起了可以理解的遍及全欧洲的反应。苹果落地的解释几乎不能造成大量轰动。另一方面，行星的运动一直就被看作是上帝引导之手所创造的完美无瑕的作品。18 世纪的诗人亚历山大·波普可能表达了众多人的感受，他写道：

> 自然和自然法则隐藏于黑夜之中：
> 上帝说，让牛顿来吧！于是一切都亮了。

牛顿本人是个至为虔诚的人，他并非故意把全能的上帝引入问题。在他的科学巨著《原理》（图 85 显示的是其首页）中，他写道：“太阳、行星和彗星这个最完美的系统，只能在一个聪明而强大的上帝的指导和主宰下继续运行。并且，如果恒星是它们类似系统的中心，而由类似的智慧指导下所形成的这些恒星必然都受到了一个上帝的主宰。”不过，把宇宙当作某种机器的解释甚至的确进入了一些同时代的艺术作品，例如


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

图 85

德比城的约瑟夫·怀特（Joseph Wright）的令人难忘的绘画《一位在太阳系模型旁演讲的哲学家》(图86)。这是希腊人有机的宇宙的部分反映，有机宇宙哲学将宇宙视为机械宇宙的一种生命形式。

我们周围的世界如同云朵一样瞬息万变。人类史、地球史、太阳系史，整个银河系史，甚至作为整体的宇宙史，都以无情的、有时激烈的变化为标志，只是他们的时间范围不同而已。幸运的是，自然法则一般是比较稳定的。当天文学家观测十亿光年远的一个星系时，在光线进入望远镜的光圈的那一刻，它已经走了十亿光年的路程了。换句话说，望远镜是真正的时间机器——它们窥见了宇宙遥远的过去。直到我们可以说，上帝不允

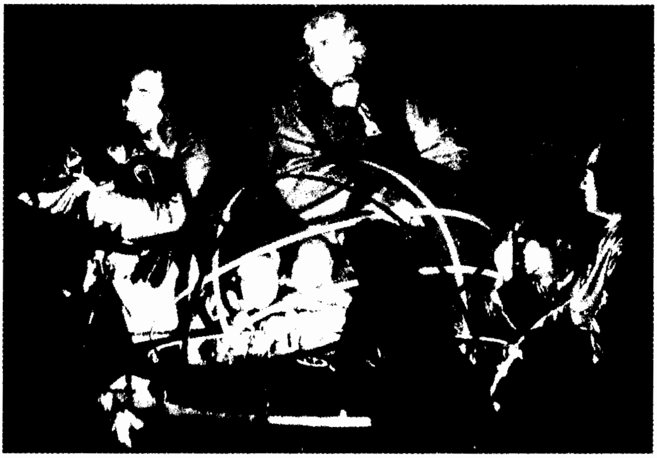


图 86

许对其法则进行任何修正——自然法则没有以任何显著的方式改变，至少从宇宙刚刚诞生的第二年开始就是如此。对于（那些的确存在过的）物理学家，要用更加短暂存在的法则揭开宇宙的历史是非常困难的①。

时　　空

自然法则的对称性充分延伸，超越了单纯的平移和旋转。例如，这条法则不会关心我们移动的多快和向什么方向移动。你一定在火车站遇到过这个事实的最简单的表现。你有时很难说到底是你的火车还是临近轨道上的火车在移动。两个做匀速运动（即运动的速度和方向都不改变）的观测者将发现，即使一个人乘坐 99％光速的未来型火箭被发射入太空，另一个人懒洋洋地坐在巨大的海龟的背上，他们的运动也完全服从相同的法则。伽利略和牛顿都曾经认识到匀速运动的两个观测者之间的重要的对称性，但是爱因斯坦给予了高度的重视，并完全出人意料地将其引入他的狭义相对论。一部分这样的对称性是相对直接的。“这列火车何时停靠纽约站?”的问题也许是超现实主义的叙述，但实际上它即使在牛顿物理学中也是完全合理的。当其他东西在移动时，火车上的一个人可以明确地认为火车是静止的。然而，实验结果出人意料，不管什么光源，也不管观测者怎么移动，光总以相同的速度发出，为了与此相一致，爱因斯坦构造了这种对称性。换句话说，这种对称性规定，对于所有匀速运动的观测者，出现的物理学法则（包括电磁学和光的法则）应该是相同的，对此他又补充一句：对所有观测者而言，光速是完全相同的。

绝对光速的不变性是麦克斯韦方程式（电磁学理论）中固有的特征，但乍一看它似乎特别违反直觉。事实上，它严重扭曲了我们关于事物如何反应的常识。当正在驾驶一辆敞篷车时，某个人向前方扔出一个

---

① 原文直译如此。意为：要用人类短暂的科学发展历史所能提炼出的“自然法则”来揭示整个宇宙历史的奥秘，是非常困难的。

苹果（幸运的是并非很多司机这样做），此时，苹果相对地面的速度是汽车的速度和抛出苹果的速度之和。按同样的方式我们可能预期，如果那个敞篷车直接向我们开过来，我们可以测定它前灯发出的光的速度将是光速（大约 670000000 英里/小时或者 300000000 米/秒）和汽车速度之和。然而，爱因斯坦告诉我们，并且数不清的实验也证实了事情并非如此。退一步说，即使汽车以不可思议的 99.99%的光速运动，我们要记录的前灯发出的光的速度也将保持不变，就是 670000000/小时。而且，当汽车正以接近光速的速度远离我们时，如果我们要记录汽车尾灯发出的光的速度，情况也是这样。在我们钻研这个关键发现的意义之前，我们暂时考查一下，如果在光速中加入（或减去）光源速度，将发生什么。图 87 显示了一个机场的十字跑道。向南滑行的飞机刚刚高速着陆。当它就要进入十字路口时，飞行员注意到一辆行李卡车正从西边进入这个十字路口。飞行员立即转向，以避免碰撞。现在假设一个观测者正从十字路口南段观察整个事件。为了使这一点更清楚——假设着陆的飞机正在以接近光速的速度运动。如果光速不是常数，观测者将看到来自飞机的反射光以接近 2 倍光速（飞机速度和光速之和）向其运动。另一方面，较慢行李卡车反射的光将以光速（因为光被垂直地反射到其运动的方向）接近观测者。因此，飞机发出的光要比行李卡车发出的光明显地早到达观测者。观测者将看到飞机莫明其妙地急速转向。对所有观测者而言，光速的不变性消除了结果先于原因的悖论。

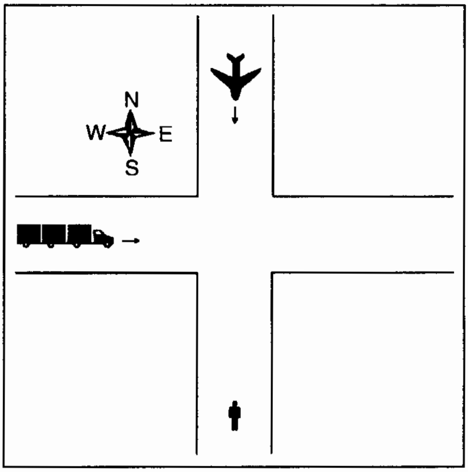


图 87

为了确保针对匀速运动的观测者的物理法则的对称性以及光速的不变性，狭义相对论不得不付出代价。爱因斯坦发现空间和时间不能被看做是分开的实体。相反，它们通过对称性被不可分割地联系在一起。爱因斯坦狭义相对论最初的论文有一个谦逊的题目——《论运动物体的电动力学》（图 88 显示了其标题版），然而，就像下面的例子将说明的，它完全改变了我们对现实的知觉。

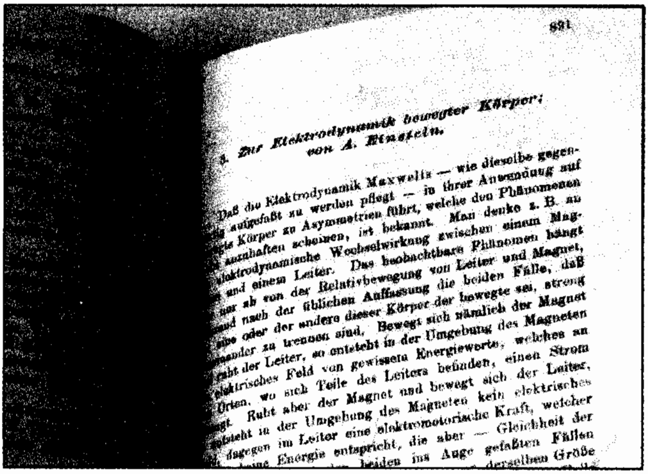


图 88

设想在持续几年的时期内，你一直拍摄一个搁在一张桌子上的苹果的老化和分解过程。这部（一点也不令人兴奋的）影片真正吸引人的地方是，苹果随时间的运动，与其在空间中的运动是相反的。根据狭义相对论，时间是必须补充到人们熟知的三维空间中的第四维。当以某个速度发射苹果时，它一定通过所有四维时空飞行，因为当苹果在空间中漫游时，时间也在前进。运动的苹果会与静止的苹果以同样的速度变老吗？狭义相对论令人惊讶的答案是否定的。苹果在空间中行程的速度越快，其“时钟”将走得越慢，正如一个静止的观测者所看到的，当苹果的速度接近光速时，其时间（对静止的观测者而言）将慢得像爬行一

样。如果不是被大量实验毫不含糊地证实，这可能听起来完全不可信。例如，在地球的高层大气中，由于名为宇宙射线的高能粒子的轰击，经常产生一种被称为 μ 介子的基本粒子。这些 μ 介子之所以能够穿越几十英里的大气层，完全是因为相对论中 μ 介子内部"时钟"的减慢。μ 介子在静止时大约只能存在 200 万分之一秒，然后就会衰变为较轻的粒子。对于如此短的寿命，即使它们以光速飕飕掠过空间，它们穿过大气层的旅行时间也要比其寿命长十倍（缺失相对论性效应）。1941 年对处于新罕布什尔州华盛顿山的山顶和山脚之间的 μ 介子进行计时和计数的研究人员证实，运动的 μ 介子寿命更长，这正如狭义相对论所预测的那样。在 1975 年的试验中，μ 介子被加速到 99.94％的光速，实验证明，快速飞行的 μ 介子的寿命比静止状态时的寿命长 29 倍，这与狭义相对论的预期再次吻合。

不过，你可能认为 μ 介子只是奇异的基本粒子而不是普通的时钟，因此没有代表性。如果我们以接近光速的速度运动时，我们手腕上的表或我们的心跳也会变慢吗？好的，1971 年的一个实验使用了真实的时钟。物理学家约瑟夫·卡尔·哈飞勒和理查德·肯廷在泛美航空公司的商业飞行中以相反方向绕地球飞行。他们随身携带了四个原子钟，这些钟在旅行开始时与华盛顿哥伦比亚特区的一只静止的时钟同步。在旅行结束时，如同预料的那样，往东旅行的时钟（因此比地球的旋转要快）显示，消逝的时间短了五千九百万分之一秒，同时向西旅行的时钟（效果上比哥伦比亚特区的钟走得慢），记录的时间长了二亿七千三百万分之一秒。

狭义相对论的一个关键预测是，物体通过空间和时间维度的速度总是与给出准确的光速有关。例如，一个静止状态的 μ 介子，有其完整的指向时间方向的"速度"，如同它只通过时间维度"旅行"。对于运动中的 μ 介子，它们穿越空间的速度越大，它们"变老"得越慢，因为当 μ 介子的速度接近光速时，它们的时间更加地趋向于停止（对静止的观测者来说）。光自身总是正好以光速穿越三维空间。狭义相对论告诉我们，没有地方可以使光以其他速度穿越，追上光也是不可能的——光永远不

会静止。从这个意义上说，感知光有点像感知电影中的动作。电影中的每一个画面抓住了一个稍微不同的场景，当这些画面在我们眼前快速而连续地闪过时，我们就看到了动作。当电影停下时，动作消失了。我们只能看到正以光速运动的光。

很奇怪，尽管对物理学有着不可思议的直觉和深刻的洞察力，爱因斯坦对待纯粹数学的态度起初还是相当冷淡的。还在苏黎世做学生时，因对数学家赫尔曼·明可夫斯基（Hermann Minkowski，1864～1909）的数学课不如人意的出席，爱因斯坦获得了“懒狗”的头衔。历史总是喜欢和人开玩笑，在爱因斯坦发表他的狭义相对论之后，不是别人，正是明可夫斯基本人使用对称性将该理论建立在坚实的数学基础之上。明可夫斯基证明了，就像球体可以在三维空间中被旋转一样，空间和时间可以像一个四维实体那样被“旋转”。更重要的是，球体绕任一轴通过任意角度的旋转都是对称的（也就是说，它不改变），与此相同，爱因斯坦的狭义相对论方程在这些时空旋转中也是对称的（用物理学的术语来说是“协变式的”）。荷兰物理学家亨德里克·安图恩·洛伦兹（Hendrik Antoon Lorentz，1853～1928）在1904年第一次描述了方程的变换之后，方程的这种非凡的对称性就以*洛伦兹协变*而著称。当听到与三维空间中普通的旋转和平移群相似，明可夫斯基时空对称变换的全体构成一个群时，你可能并不十分惊奇。在杰出的法国数学家庞加莱精炼了狭义相对论的数学基础之后，这个群被称为“庞加莱群”。

最初有些怀疑（“自从数学家开始进入相对论开始，我本人再也不能理解它了”），但爱因斯坦慢慢地开始掌握对称性不可思议的能量。如果自然法则对运动的观测者保持不变，不仅描述这些法则的方程需要遵守洛伦兹协变，而且*法则本身实际上可能是从对称性的要求推导出来的*。这个意义深远的意识完全颠倒了爱因斯坦（和很多追随他的物理学家）用以形成自然法则的逻辑基础。不是从搜集大量关于自然的实验和观测事实出发，再形成理论，再验证这个理论是否服从对称原理，相反，爱因斯坦意识到对称性要求可能首先出现，并指定了自然必须服从

的法则。让我用几个简单的类比证明这种颠倒的投入-产出类型。

假设你以前从未看到过雪花，但是要求你猜测其一般形状。显然，如果连最少的一些信息都没有，你甚至将无法开始。即使有一幅一瓣雪花的图（图 89）也不是很管用——你不能根据大象的尾巴猜测大象的形状。然而，现在给你一些额外的信息——告诉你雪花的一般形状是在绕中心旋转 60°的情况下对称的图形。这条指示立即将雪花的可能性限定为六角形、十二角形、十八角形，等等。由于自然通常选择最简单、最经济的解，因而六角形雪花（如图 90 所示）将是一种极好的猜测。对称性施加了这样严格的限制，所以理论几乎不可避免地被引向真理。

图 89

图 90

再看一个更加复杂的例子，想象在另一个遥远的太阳系有一个生物学家在研究他们行星上所有生命形式的“DNA”结构。经过若干年的工作，他们发现生命总是建立在很长的“DNA”链之上，这些长链表现为 7 种不同结构，如图 91 中的那些。对不同片段“设计”的仔细检查揭示

出，它们中的每一个都可以在基本符号 b 基础上通过对称运算或对称运算组合而得到。例如，第一种片断仅与对称平移有关——只是重复移动一个主题。第二种片断代表一个滑移反射，回想一下（第 1 章），滑移发射涉及彼此相关的平移后的镜面图像。第四种片断可以通过绕一条水平的镜面线平移和反射得到。第六种“DNA”样式可以用好几种方式得到——例如，通过四个符号的连续的平移，或者通过一对被反射的符号的连续的滑移反射得到。如果试图用一门法则的语言阐述他们的发现，这位宇宙生物学家可能得出结论：所有的 DNA 片断都以某种对称的方式排列，这样的对称是平移、旋转、反射和滑移反射的组合。然而，假设这些生物学家起初（可能在发现了几种片断之后）有一种预感，DNA 片断必须服从一些对称性。他们可以从反向的终点接近这个问题，

(Ⅰ) b b b b b b b b b b b …

(Ⅱ) b p b p b p b p b p b …

(Ⅲ) b d b d b d b d b d b …

(Ⅳ) b b b b b b b b b b b …
p p p p p p p p p p p

(Ⅴ) b q b q b q b q b q b …

(Ⅵ) b q p d b q p d b q p …

(Ⅶ) b d b d b d b d b d b …
p q p q p q p q p q p

图 91

一开始就要求 DNA 片断是对称的。显然，无法猜测其基本主题——它可以看起来像 b，像一颗星，或者像其他毫无联系的东西。然而，一旦发现这个主题，人们就能利用群论证明，使用上述四种对称性的组合只能形成 7 种截然不同的片断类型。所有其他类型都仅仅是基于 7 种不同主题的变形。换句话说，在这个例子中，对称性的要求毫不含糊地规定了存在的片断样式的数目。普林斯顿的数学家约翰・豪顿・康恩威曾经给这 7 种不同类型的片断样式起过有趣的名字。这些名字与每一个动作被重复时所得到的脚印类型对应：单足跳、踏步、跳跃、侧行、单足旋转跳、旋转侧行、旋转跳跃。

在平移、旋转和匀速运动（包括光速的不变性）中，物理法则的对称性对于我们理解空间和时间是绝对必要的，但是它们本身却不能造成

新力量或新粒子的存在。然而，正如我们将看到的，为了理解重力和统一自然界的所有基本力而进行的一些努力，已经将对称原理的意义提高到一个更高的水平——对称性已成为力量之源。

引力对称

伟大的狭义相对论将物理学规律的对称性的范围扩展到所有匀速运动的观测者。但是你可能想知道，对于加速运动的观测者又会怎样呢？大体上，我们观察到的周围大多数运动不是匀速的——它们从静止开始，继续静止，或者，涉及偏转、弯曲或旋转。比如说，电磁学的规则被破坏了，或者，甚至只是在一枚从发射台加速的火箭里发生了显著的改变，我们还不能将宇航员送往太空。爱因斯坦不准备将其作为一种选择。的确，为什么这个规则要依赖于观测者如何运动呢？而且加速运动是如此普遍——从围绕太阳的行星运动到一个跑道上的短跑运动员——任何不讨论加速度的理论都肯定是不完善的。狭义相对论另一个明显的缺陷是，该理论完全忽视了引力。然而，不像电磁学，引力是无处不在的，一个人可以避开电磁力，却没有办法逃避引力的掌握。因此，爱因斯坦的主要目标之一变成了，将对称性的触角延伸到更远的地方。特别地，他感到，无论是在一个正沿直线加速的实验室里，还是在回转木马上旋转的实验室里，或以任何方式进行的运动，不但对匀速运动的观测者，而且对所有观测者，自然法则必须看起来完全相同。如同上一节里虚构的生物学家能够从对称原理出发，然后推导出 7 种可能的片断样式，爱因斯坦也想首先提出对称性。受到狭义相对论洛伦兹协变（方程在时空旋转下不改变的事实）的鼓舞，现在他需要广义协变，揭示在空间和时间坐标中的任何变化下自然法则的对称性——无论那些法则可能是哪一个。这不是一个微不足道的要求。毕竟，仅在美国每年就大约有 100 万例颈椎过度屈伸损伤，这就证明人们确实感受到了突然的加速度。例如每当汽车急转弯时，我们的身体就被离心力推向一边，飞机遭

遇气穴会使我们的心提到嗓子眼上。表面上，在匀速和加速运动之间似乎存在一种明显的差别。当你乘坐匀速运动的火车或电梯时，你感受不到运动。你觉得你是静止的，而你周围的一切都在运动——你就和站台上挥手告别的人们或那些耐心地在宾馆大厅等候的人一样，都是静止不动的。当一个宇航员的面颊在发射中被用力地向下拉时，她一定感到了加速度。那么物理法则怎么会即使在加速的参照系中也相同呢？这些增加的力又会怎样呢？对这个谜题的终极解答就是爱因斯坦最高的成就，这花费了他数年时间去研究。他关注于将对称性建成物理法则之源，让我们尽力追随他的一连串思路吧。

设想一下在一节加速的货车车厢里的生活（图 92）。如果货车车厢匀加速向右运动，从日常经验我们知道，每样东西都会向后倒（向图中的左侧）。例如，悬挂在顶棚的灯将会从垂直方向倾斜。每个落向地板的物体将以某个角度下落，面向前方坐在椅子里的每个人都会感到来自于身下的座位和椅背的压力。这很容易理解：如果货车车厢里的一个人丢下他的钥匙，钥匙的水平速度保持不变（排除由于空气阻力而产生的微小变化）且等于被丢下的瞬间所具有的速度。同时，货车车厢本身继续被加速到越来越快的速度。因此，钥匙在水平方向被货车车厢超过，结果造成了一条向后倾斜的轨迹。然而，这里产生了一种重要的认识。如果引力本身更强并且倾斜，而不是垂直向下，那么人们的体验与在加速的货车车厢中的人的体验没有什么不同。不管怎样，引力产生了与加速运动中被观测到的现象完全相同的现象。

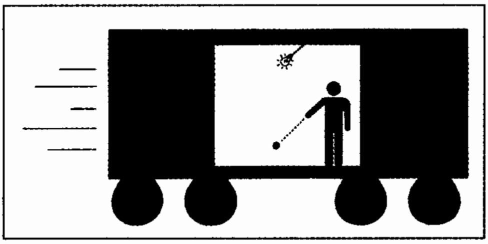


图 92

考虑另一种情况。当你站在正在加速上升的一部电梯里的磅秤上时，磅秤就会记录一个较重的重量（因为你的脚在磅秤上施加了一个较

大的压力）——好像重力变大了。反之在一部正在加速下降的电梯里将会感觉到较轻的重力。在电梯缆绳突然折断的极端情况下，你和秤将一起自由下落。此时秤记录的重力为零。（不过，这不是一个我们希望发生的失重过程——想一下，当电梯最后确实撞上电梯井井底时，磅秤将记录什么呢？）宇航员失重地漂浮在空间站里，不是因为他们超出了地球引力的范围，而是因为空间站和宇航员有着同样的指向地心的加速度——它们都相当于在自由下落。

当沉浸于加速运动的各种思想的实验时，爱因斯坦最终在 1907 年得出了惊人的结论：*引力和因加速度而形成的力事实上是相同的*。这种强大的的统一被称为“等价原理”——加速度和引力是同一种力的两个方面。在一部自由下落的电梯里，不可能说出你是否失重，因为电梯正在加速向下，或者因为引力被不可思议地“切断”了。1922 年在日本京都的一次演讲中，爱因斯坦描述了 1907 年突然有灵感的那一刻：“我坐在伯尔尼［瑞士］的专利办公室里，这时候一个想法突然出现在我的脑海：如果一个人自由下落，他将不会感到他自身的重量。我被吓了一跳。这个简单的思想给我留下了深刻的印象。它促使我转向引力的理论。”医疗实验室一直在利用这个等价原理。他们利用离心机快速旋转流体，以分离不同密度的物质。离心机起着人造引力机器的作用。旋转运动的加速度等于一种增加的万有引力。

普遍的对称性陈述伴随着等价原理——物理学法则，正如爱因斯坦的广义相对论方程所表达的，在包括加速系统的所有系统中都是一样的。也就是说，法则在时空坐标中的任何变化都是对称的。那么在旋转木马上和在静止的实验室里，我们所观察到的事物之间为什么会存在明显的不同呢？广义相对论告诉我们，那些仅仅在于环境的不同，不是因为法则本身。在地球上，上和下由于地球的重力似乎不同（不管旋转法则下的对称性），与此相同，旋转木马上的观测者感到了相当于重力的离心力。换句话说，在包括加速运动在内的所有参照系中的对称性使引力的存在成为*必然*。正如加速的货车车厢和电梯的例子已经向我们证明

的那样，处于加速系统中的物理法则与日常生活中的引力的物理法则是无法区分的。

牛顿的引力理论遗留了两个完全没有回答的有趣问题，在等价原理提供的强大洞察力的武装下，爱因斯坦感到，他已做好了解决这两个问题的最终准备。第一个和首要的问题是，悬赏百万美元的“如何”问题：引力如何玩把戏？或者换另一种说法：距离地球一亿英里的太阳如何能施加一个无法逃避的万有引力，并控制地球在其轨道上？

牛顿充分意识到了他没有答案的事实：

> 到目前为止已经通过引力的力量解释了天空和我们的海洋的现象，但是**我们还没有弄清这种力量的原因**［特别强调］。这必然是，由于穿透到太阳和行星的正中心，一点都不减少它的力，它必定继续下去……并且在遥远距离的各个方向上产生作用，作用力总是以距离平方的倒数不断减少。……但是到目前为止我还不能找到从现象中发现那些引力本质的因素，而且我没有任何构想。

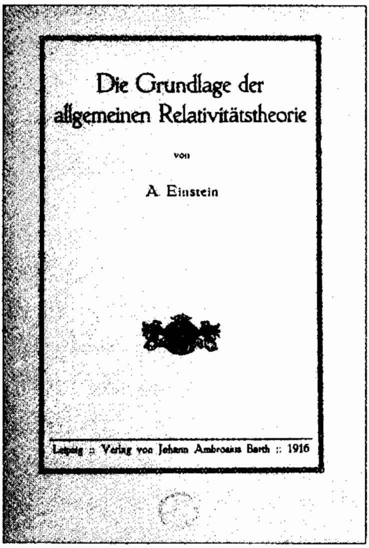
第二，在狭义相对论和牛顿的引力概念之间存在令人烦扰的冲突。当前者坚定地认为没有任何形式的质量、能量或信息能够比光速传播得更快时，牛顿却认为，引力可以使它的力瞬间穿越广阔地膨胀的空间。这种“迅速”的引力可能打开通向真正荒诞和人们不喜闻乐见的现象的大门。例如，如果太阳突然消失，那么太阳系中的所有行星将立即开始近似直线的运动，因为使它们保持在椭圆轨道上的力将消失。然而，在地球人看来，太阳实际上要到大约 8 分钟后才会消失，因为光要花这么长的时间才能穿越太阳至地球的距离。如果海王星上存在居民的话，在他们看到太阳消失之前，他们就已经开始了其进入寒冷空间的整整 4 个小时的旅程。这种因果颠倒将把我们对现实的感觉转变成一种难以理解的噩梦。作为一名对狭义相对论和等价原理正确性的坚定信仰者，爱因斯坦意识到，对牛顿引力理论进行彻底检查的时刻已经来临了。

另一个有趣的思想实验提供了第一条线索，实验使爱因斯坦逐渐明

白，可能存在一种弯曲的时空。这个实验由物理学家鲍尔·伊赫法思特(Paul Ehrenfest，1880～1933）最先提出，随后就被称为“伊赫法思特悖论”。狭义相对论的一个有名的结论是，由静止的观测者所测量的运动物体的长度沿着它们的运动方向收缩。速度越高，收缩越大。这并非错觉——可以在瞬间将一根运动棒限制在一个空间中，在这个空间中的这根棒与其静止时不一样长。接着考虑，当快速旋转时，一个扁平的物体，例如一张激光唱片，它将会发生什么。由于边缘比内部旋转得快，它也将收缩更多。这将扭曲和弯曲盘的形状，一旦作为弯曲之源的加速度的思想被引入，爱因斯坦就不会放过它。他得出结论：加速度将弯曲时空的结构。而且，根据等价原理，如果加速度能够导致空间弯曲，那么引力也能。这就是广义相对论的本质——马戏团秋千演员制作了他们落在上面时会下陷的安全网，引力以相似的方式歪曲和弯折时空。正如较重的物体会在蹦床上导致更明显的变形，一个物体质量越高，在其附近的时空将变得越弯曲。一辆吉普车在撒哈拉沙漠中安全通过沙丘的轨迹取决于起伏不平的地形。相似地，行星环绕太阳的轨迹是太阳在时空中产生弯曲的结果。行星只是追寻最直的路线，它们轨道的形状揭示了弯曲的时空几何。在弯曲的时空结构中，引力的影响肯定不是瞬间的。爱因斯坦计算出，就像一个池塘中的涟漪，时空形状的扰动准确地以光速传播。如果太阳不可思议地突然消失，其对地球引力的影响将在8分钟后消失——同时地球将一团漆黑。这个令人满意的结论消除了牛顿物理学中最后一个被人抱怨的问题。

爱因斯坦将弯曲的时空作为其宇宙新理论的基石，而描述这种空间则需要数学工具的帮助，于是数学不好的爱因斯坦陷入了困境，开始重新学习数学。幸运的是，这个从前的数学怀疑论者有一个人可以依靠——马塞尔·格罗斯曼（Marcel Grossman，1878～1936)，他是爱因斯坦的老同学，也是位学识渊博的数学家。爱因斯坦以一种少见的无助的语气后悔地说：“我已经对数学充满了崇高的敬意，可我从前认为数学是最微妙的纯粹的奢侈品。”永远可靠的格罗斯曼不负所托。他指点

爱因斯坦去看黎曼的非欧几何和由数学家埃尔文·克里斯托夫（Elwin Christoffel）、格里高利·利克-巴斯卓（Gregorio Ricci-Curbastro）、图利欧·列维-齐维他（Tullio Levi-Civita）发展的数学工具。微积分通过名为“微分几何”的分支在几何学中的引入，和张量微积分的发展进一步允许进行精确的计算（张量是可以表示任意维空间的“数字盒”）。在1912～1915年间经过几次彻底的失败后，爱因斯坦决定沿他的主要指路灯而行——广义协变原理所隐含的所有结构的对称性。他的直觉结出了硕果。在1915年年末，广义相对论，一种包容一切时空和引力的理论诞生了（图93显示了这篇论文的扉页）。在一封给理论物理学家阿诺尔德·撒默菲尔得（Arnold Sommerfeld）的便信中，爱因斯坦无法掩饰其充溢的感情：“你一定要仔细地读它们［广义相对论的方程］；它们是我一生中最有价值的发现。”


Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie

von

A. Einstein

Leipzig :: Verlag von Johann Ambrosius Barth :: 1916

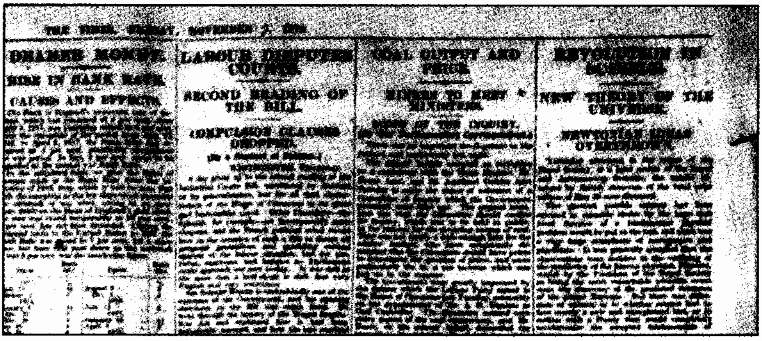
图 93

爱因斯坦是承认其数学能力不足的第一人。1921年他在普鲁士科学院的一次演讲中宣称，“事实上我们可以把［几何学］看做是物理学最古老的分支……没有它我将不能阐述相对论。”在1933年的一次演讲中他又说：“［科学的］创造性原理在于数学。”

几乎从它出现的第一天起，广义相对论可能的对称性和其逻辑的简化在当时最伟大的物理学家中赢得了许多赞赏。欧内斯特·卢瑟福（发现原子核的那个人）和马克斯·玻恩（量子力学的一位先驱）后来把这理论比作一件艺术品。

广义相对论的一个重要预测是光线在引力影响下的弯曲。尤其是，预测太阳将弯折直接位于其后方的远处恒星发出的星光。由于平常太阳光完全压倒了该恒星的光，观测不得不在日全食下进行，此时月亮遮住了太阳光。实验基础的思想是简单的：通过比较日食期间拍摄的照片和星光没有偏转时在同一片天空拍摄的照片，一个人可以尝试在恒星位置测出由光的弯折所导致的明显轻微的变化。

英国两个小组观测了发生在 1919 年 5 月 29 日的日食，但爱因斯坦直到 9 月 22 日才收到其结果的最终确认。其中一个小组由著名的英国天体物理学家亚瑟·艾廷顿（Arthur Eddington，1882～1944）领导。这两个小组中发现了一个平均 1.79 弧秒的偏斜，这与广义相对论的预测完全相符（在预期的实验误差之内）。喜极而狂的爱因斯坦立即通知了他的母亲。1919 年 11 月 6 日，皇家学会和皇家天文学会于伦敦召开的联合会议上正式宣布了他们对广义相对论的确认，正确地评价它为“人类思想史上最伟大的成就之一。”第二天，整个世界都被一条“科学革命”的新闻震惊了（图 94 显示的是 1919 年 11 月 7 日《伦敦时报》上的


DEARER MONEY

RISE IN BANK RATE

CAUSES AND EFFECTS

LABOUR DISPUTES COURTS

SECOND READING OF THE BILL

COAL OUTPUT AND PRICE

REVOLUTION IN SCIENCE

NEW THEORY OF THE UNIVERSE

NEWTONIAN IDEAS OVERTHROWN

图 94

文章），爱因斯坦立即被推到了媒体之星的意想不到的地位。并不是每个人都完全理解新理论的所有应用。根据一则流行的轶闻，一位记者问艾廷顿：相对论是如此的深奥，以至于除了爱因斯坦，在全球只有另外

两个人可以真正理解它，那它是否是正确的呢？艾廷顿静坐了几分钟。记者鼓励艾廷顿不要太谦逊，为此艾廷顿回答说：“我不是谦逊。我在努力推敲另一个人是谁。”

即使在今天，我依然非常敬畏下面的思想与相互联系的神奇链。在对称性原理的全程指引下，爱因斯坦第一次证明了加速度和引力确实是同一事物的两个方面。随后他进一步扩展了这一概念，并证明引力正好反映了时空的几何学。他用以发展该理论的工具是黎曼的非欧几何——而克莱因用这种几何学证明了，几何学事实上是群论的一种表示（因为每种几何学都是根据其对称性定义的——对称性使对象保持不变），他们所用的几何学是完全相同的。这难道不令人惊奇吗？

回想一下，伽罗瓦对他的群论思想有什么潜在用途很不确定。然而，诸如克莱因、李、黎曼、明可夫斯基、庞加莱、希尔伯特等数学家共同想象力的力量，再加之无人能及的爱因斯坦的物理直觉，这些想像力与直觉的“合力”把对称性与群论转变成时空与引力的最基本描述。

进入量子世界

与对称性一样重要的是描述时空和引力的法则，它们的重要性在亚原子粒子世界被进一步放大了。在经典物理学中，单词粒子通常使人联想起像微小撞球那样的形象。与此不同，在量子理论——作为粒子物理学的理论框架中——粒子可以像波一样行动。任一系统及其时间演变的状态可以用一个叫做波函数的实体来描述。一个电子的波函数是一种概率波，例如，用于确定在具有一个特定旋转方向的确定位置发现电子的概率。因为宇宙中所有电子是一样的，将彼此区分的唯一方法是其能量、动量（在经典物理学中动量是质量和速度的乘积）和旋转。在量子力学中，这些基本量是根据波函数对时间和空间中各种对称变换的反应

而定义的。例如，能量反映了因时间坐标（等价于时钟的重调）平移而导致的波函数的变化。让我简单地解释一下这个概念。设想有两位拍摄环形波的摄影师，环形波是从扔进池塘的一块鹅卵石的落点传播的。设定两架照相机的闪光灯在早晨8点整启动。然而，控制闪光灯的两个时钟中的一个恰巧慢了1秒。这意味着虽然两架照相机记录相同的波，但它们将在稍微不同的相位记录它。这里一张照片显示波峰，另一张可能显示波谷，反之亦然。量子力学通过1秒钟重置时钟所导致的系统波函数相位的变化（用波的周期来测定）来定义一个像电子这样的系统的能量。相似地，电子的动量表征了在空间轻微平移下波函数相位的变化。当这些定义确实将基本的物理性质与对称变换联系起来时，它们可能听起来特别有吸引力。任何一个具有中学物理学知识的人都可能记得，像能量和动量这样的量通常与相当不同的概念——守恒定律相联系。守恒定律反映了量既不能被创造也不能被破坏这样的事实——不管我们今天、明天、还是100万年后测量它们，它们都具有相同的值。能量守恒定律是“没有免费午餐”说法的物理学的等价命题。如果我们能从虚无中获得能量，那么每当石油生产缩减时，我们也不必在油泵上增加开支，我们从虚无中获得能量好了。动量守恒定律对曾经观察过台球碰撞的任何人来说都是熟悉的。你永远看不到两个球向后滚（朝向击球者）——碰撞后两球的总动量合起来必须等于母球的动量。守恒定律是物理学家的早餐，午餐和晚餐。例如，实验粒子物理学家利用巨型加速器将粒子彼此分开。这些加速器是巨型建筑（其中在瑞士日内瓦的一个加速器使用了17英里长的环形隧道），亚原子粒子在加速器中被加速到特别高的能量。其目标是探察在越来越短的距离内的基本力和产生理论预测存在的重粒子。（因为能量守恒定律）碰撞产生的总的能量和动量必须恰好等于入射粒子和对象的能量和动量，实验人员甚至利用此事实来确定粒子性质，这些性质可能无法用实验仪器直接探测。

因而，表面上看，我们似乎有两种不相关的定义。一方面，通过对称变换的响应波函数定义如能量和动量之类的基本量。另一方面，同样

的量与守恒定律有关。那么物理法则下的对称性和守恒定律之间的准确关系又是什么呢？德国数学家艾米·诺特（Emmy Noether，1882～1935）给出了意想不到的答案，它通常被称做诺特定理。然而，为了阐明在一个男性主导的数学世界里一个女人所经历的那些困难，在解释这个结果之前，我想扼要地描述这位杰出女性的生平。

艾米·诺特生于德国的厄尔朗根，她的父亲是那里的一位数学教授。艾米最初的想法是成为一名法语或英语的语言教师，但在18岁时她转而决定研究数学。这事说起来容易，做起来却难。尽管法国自1861年起允许妇女进入大学，但在1900年的保守的德国，这依然未经官方认可。厄尔朗根大学的学术委员会在1898年宣布，接收女学生将“颠覆所有学术秩序”。然而，艾米至少被给予了旁听一些课程的特别许可。在成功地通过奴恩伯格（Nürnberg）、格廷根（Göttingen）和厄尔朗根（Erlangen）的考试后，又受益于性别歧视的缓慢但渐进的改变，最终她在1907年被授予数学博士学位。然而，这不是与德国学术机构斗争的终点。虽然在1915年大卫·希尔伯特（David Hilbert）和法利克斯·克莱因邀请诺特加入格廷根系，但在她被正式允许执教之前，这两位素孚声望的数学家不得不与学校的管理部门进行了4年多的交涉。在与管理当局进行信件交涉和口头争论的阶段，希尔伯特通过允许艾米在官方公告中以他的名义进行授课来欺骗那些官僚。

在到达格廷根之后不久，诺特在1915年证明了以她的名字命名的定理。她从连续对称的检验出发。这些对称是在变换下能够连续变动的对称，例如旋转（其中旋转角能够连续变化）。例如，只有在旋转60°的倍数时，一朵雪花才是对称的，不像这种离散的对称性，一个球体的对称性使其在任意小的旋转下保持不变。诺特获得的结果是令人震惊的。她指出：*对于物理法则的每一种连续对称都存在一个守恒定律，反之亦然*。具体而言，平移下人们熟悉的法则的对称性与动量守恒相对应，关于时间流逝的对称性（法则不随时间而改变的事实）给了我们能量守恒，旋转下的对称性产生了角动量守恒。角动量是一个表征一个物体或

一个系统所拥有的旋转量的量（对于一个质点，它是到旋转轴的距离和动量的乘积）。可以在滑冰的情形中看到一种角动量守恒的普通表现——当滑冰者向内收回她的手时，她旋转得更快。

诺特定理将对称性和守恒定律融为一体——物理学的这两大擎天柱实际只是同一基本性质的不同方面。

随着纳粹的上台，父母都是犹太人的诺特被迫离开了德国，移居到美国的布林莫尔学院。她继续在布林莫尔和普林斯顿讲课，直到1935年一次手术后突然去世。数学物理学家赫尔曼·外尔在他的纪念演讲中间接提到艾米·诺特因其性别而不得不经受斗争："如果我们在哥廷根经常开玩笑地称她为'德尔诺特'（带有男性化的冠词），这也是对她作为一个创造性思想家能力的尊敬的认可，作为思想家，她似乎已经打破了性别的界限。"

目前我们所遇到的多数对称性都与我们关于空间和时间观点的变化有关。在基本粒子和自然界基本力背后的许多对称性属于不同的类型——我们改变了对粒子同一性的观点。这听起来可能是惊人的；一个电子总是一个电子，不是吗？但涉及量子王国的模糊性时，它就不是真的。

回忆一下，在量子力学中唯一确定的事情是每件事都是不确定的。只有概率能够真正被确定。一个电子可以处于这样一种状态，即它既不是这样旋转，也不是那样旋转。相反，这种状态是顺时针与逆时针旋转的混合物。更奇特的是，电子可以处于一种与另一种名叫中微子的基本粒子混合的状态。中微子是一种质量几乎为零且不带电荷的粒子。就像月亮可以有圆、暗①及两者之间的任何状态，粒子可以带有"电子"、"中微子"或两者的一种混合物的标签，除非我们进行一种特定的测量（例如测量电荷），才可以将电子和中微子区分开来。对粒子在不同状态之间变换的能力的认识使物理学家在朝着统一所有自然力的道路上迈出了重要的一步。

① 指月相中的满月（农历十五日左右）和晦日（农历月最后一天，不见月亮）。

牛顿是引入统一概念的第一人。他的重力理论将使我们的脚保持在地上的力与将行星保持于其轨道上的力统一起来。在牛顿之前无人猜测，一个力在这两方面起作用。迈克尔·法拉第（Michael Faraday）和詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）引入了第二种重要的统一——他们证明了电力和磁力实际上是不同表现形式的同一种力。交变的电场产生磁场，反之亦然。除了引力和电磁力，目前我们实际上还区别了两种核力。一是强核力，它使质子和中子在原子核中紧密地结合在一起。没有它，质子将因它们之间互斥的电磁力而飞散，这样说来，只有氢元素（它只有一个质子）是如此形成的。弱核力导致铀的辐射衰变，它将一个中子转变成一个质子，同时在这个过程中创造一个电子和一个反中微子（中微子的反粒子）。1896 年在实验中第一次发现了这些辐射衰变，但直到 20 世纪 30 年代才弄清楚它们与弱核力的联系。

在 19 世纪 60 年代后期，物理学家斯蒂文·温伯格（Steven Weinberg）、阿卜杜斯·萨拉姆（Abdus Salam）和谢尔顿·格拉肖（Sheldon Glashow）攻克了又一个统一领域。在一本引人注目的科学著作中他们证明，电磁力和弱核力其实只是同一种力的不同方面，随后把它们统称为“电弱力”。新理论的预测是生动的。当带电粒子彼此交换“光子”的能量束时，就会产生电磁力。电弱力理论预测了光子近亲的存在性，该近亲起着弱力信使的作用。这些从未见过的粒子被提前绘制出来，其质量大约是质子的 90 倍，分为两种类型，一种带有电荷（叫做 W），一种是中性的（叫做 Z）。1983 年和 1984 年在位于日内瓦的欧洲粒子物理研究所（称为 CERN，全称是 Conceil Européen Pour La Recherche Nucléaire）进行的实验分别发现了 W 粒子和 Z 粒子。[碰巧，丹·布朗（Dan Brown）令人毛骨悚然的畅销书《天使和魔鬼》使 CERN 的研究引起了数百万读者的注意。]

正如理论所预测的那样，W 和 Z 的质量（分别）是质子质量的 86 倍和 97 倍。这无疑是一个关于对称性的最成功的故事。格拉肖、温伯格和萨拉姆认识到，电磁力与弱力强度具有很大差异（电磁力大约是 10

万倍强），信使粒子具有不同质量，这预示它们背后隐藏着一种非凡的对称性，他们由此揭开了电磁力和弱力的秘密。如果电子与中微子或两者的任何混合物交换，则自然力呈现相同的形式。当光子与W和Z信使力交换时，情况也是这样。即使改变混合物的时空和空间位置，对称性也将保持不变。法则在时空中局部进行的变换下的不变性已经以“规范对称”而著称。用专业术语来说，一个“规范变换”代表了在表达没有直接观察结果的理论中的一种自由——换句话说，物理解释对这种变换不敏感。如同在时空坐标任何变化下，自然法则的对称性要求引力存在，在电子和中微子之间的规范对称要求光子、W和Z信使粒子的存在。再者，当最初言及对称性时，法则实际上写的就是它们自己。通过显示新粒子场存在的对称性，强核力本身也重复着相似的现象。

夸克，夸克，群

构成原子核的粒子——质子和中子并不是“基本的”不可分的。它们是由叫做夸克的基本结构单元构成的。“夸克”这个名字是粒子物理学家穆雷·盖尔曼（Murray Gell-Mann）在1963年选用的。他用狗吠声和海鸥的呱呱叫声联合在一起从而构造了一个词，暗合了著名的爱尔兰小说家詹姆斯·乔伊斯（James Joyce）《为芬尼根守灵》：

> 三声夸克来集合
> 目标！
> 确信他还未得到更多
> 一声狗叫
> 再次确信这就是他全部所有
> 没有打中目标。

夸克以六种“味”[1] 出现：向上的、向下的、奇异的、迷人的、顶部的和底部的。给出这些名字是相当随意的。例如，质子由两个上夸克和一个下夸克组成，而中子由两个下夸克和一个上夸克组成。不同于通常的电荷，夸克拥有另一种类型的电荷，这种电荷被富于幻想地叫做*颜色*，虽然它与我们能看到的任何事物都没有关系。电荷产生了电磁力，与此相似，颜色引起强核力。每一种夸克味以三种不同的颜色出现，习惯上叫做红色、绿色和蓝色。因而存在 18 种不同的夸克。

自然力是色盲。就像一个无限大的棋盘，如果我们将黑棋和白棋互换，它们看起来还是一样的，一个绿夸克和一个红夸克之间的力，与两个蓝夸克，或者一个蓝夸克与一个绿夸克之间的力都是一样的。即使我们利用量子力学的调色板，用一种混合颜色状态取代每种“纯”颜色状态（例如，“黄色”代表红色和绿色的一种混合物或者“青色”代表蓝色和绿色混合物），自然法则依然会采取同样的形式。在任何颜色变换下法则都是对称的。而且颜色对称又是一种规范对称——如果这些颜色或颜色类别从一个位置变换到另一个位置或者从一个时刻变换到下一个时刻，自然法则是不在乎的。

我们已经看到，表征电弱力——交换电子和中微子的自由——的规范对称显示了信使弱电场（光子、W、和 Z）的存在性。相似地，标准颜色对称要求存在 8 个胶子[2]场。胶子是强力的信使，它将夸克束缚在一起以形成像质子这样的合成粒子。顺便提一下，构成一个质子或一个中子的三个夸克的颜色“电荷”是完全不同的（红色、蓝色和绿色），而且它们加起来将是零颜色电荷或“白色”（在电磁学中等价于电中性）。由于颜色对称是夸克间胶子中介力的基础，这些力的理论已经以被称为*量子色动力学*。电弱理论（描述电磁力和弱力）和量子色动力学（描述强力）的联姻产生了标准模型——基本粒子的基础理论和支配它

---

① 指六种夸克的分别命名。

② 胶子，是一种理论上假设的无质量粒子。

们的物理法则。

如果你开始对这些所有不同的基本粒子感到有点晕，那么这很正常，因为很多人都是如此。著名物理学家恩里科·费米（Enrico Fermi，1901～1954）被认为是“最后一位全能科学家”（意思是他熟悉物理学的所有领域），他曾经说过：“如果我能记住所有这些粒子的名字（在他那个时代能记住的人极其罕见），我就是一位植物学家了。”基本粒子的一些奇特而动人的性质甚至使其进入了大众文化。物理学家和作家辛迪·施瓦兹（Cindy Schwarz）已经编了一本完整的关于基本粒子的散文和诗歌集，它是由瓦萨学院的学生写的。其中瓦妮莎·彼波依（Vanessa Pepoy）写的一首诗，题目是《色动力学》：

> 胭脂红，森林绿，奶酪蓝
> 三种颜色的三位一体。
> 所有的基本原理、组织、原则
> 都包含在一种看不见的白色透明的粒子中

也许你已经注意到了，与规范对称有关的粒子倾向于形成有紧密相连亲缘关系的家族（例如，质子和中子）。从历史上看来，即使在质子和中子都是由三个交换胶子的夸克组成的提议之前，物理学家就已经注意到了这两个在核内有惊人的相似性的粒子。这种相似性不仅表现为它们在质量上非常接近，而且表现为它们之间的强力与它们是否作用于两个中子间、一个中子和一个质子间或者两者的任何混合状态都无关。随着 20 世纪 50 年代高能粒子加速器的出现，整个粒子乐园似乎都浮现了。在试图将某种秩序导入这个快速繁荣的乐园的过程中，穆雷·盖尔曼和以色列物理学家伊瓦·尼曼（Yuval Ne'eman）注意到了质子与中子看起来与其他六种粒子非常相似。他们还识别出另外的有 8 个或 10 个成员的大家族。盖尔曼称这种对称性叫做“八重道”，它暗指佛教徒到达苦难终点的自我发展道路的八个原则。对称是理解亚原子粒子性质的关键，这种认识产生了一个不可避免的问题：存在一个有效的方法来

表征所有这些自然法则的对称性吗？或者更准确地说，能够持续地将一种粒子混合物转变成另一种并产生可以观察到的家族变换的基本理论是什么？到目前为止你可能已猜到答案。我在这本书中早先引用的语句中包含的深奥真理再次揭示了它自己："无论何处，只要群能够揭示自身，或者能够被引入，复杂问题就会变得简单。"20 世纪 60 年代的物理学家兴奋地发现，数学家已经铺平了道路。正如早在 50 年前爱因斯坦学习黎曼准备的几何工具箱一样，盖尔曼和尼曼偶然发现了索福斯·李令人难忘的群论著作。李的思想在高能物理领域已经变得如此重要，所以有必要就这位杰出的数学家多说几句。

索福斯·李（图 95）走上数学的道路多少有点曲折。在克里斯蒂安尼亚（今天的奥斯陆）的皇家弗里得里克大学，他既未显示对数学的热爱，也没显示非同寻常的数学才能，虽然他确实研究了阿贝尔和伽罗瓦的著作。他的一位老师，著名的数学家路德维希·西罗（Ludvig Sylow，1832～1918），坦承他从未料到年轻的李会成为那个世纪最伟大的数学人物之一。然而，经过几年的犹豫后，李将他的兴趣越来越多地转向了数学，在犹豫的那几年里他曾有自杀的倾向。1868 年他最终得出结论："在我的心中隐藏着一个数学家。"

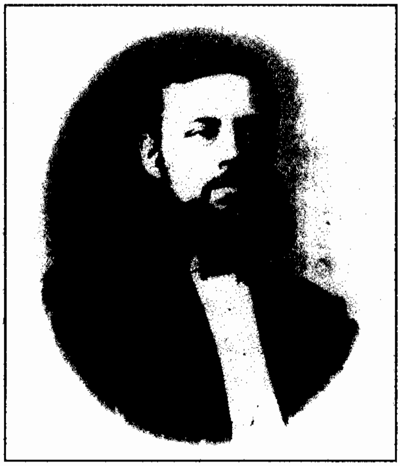


图 95

1869 年和 1870 年在柏林和巴黎旅行期间，李遇到了法利克斯·克莱因并与其成为朋友。在巴黎他还遇到了卡米耶·约当（Camille Jordan，1838～1922），而且卡米耶还使他相信，群论在几何研究中可以发挥关键的作用。李和克莱因在该领域的共同努力为克莱因关于几何群论典型化的著名的厄尔朗根纲

领提供了源泉。

1870 年，政治事件复杂化了这两位年轻数学家之间的持续合作。法国-普鲁士战争的爆发迫使克莱因离开巴黎，前往柏林。李试图前往意大利，但他最远只到达了枫丹白露就被捕了。对法国军官来说，这个挪威人密密麻麻的数学论文肯定看起来像一名德国间谍的密码信息。不过李很幸运，法国数学家加斯顿·达伯克斯（Gaston Darboux）过问了此事，并将其从狱中拯救出来。两年后，克里斯蒂安尼亚大学没有重复它对阿贝尔所犯的错误，全体教员和行政官员们认识到了李非同寻常的才能，并为他创设了一个数学教席。李继续断断续续地与克莱因合作到1892 年，这一年在他们之间发生了一场难堪的争论。争论的部分原因与李的感觉有关，他感到，他的作用在“厄尔朗根纲领”中没有得到应有的认可。1893 年李发布了一个声明，公开攻击克莱因。他宣称：“我既不是克莱因的学生，也不是他的老师，然而，这可能更接近真相。”克莱因（估计处于李行为的“抗议”状态中）仅仅是徒劳地呼吁大家注意李在 19 世纪 80 年代所遭受的精神问题。这些事件中没有一件对李的天才有任何影响。

19 世纪末期的两位挪威巨人——李和西罗，完全承认他们的才智应归功于挪威数学界的耀眼的明星——阿贝尔。在 8 年的一段时期中，他们承担了准备和发表阿贝尔完整著作的艰巨任务。大约在同一时期，李开始了连续变换（例如在普通空间的平移和旋转）群的工作。1888～1893 年李（与德国数学家弗里德里希·恩格尔合作）发表了该类群的一种广泛的理论和一个详细的目录，这项事业遂得以完成。李所研究的连续群类的成员后来变成了著名的李群。

李群恰好是盖尔曼和尼曼所需要的工具，他们以此表征新发现的粒子乐园的潜在模式。令他们特别高兴的是，这两位物理学家发现德国数学家威尔海姆·基令（Wilhelm Killing，1847～1923）和法国数学家埃利-约瑟夫·嘉当（Elie-Joseph Cartan，1869～1951）甚至已经使他们的工作变得更容易。回忆一下伽罗瓦为证明其方程可解性而定义的叫做正

规子群（第六章）的一些特殊子群。当一个群没有正规子群时（除了两个不重要的子群，其中一个仅由单位元组成，另外一个就是群自身），它就被叫做单的。单群是群论的基本结构单元，就如同质数（仅能分解为自身和1）是所有整数的结构单元一样。换句话说，所有的群都可以由单群构造而成，而单群本身不能由同样的过程进一步分解。1888年基令大致勾画了单李群的分类；嘉当在1894年完成并完善了该分类。有四个无限单李群族和五个不适合列入四个族的例外的（或散见的）群。盖尔曼和尼曼发现，其中一个这样的单李群，叫做“三阶特殊单群”或SU(3)，特别适合于“八重道（eightfold way）”——人们发现的粒子所遵循的家族结构。SU(3)对称性凭其预测能力满载荣誉地展示了它的美丽。盖尔曼和尼曼证明，如果该理论是正确的，那么一种特殊的9粒子族中必然可以找到以前未知的第10个成员。1964年，长岛的布鲁克海文国家实验室在一次加速器实验中对丢失的粒子进行了广泛的搜寻。经过一些年后，尼曼告诉我，当听到已经详细检查完一半数据，却没有发现预测中的粒子时，他都打算离开物理学了。对称性最终获得了胜利——丢失的粒子（被叫做负Ω粒子）被找到了，它完全具有理论所预测的性质。

表征标准模型的所有对称性（例如，夸克之间颜色变换的对称性）都可以用单李群的乘积表示。从数学上描述这种物理对称性的先驱性尝试是由物理学家杨振宁（Chen Ning Yang）和罗伯特·米尔斯（Robert Mills）在1954年进行的。很恰当地，描述这种弱力的方程（与麦克斯韦描述电磁学的方程相似）被称为杨-米尔斯方程。通过温伯格、格拉肖与萨拉姆关于电弱理论的著作和由物理学家大卫·格罗斯（David Gross）、大卫·普利策（David Politzer）与福兰克·威尔茨克（Frank Wilczek）发展的关于量子色动力学的优美结构已经确认，可以用三个李群U(1)、SU(2)和SU(3)的乘积来表示标准模型的特征群。因而，在某种意义上，通向自然力最终统一的道路不得不通过最合适的李群的发现，这个最合适的李群包含乘积U(1)×SU(2)×SU(3)。

狭义和广义相对论的经验以及基本粒子的标准模型只能导致一个结论。对称性和群论拥有引导物理学家走向正确之路的神奇的方法。乍一看这似乎有点奇怪，因为对称性要求施加了更为刚性的约束。如我们已看到的那样，一种样式可以在一维空间中无限扩展，一旦限制它遵从刚性运动的对称性，那么只允许有 7 种不同的片断样式。甚至在两维空间中，可以证明重复“墙纸”类型局限于 17 种。相似的约束被强加给结合对称性的任何理论。这些约束不会妨碍了理论原本有的自由吗？它们的确会，这种妨碍是一个想要的结果。物理学家正在寻找解释宇宙的一个理论，这种理论不是对许多，而是对所有的事物都同样起作用。如果我不在第五章向你提出伽罗瓦之死的 23 种不同的理论，并且所有的理论都与可得到的证据完全相符，那么你可能不是很满意。对称性不仅帮助我们避免了错误的开始和盲目的小径，而且帮助我们跨越最困难的部分，进入特色选择的“决策，决策”阶段。

圣经告诉我们，当以色列人离开埃及时，他们在沙漠中被“在夜晚给他们光的一根火柱”所引领。对称性曾经是引导科学家通向广义相对论和标准模型的火柱。它也能导致两者的统一吗？

弦之协调

历史学家喜欢指出，如果审视过去，一些社会革命将是错误的。与之相对照，20 世纪的这两个科学革命毫无疑问都是成功的。广义相对论预言了因天体而导致的光的弯曲，我们称之为黑洞的塌陷物质的存在，以及宇宙的扩张，所有这一切都被观测证实了。电动力学无比精确地证实了量子理论，其王冠上的明珠——标准模型——已经成功地捕捉和预测了已知亚原子的所有性质。然而，问题就在于此。对于最大的天文数量级（恒星、星系、宇宙）我们有一种极其成功的理论，而对于最小的亚原子数量级（原子、夸克、光子）我们有另一种极其成功的理论。如果这两个世界从不交汇，那么所说的成功就一直是正确的。但

是，在一个从“大爆炸”——一种高度压缩和极热的状态——开始扩张的宇宙中，广义相对论和量子力学两条道路的交汇是不可避免的。许多份证据，例如，元素周期表的形式指出，即使大的也曾经是小的。而且，一些物体，例如黑洞，就存在于天文学和量子学领域。因此，继爱因斯坦不成功地尝试统一广义相对论和电磁学之后，许多科学家都曾致力于广义相对论和量子力学最伟大的统一。

表面上广义相对论和量子力学似乎确实是不相容的，这个简单的事实是在传统上折磨着所有统一努力的最大绊脚石。回想一下，量子理论的关键概念是不确定性原理。当你试图用不断增加的放大的能力去探测其位置时，动量（或速度）开始剧烈地振荡。在一个名为普朗克长度的确定的极小的长度下，光滑时空的所有原则都消失了。这个长度（等于一英寸的0.000……4，这里的4位于第34位小数位置）决定了必须按量子力学方式处理引力。对于较小的数量级，空间转变成一种持续波动的“量子泡沫”。但是，广义相对论的这个非常基本的假定是逐渐弯曲时空的存在性。换句话说，一旦涉及极其小的数量级，广义相对论和量子力学的中心思想就产生了不能相容的冲突。

目前对引力的量子理论的最好的见解似乎是弦论的一些版本。根据这种革命性的理论，与使你相信的标准模型不同，基本粒子不是没有内部结构的质点，而是振动的弦中的微细的线。这些无限细的，橡皮筋似的线是如此的小（在普朗克长度序列；大约比质子小一亿倍），以至于对于目前实验的分辨能力来说它们似乎是点。弦论主要思想的美丽之处在于，所有基本粒子被假定为仅仅反映了同一基本弦不同的振动模式。就像可以拨动一把小提琴或一把吉它的弦可以产生不同的和声，一根基本弦的不同振动模式对应着像电子和夸克这样不同的物质粒子。力的载体同样如此。信使粒子，例如胶子，或W与Z，将其存在性归因于另外的和声。简单地说，标准模型的所有物质和力量粒子都是弦能够演奏的部分节目。然而，最令人印象深刻的是，人们发现，振动弦的一个特定构造具有与引力子——引力的预期信使完全匹配的性质。自然界的四种

基本力居于一个屋檐下，即便是暂时的，这也是第一次。

你可能会想到，这个巨大的成就——现代物理学的圣杯——将立刻被整个物理学界所欢呼。然而，20 世纪 70 年代中期的反应是相当不同的。数年来试图统一广义相对论和量子力学的失败，已经可以建立一堵怀疑论的厚墙。加利福尼亚技术研究所的物理学家约翰·施瓦兹（John Schwarz）和法国的高等师范学校的约耳·舍克（Joël Scherk）提出的弦论统一引力和强力的宣言最终被全世界忽略了。这种状态持续了 10 年之久。在那段时期，几乎每前进一步都立刻伴随着一些敏感难题的发现，结果是 9/10 步的后退。1984 年，突破终于发生了，那时在玛丽皇后学院的物理学家迈克尔·格林（Michael Green）和约翰·施瓦兹证明，弦论可能确实提供了每一个人都在寻找的最终统一。当一些最好的理论家参与搜索看起来很吃香的“万有理论”时，行动的狂乱随之而起。“万有理论”是物理学其余部分能够建立的最终基础。然而，如科学上常见的情况那样，热情的迸发（叫做“第一次超弦革命”）很快让位于充满失败的艰苦工作阶段。在 SU(3) 的情况里，所有的数学工具都已就位，只等物理学家去使用它们，与此不同，弦论学家们不得不在他们向前走时对数学的一些方面做些发展。然而，正如我们将在下一节所看到的一样，群仍然为描述潜在的模式提供了正确的语言。

那么，为了解决广义相对论的光滑几何学和量子力学剧烈的波动之间的基本冲突，弦论是如何建议的呢？量子力学将模糊性给予粒子的位置和运动，与此相似，广义相对论甚至将模糊性给予时空。

假如你想画一朵云。如果被你从天空中挑选出来临摹的这朵云离你相当远，但它仍在视野附近，你可能能够非常精确地复制其形状。另一方面，如果这朵云离你相当近，要抓住其每个卷曲和它微小束的旋转就变得越来越困难了。进一步迅速上升、下降到亚分子数量级，这将使任何复制尝试都归于无望。弦论断言，通过把基本粒子和信使力视做没有尺寸的质点，物理学试图基于低于有意义的限度的数量级来探测宇宙。换句话说，因为宇宙中最基本的组成——弦是在普朗克长度序列尺寸下

的扩展对象，亚普朗克长度距离就超出了物理学的王国。通过只专注于超普朗克长度的尺度，一个人能够减少剧烈的振动并避免冲突。不必惊讶弦论框架中的模糊性改变了时空中事件的本质。尽管在标准模型中，两种粒子之间的每一种相互作用在时空中定义非常精确的、得到所有观测者认可的点处发生，弦论中的情况却不同于此（图 96）。因为弦的伸展性质，我们不能够准确地说，两根弦何时何地互相作用，相互作用的位置和时间都被“抹去”了。这种情况可能近似于（仅仅表面上地）我们不能预测一块两端撕开的叉骨何时何地会断。

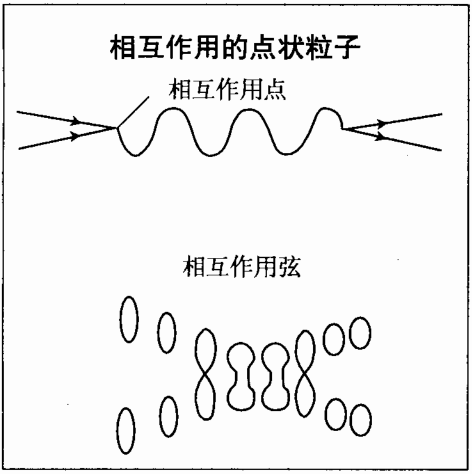


图 96

几乎还没有从对爱因斯坦相对论引入的时空的理解的革命中恢复过来，物理学家就不得不重新向弦革命引入的新概念调整。幸运的是，一个熟悉的概念（对称）在经历这场革命后不仅仍然活着，而且通过弦论到达了其顶点。

不仅是对称——超对称

自然法则不依赖于我们何时何地、从何角度去使用他们。它们在平移、旋转和时间的流逝下是对称的。不管观测者是匀速运动还是加速运动，它们对所有的观测者都是一样的。这是爱因斯坦广义协变原理的本质。就像匀速运动的观测者能够宣称他们是静止的一样，由于周围每样事物都在运动之中，因而，加速运动的观测者也能够这样。加速运动的观测者宣称他们感受到了额外的力，已经证实这种额外的力源于引力场（根据等价原理）。对于仅仅与改变我们在空间和时间中的优势有关的对称性，到1967年物理学家们认为，这样的对称性不可能存在。事实上，甚至存在这样一个定理，这个定理宣称证明了，这种对称性确实不存在。令许多物理学家惊奇的是，在随后4年的集中研究中导致了一个发现，即量子力学允许另外一种对称性。这种出人意料的对称性被叫做超对称。

超对称是一个基于量子力学自旋性质的微妙对称。回忆一下（从第一章），恰如电子的电荷，自旋也是电子固有的性质，在某些方面与经典的角动量相似——好像电子围绕其轴在旋转。然而，不像经典的自旋物体，例如陀螺，可以假定它们的自旋速率为或快或慢的任意值，电子总是只有一种固定的自旋。按照量子力学方式以这样的单位（叫做普朗克常数）测量自旋，电子只有半个单元，或者说它们是“自旋1/2”的粒子。事实上，标准模型中的所有物质粒子——电子、夸克、中微子和两种其他类型的叫做μ介子和τ子的粒子——它们的自旋均为1/2。据有1/2自旋的粒子总称费密子（纪念意大利物理学家恩里科·费密）。另一方面，力的载体——光子、W、Z和胶子——所有的都具有1单位自旋，或者在物理学术语中说它们是“自旋-1”粒子。引力载体——引力子——具有“自旋-2”，这恰好是人们发现的一种振动弦所具有的可以识别的性质。所有具有整数单位自旋的粒子被称为玻色子（纪念印度物理学家萨蒂恩德拉·玻色）。正如普通的时空与在旋转下的对称相联

系一样，量子力学的时空与基于自旋的一种超对称相联系。如果确实遵循超对称，那么其预测是影响深远的。在一个基于超对称的宇宙中，每一个宇宙中的粒子一定具有一个未被发现的伙伴（或者“超对称伙伴”）。具有 1/2 旋量的物质粒子，例如电子和夸克，应该具有 0 旋的超对称伙伴。光子和胶子（自旋为 1）应该分别具有 1/2 自旋的被叫做超光子和超胶子的超对称伙伴。然而，最重要的是，20 世纪 70 年代物理学家已经认识到，对于弦论只有一种方式包含了所有振动的费密类型（因而能够解释物质的构成），这就是超对称。在弦论的超对称版本中，玻色子式和费密子式的振动类型不可避免地成对出现。而且，超对称弦论试图避免另一件麻烦，这种麻烦与最初的（非超对称的）阐述——具有虚质量的粒子相关。回忆一下，负数的平方根叫做虚数。在超对称之前，弦论产生了一种奇怪的振动类型（叫做超光速粒子），这种振动的质量是虚的。当超对称排除了这些讨厌的难题后，物理学家发出了如释重负的一声叹息。

毋庸置疑，弦论现有版本中所有可能的对称和类型都是以群来描述的。例如，其中一种因吓人的名字“异性恋型 $E_8 \times E_8$”而知名的版本，就基于一种散李群。

下一个对弦论进行确证或反驳的关键步骤当然是能否发现预测的超对称粒子。物理学家希望，这是在 CERN 的 Large Hadron Collider（LHC①）的范围能做到的。大约在 2007 年，预期这台世界上最大的加速器将达到几乎 8 倍于现在那些加速器能达到的能量。如果确实发现了超对称伙伴，那么它们的性质将可能对最终的理论提供关键的线索。如果没有发现它们，这可能暗示了该理论完全走错了方向。

弦论就以这种不可思议的步伐进步着，在其日复一日从事该研究的人的圈子之外，任何人都发现要在细节上跟上这个理论是非常困难的。

---

①　大型强子对撞机。LHC 是 Large Hadron Collider 的缩写。它是世界上最大、最强的粒子加速器。它的环状隧道有 27 千米长，因此走完全程要花 4 个多小时。

目前一直从事这方面研究的领军人物是普林斯顿高等研究所的爱德华·威特恩和许多其他太多而不能在这里一一提名的人。在这些研究中应用的数学逐渐变得越来越高级。不仅普通的数为一种被称为格拉斯曼数［纪念普鲁士数学家赫尔曼·格拉斯曼（Hermann Grassmann）］的扩展类型所取代，而且普通几何学也被一门叫做非交换几何的特殊分支所取代，这门分支是由法国数学家阿兰·科耐斯（Alain Connes）发展起来的。

尽管弦论已经变成理论特征的最先进的技术工具，但它事实上还处于幼年时期。弦论的一位先驱，意大利的物理学家丹尼尔·阿玛蒂（Daniele Amarti），形象地称其为“偶尔落入 20 世纪的 21 世纪的一部分”。的确，目前有一些关于弦论的本性的观点，这些观点认为，我们正在见证弦论的婴儿期。回忆一下自爱因斯坦的相对论以来从所有伟大思想中学到的经验——*将对称放在第一位*。对称起源于力。等价原理——预期不管观测者如何运动，所有观测者将推断出同样的法则——要求引力的存在。标准对称——法则不区分颜色，也不区分电子与中微子中——规定了强力和电弱力信使的存在。然而，超对称是弦论的一种产物，是它结构的一个结果，而不是其存在的起源。这意味着什么？许多弦论家相信，依然会发现一些潜在的伟大的原理，这些原理都将使弦论的存在成为必需。如果历史可以重复自身，那么可证明，这个原理与包罗万象的甚至更引人注目的对称有关，但是在此时没有人找到这个原理可能是什么的线索。然而，由于我们只是处于 21 世纪曙光初现之时，阿玛蒂的描述可能证明是令人惊讶的预言。

正如你在本章所看到的，在物理学家努力组织和解释一个原本令人困惑并且复杂的宇宙之时，物理学家已经将对称拔高到了核心概念这样一个位置。这提出了几个有趣的问题。首先，为什么我们发现的对称是如此吸引人？第二，可能是比较难的，就是以群论为基础的解释真的不可避免吗？或者，人类的大脑不知何故只能了解宇宙的对称方面吗？为了理解为什么对称如此强烈地吸引我们，我们必须理解它是如何影响人类大脑的。

第八章

它们中哪个最对称？

在图 97 中那个男人歪向一边的眼镜的样子使你抓狂前，你认为你能忍受多长时间与他进行文明谈话？或者，假设你进入某人的房间，并且发现，挂在墙上的那些照片显示了一种如图 98 那样的“排列”。难道你不会本能地想调整它们中的每一个吗？这种对两侧对称的渴望在人类的头脑中是如何和为什么发展的呢？进化心理学的一个目标就是准确地回答这类问题。

图 97

进化心理学是一门尝试将两个世界的最好的两个东西结合在一起的科学——这两个东西就是进化生物学和认知心理学。在这种观点中，人脑实际是由不计其数的专门目标模块组成的一个集合，自然选择在解决具体的适度问题中分配和形成这些模块。一个适度问题是环境提出的任何挑战，面对这样的问题，人类祖先的大脑需要发展，以便人类可以成功地生存和繁殖。换句话说，根据进化心理学先驱勒达·科斯梅德斯（Leda Cosmides）和约翰·图比（John Tooby）的说法，人类大脑有点像一把瑞士军刀，带着很多不同的“小器械”，每样都为特定任务而设计。进化心理学家在头脑中拒绝更一般目的处理的思想。他们有说服力地论证，原始人类曾经不得不面对的所有问题本质上总是具体的而不是一般的。

来自于从生物学、人类学到古生物学的各种领域的线索都暗示，最

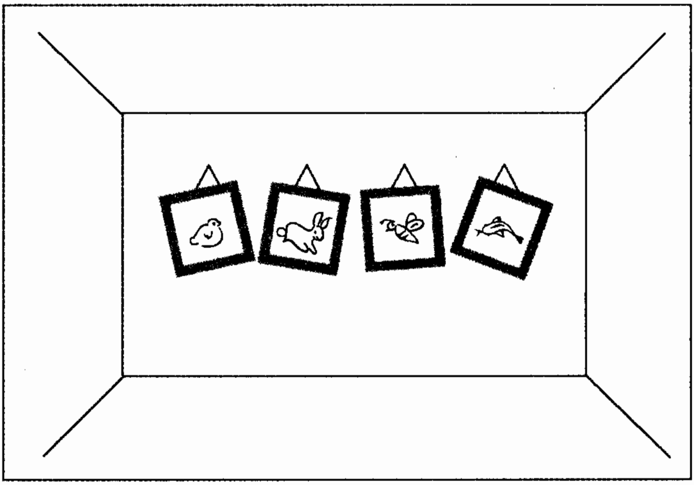


图 98

关键的适度问题可能是什么。在宽泛的层面上，这些适度问题包括从捕食者手里逃脱、辨识正确的食物、形成联盟、支持子孙和近亲属、与其他人沟通和选择配偶。对称是从哪里进入所有这一切的呢？

恐惧对称

在俏皮话比赛中，没有几个人能与奥斯卡·维尔德匹敌。在《道利·格雷的肖像》中，他宣称“一个人在选择敌人时再怎么小心也不为过”。撇开玩笑，从进化论的角度来看这是一种非常有见地的观察。如果基因的承载者被猎食者吞食，那么该基因将不能完成他们的主要任务——将基因完整地传递给下一代。任何多少有助于一只动物逃脱捕食者的基因将因此不可避免地被自然选择所偏好。这样的基因将进入智力上“逃脱捕食者模块”的进化结构。这些模块的任务是相当明显的。首先和最重要的是，必须探测到潜在的捕食者。没有提早探测就不可能采

取行动，结果就可能是灾难性的。只有在随后的阶段才需要激活其他功能——必须从错误的警报中识别出真正的危险，并据此做出反应。因此，逃脱捕食者模块必须首先是探测捕食者装置。

大量的试验证明，从蜜蜂、鸽子到人类，许多生物的感知系统，都是对两侧对称高度敏感的。对称模式比不对称模式既探测得快，又较易学习和从记忆中恢复。这些跨物种的能力能够与通过任何方式逃脱捕食者的需要相联系吗？感知硬件或软件正试图解决的准确的适度问题又是什么呢？答案的一个线索是，通过问不同的问题来收集：在一个缺乏教堂、汽车、飞机和其他人造物品的世界中，什么看起来是两侧对称的？答案如脸上的鼻子一样普通——即动物和人类！事实上，一头狮子的臀部也是两侧对称的，只是那里的对称远非其前面那样突出。换句话说，对动物来说探测两侧对称大致可以翻译成“我正在被观察”。观察者的意图不一定就是恶意的——他、她或者它可能仅仅在欣赏风景或选择一个伴侣。然而，毫无疑问——对于关注的主体而言，对两侧对称的提早探测可能意味着生与死的差异。

纽约大学神经科学中心的神经科学家约瑟夫·雷道克斯（Joseph LeDoux），是从与行为和现象相对的纯生理学角度研究情感的先驱之一。雷道克斯对诸如掺夹着爱和强迫性冲动的复杂感情，或者由欲望和妒嫉相互作用而引起的意识斗争不感兴趣。相反，他研究导致恐惧情感的大脑电路。雷道克斯发现对恐惧的反应是一种下意识，与“大脑的高级处理系统”无关。通俗地说，大脑的捕食探测系统面临着与任何防盗警报系统设计师所遭遇的同样的两难境地。一方面设计师想使系统能够对任何闯入的企图立刻做出反应，但另一方面，他们想使错误报警数最小化。然而，总而言之，可证明，一次延迟反应比少许误报代价更高，也更危险。因而，毫不奇怪的是，雷道克斯发现，大脑是通过两条独立的神经路径来运作的。一条“快餐式”捷径允许动物在大脑充分分析刺激之前对潜在的危险刺激做出反应，另一条“大道”通过感觉皮层传递，从更广泛的处理中受益。

恐惧的瞬间情感（而非有意识的感觉）的中枢是杏仁体——一个小的位于前脑的杏仁状的结构。（杏仁体是“杏仁”的拉丁语）。雷道克斯利用化学物质对神经细胞进行着色，以便跟踪老鼠体内的大脑电路，并且绘制恐惧采取的准确的路线图。这是一个有意义的步骤，它超越了较早时期被描写的“使习惯脱离老鼠”那样的纯粹行为研究的方法。雷道克斯发现，一旦一只老鼠发出第一声警报（以尖锐的吱吱叫的方式），其他老鼠收到的信号径直从它们的感觉丘脑（转送感觉信号的双叶灰质）传递到杏仁体。一旦收到一个强烈的刺激，杏仁体就启动整个防卫系统。可以以冷静的方式——以避免被看到——也可以以心跳加速和激素涌入血流中的方式做出反应。这些激素帮助诱导合适的行动程序——老鼠要么逃命，要么与捕食者进行战斗。

杏仁体似乎在所有具有这个结构的物种（包括人类）中控制着恐惧反应。研究证明一个脑部杏仁体损伤的女人完全丧失了其探测和认识与恐惧有关的面部表情的能力。

虽然，“快餐式”机制可能触发不少错误警报和不必要的恐慌症。然而，丘脑也把信号发送到更精确的信号处理中心——感觉皮层。这个较慢的路径最后将现实刺激的更可靠的描述提供给杏仁体，并且防止动物过度反应。

如我们刚看到的那样，对两侧对称毫无掩饰地探测能够不时引起警报，警报使整个（下意识）恐惧机器启动。在不同的环境下，两侧对称自身也能够充当一个反捕食机制。许多动物（总称警戒色动物）使用各种信号，例如与众不同的气味、声音和色彩组合来向捕食者公告它们的危险和厌恶。例如一些蝴蝶具有大的显著的眼点，该眼点在其静止时是隐藏的，但是，当探测到一个潜在的捕食者时，眼点是暴露的。一双“眼睛”的突然出现经常足以困惑捕食者，因而给蝴蝶一个逃跑的机会。在有警戒色的生物所使用的各种视觉警告中，两侧对称的信号证明是最有效的。特别地，使用具有不同翅膀图案的人工纸“蝴蝶”去试验家养小鸡的捕食行为的试验已经证明了，这样的视觉警告显示的保护价值被

大而对称的图案元素所加强。在瑞典研究人员进行的试验中，将纸蝴蝶粘贴在塑料陪替式培养皿下面，并把食物碎屑放置在每个培养皿的里面。在每一次试验中，将带有可口碎屑的 45 只单色黑蝴蝶和带有难吃的用奎宁处理过的 45 只警戒色信号蝴蝶放置在地上。难吃的蝴蝶具有对称或不对称的警告图案，每一个小鸡群都面临一种难吃的信号蝴蝶（对称的大的，对称的小的，或者不对称的）。试验结果表明，图案中的不对称削弱了难吃信号的功效。研究人员总结说，这可能是因为偏离对称引起了较弱的神经反应，因而使信号更难为小鸡所探测、记住或与难吃性联系起来。总之，这个发现和相似的研究导致了一个有趣的结论：拥有警戒色的被捕食物种可能服从于对大而两侧对称图案的自然选择。

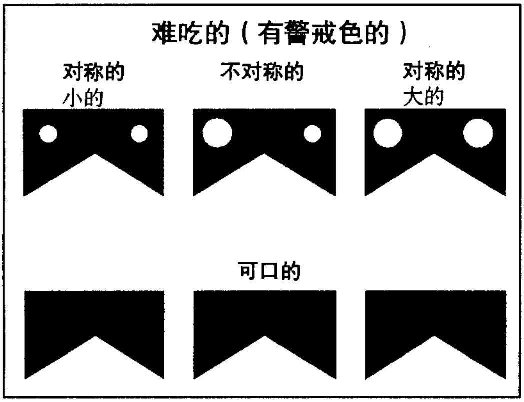


图 99

英国政治家兼哲学家埃德蒙德·伯克（Edmund Burke，1729～1797）曾经说："没有哪种感情像恐惧那样具备有效地掠夺大脑所有的行动和推理的力量。"这可能是真的，但是对称探测偶尔会触发对恐惧的下意识反应，这种反应有时可能完全是躲避捕食者的需要。同样，在信号竞技场中，对称的刺激显示、警戒色信号在某些情况下提供了一只对付潜在捕食者的保护性盾牌。

在反捕食者机制的两种类型（探测和发信号）中，对称性的作用是

消极的。对称性在某种程度上起着一种排斥动因的作用，即便这个因素是重要的。那么它也能产生一种鼓舞人心、动人心魄的刺激吗？配偶选择的过程证明，它的确能，这甚至可能远超过你的想象。

鸟儿这样做，蜜蜂这样做，甚至受过训练的跳蚤也这样做

躲避捕食者和吃正确的食物对于生存非常重要。然而，从基因的观点来看，生存仅仅是到达终点的一种手段。甚至于如果所有人都已成功地实现了在喜剧演员乔治·伯恩斯（George Burns）的书《如何活到100岁——或更久》中的那种思想，这对基因自身来说无论如何还是没有用，除非这些人也有后代。基因的复制和向下一代传递就是基因的全部意义。正像进化生物学家兼作家理查德·道金斯（Richard Dawkins）曾断定的："生物体仅仅是基因制造更多基因的一种方式。"

在某些物种里，个体能够复制自身——它们分裂为两个，而且每一部分都变成一个新的生命。自然界显然决定了这种无性过程并不怎么有趣，因为地球上大约170万种生物中的绝大部分都进行有性繁殖。更严格地说，有性繁殖必然为物种提供一种适度的好处，否则它就不会这么盛行。明显的差异（在有性和无性道路之间）是有性生产的后代能够从其父母的基因交换中获益。新的和改进的基因构造能够限制有害变异所导致的伤害，并能加强后代的适应度。然而，为了充分开拓性的好处，个体不得不选择最合适的配偶。从基因的观点来看，"最合适"意味着一个配偶具有增加生存机会和后代繁殖量的特征。这转变成了两个主要的特性：基因的高品质（根据适度）和父母照顾后代的能力。这里我将专门讨论这两个特性中的前一个，因为它是与对称性最直接相关的一个。

后代继承了父母各50%的基因。因此，与一个具有"优良"基因的配偶交配就是非常重要的。这种认识可以追溯到达尔文本人，他认识

到，除了为自然选择的生存所驱使，进化也由通过基于配偶选择的性选择所形成。然而，主要的困惑就在于此。显然，我们的祖先没有装备DNA检测工具箱，那么任何个体是如何评价他或她的可能伴侣的基因适度的呢？即使今天能够获得DNA检测设备，大部分人仍然不依靠它们来选择爱人。长尾巴的寡妇鸟或雌孔雀的自愿的配偶选择也不会依靠这种检测。对配偶选择过程的完整理解需要的不仅是拆穿所有性吸引的神秘性，这明显超过了本书的范围。关于这个问题的许多有趣的方面，我将只讨论那些与对称性具体相关的。

那么是如何选择配偶的呢？基本上说动物和人都在寻找（在其他事物之中）一些可靠的适度指标。一些生物特征已经明确地发展为适度的信号和表现，他们就是要寻找这些生物特征。注意，这意味着，在同一时期这些适度迹象已经进化了，因此就应该具有探测和认识他们的感知系统的能力。也就是说，如果在潜在配偶感知系统中没有进化出对红屁股的一种伴随偏好，那么从进化的观点来看，一只狒狒的色彩鲜明的红屁股将一无是处。只要交配的好处不为一些相反的直接的自然选择力所平衡，雄性特点和雌性偏好将共同进化为甚至更极端的特征。许多研究表明，一种最强大的适度指标是两侧对称。为了领会这个概念，考察一下孔雀的尾巴这个特别而又时常被讨论的例子。一个巨型的完美对称的尾巴对世界朗声宣布：“拥有我的孔雀没有寄生虫，也没有歪曲的变异。”鸟类寄生虫是如此普遍，并且他们变异如此迅速，以至于任何能够证明已经征服它们的鸟都必须拥有非常健康的基因。一只大量滋生寄生虫的孔雀将有土褐色的不对称的尾巴。换句话说，精确的对称可能是发展稳定性的一种非常清楚的指标。即使与完美对称有相对小的偏差（术语称为波动不对称）也能揭示基因组适应环境的好坏情况。

配偶选择和基因品质之间的联系从生物学家威廉·哈密尔顿(William Hamilton)和马琳·祖克（Marlene Zuk）在1982年发表的有影响力的作品中获得了一种重要的促进。研究人员考察了北美鸟类的血液寄生虫与它们明显的炫耀之间的潜在关系。结果表明，一些特征表现取

决于健康，动物确实通过审查这些特征来选择拥有抗疾病基因的配偶。其他利用家燕［由瑞典的生物学家安德斯·莫勒（Anders Møller）］和利用斑马雀类［由英国生物学家斯约翰·斯瓦德勒（John Swaddle）和艾恩·库西尔（Innes Cuthill）］所做的试验也证明，雌性将对称性作为优选伴侣的一种标准。

在结束了接收波动不对称信号之后，必须发展对于对称图案的反应敏感性。生物学家兰迪·索恩希尔（Randy Thornhill）、安德鲁·波明安可夫斯基（Andrew Pomiankowski）及其同事已经提出，动物对对称的偏好已经进化得很精确了，因为信号中的对称度显示了发出信号者的品质[①]。对称不能造假。你可能想知道，为什么动物会长着像孔雀尾巴这样一种巨大的难以操纵的装饰物。以色列生物学家阿莫兹·查哈里（Amotz Zahavi）提出了一个似乎非常合理的答案，这个答案已经被称为*障碍原理*。可以马后炮地说，查哈里的思想非常简单：性装饰物的高成本（根据成长和处理的困难）正好使其首先成为一种可靠的适度和配偶选择的指标。如果某个人在电话中告诉你，她爱你，这是件好事，但是如果她用她最后的一角硬币买张机票一直从日本飞来看你，这就展示了一种更深水平的承诺。高成本和高保养的装饰物之所以发挥作用，是因为它们正是激起潜在配偶更多自信的品质。可以假定，高品质的雄性能够为这种奢侈的炫耀支付所需要的更多的能量。

不是所有人都同意，对对称的偏好必然造成对称成为一种适度的指标。在一篇题为《对称，美丽和进化》的有趣的论文中，瑞典生物学家马格纳斯·恩奎斯特（Magnus Enquist）和英国工程师安东尼·阿拉卡（Anthony Arak）提出，对称偏好可能仅仅是因为，不管方位如何，对称物比不对称物更易于识别。毕竟，动物面临的一个问题是，需要在其

---

① 这里的“信号”，就是前文中引人注目的“明显的炫耀”，“品质”从这里来看是指基因的适合度，“对对称的偏好已经进化得很精确了”则指有性繁殖的物种已经将对称作为选择的一种标准。

视野中识别不同方位和位置的物体。感知系统能得到的任何帮助都会被欣赏，并可能得到偏爱，这造成了一种对对称的感觉偏爱。恩奎斯特和阿拉卡利用人工神经网络作为识别系统的模型。神经网络是松散地基于大脑运算的计算机系统，为了提高它们的性能，它们能够从经验中学习。在恩奎斯特和阿拉卡的试验中，对对称的偏好是一种有限的感知开发——一种识别信号的需要的结果——并且它与基因品质的评价无关。剑桥生物学家卢夫斯·约翰斯通（Rufus Johnstone）在一次独立的人工神经网络试验中得到了相似的结果。再次暗示了偏好对称的配偶仅仅进化为配偶识别选择的一种副产品，并非因为在波动对称程度和配偶品质之间存在着关系。

然而，从这里讨论的观点来看，无论在动物王国配偶选择中对对称的偏好是寻找品质的结果，还是识别的结果，它实际上都不重要。对对称的偏好可能是多种原因进化成的。然而，重要的一点是*存在对对称的偏好*——对称在动物配偶选择中起着关键的作用。

我们接触到的喜好有着怎样的意义？

人类是非常复杂的动物。进化心理学、文化和种族、各种信仰、个人兴趣和性格，这些因素所形成的一种不可分割的混合物决定了人们发现什么是有魅力的。然而，说到底，基因的繁殖欲望在人类头脑中依然是一种强大的力量。在寻找一位健康的、能生育的配偶时，我们的头脑中的计划与我们石器时代的祖先头脑中的计划没有什么不同。美丽可能存在于旁观者的眼里，但正如进化心理学家大卫·布斯（David Buss）曾指出的："人类经过数百万年的进化已经形成了眼睛和在眼睛后面的大脑。"什么是有魅力的感觉很大程度上取决于一种适度决策机构，这种机构至少部分是因配偶选择而进化的。

如果你认为魅力是不重要的，那就再想一想。贯穿 2003 年的大部分时间，安娜·克尼科娃（Anna Kournikova）在女子网球的排名大致

在第 70 位，然而，她在签名上比排名明显靠前的选手多挣了数百万美元。倘若你想知道为什么，这里有个提示——她还两度成为《箴言》杂志的封面人物。ABC 新闻节目 20/20 的创作人员引导了试验，以测量有魅力的男人和女人得到优待的频率。在亚特兰大的一次试验中，要求两个穿戴一样的女演员各自无助地站在一辆用完汽油的汽车旁边。对于两人中相貌平平的那个，几个行人停了下来，但只指点她去最近的加油站。对那个更有魅力的女演员，不少于 12 辆汽车停下来，并且实际上有 6 个司机过来为她加油。

在第二个试验中，20/20 栏目组雇用了两位男士去申请一份工作。这两位候选人具有相似的教育和工作经历，甚至在他们简历中确实存在一点小小的差异也被小心地清除了。然而，在两位男士之间存在一个值得注意的差异——一位非常有魅力，而另一位相貌平平。信不信由你，面试官渴望让更有魅力的男人尽可能快地回来参加预选。而相貌平平的男人得到的回答是“别给我们打电话，我们会给你打电话”。

甚至大脑中对美丽反应的区域已被识别出来。研究人员汉斯·布瑞特（Hans Breiter）、南希·埃特科夫（Nancy Etcoff）、伊塔哈克·阿哈若（Itzhak Aharon）和他们的合作者利用磁共振成像（MRI）研究了当向男人们展示特别有魅力的女人们的照片时，男人们的大脑将如何活动。他们发现，魅力在大脑中触发的区域与食物（当一个人饥饿时）或其他令人入迷的主题（例如当一名冲动的赌徒看到轮盘赌的转轮时）触发的区域相同。

长期以来都认为美丽的标准很大程度上是文化造成的，因而它是习得的，而非天生的。由位于奥斯丁的得克萨斯大学心理学家朱迪斯·朗罗伊斯（Judith Langlois）进行的更近的研究已经完全推翻了这种传统观念。朗罗伊斯首先让成年人对一些白人和黑人女性的照片根据其吸引力进行排序。然后将这些照片成对地（其中一位比另一位更有魅力）展示给两个年龄组的婴儿——2～3 个月大的和 6～8 个月大的。结果发现，两个年龄组的婴儿都较长时间地盯着更有魅力的女人的脸。相似地，1

岁大的婴儿被发现会花费相当长的时间去玩弄面部更有魅力的玩具娃娃。

其他研究考察了跨文化偏好的变化。心理学家迈克尔·坎宁安（Michael Cunningham）让不同种族的男人判断不同种族女人的面部魅力，结果发现了一种不可思议的一致性。甚至当考虑将其不同程度地展示给西方大众媒体时，一致性仍然保持。跨越地理和种族界限（例如用中国、印度、南非和北美的男人）的研究产生了非常相似的结果。集中起来，所有这些研究似乎显示，确实存在魅力的普遍标准。而且有魅力的脸产生了一种广泛的吸引力，这种吸引力出现于生命的早期，而且在不同文化之间是一致的。美的判断可能不完全是天生的，但是人脑可能有一些天生的基本法则，根据这些法则构建魅力的模板。

因此，可能存在一种“容貌歧视（lookism）”的偏见，但是男人们和女人们发现的魅力是什么呢？生物学家兰迪·索恩希尔、心理学家史蒂夫·甘杰斯特（Steve Gangestad）和生态学家卡尔·格莱默（Karl Grammer）已经收集了大量的证据，这些证据表明，对称是一个关键因素。索恩希尔、甘杰斯特和他们的同事测量了近 1000 名学生的不同面部特征（眼角、瞳孔、颧骨、嘴角等的位置）和身体特征（脚宽、手宽、肘宽、耳长、食指和小指长度，等等），以发展一种全面的不对称指标。当索恩希尔和甘杰斯特将这些数据与独立的魅力比率联系起来时，他们发现，在身体和面部不怎么对称的人们被认为较少魅力。

在一项独立的研究中，格莱默和生物学家安雅·里可夫斯基（Anja Rikowski）甚至发现了对称和诱人的体味之间的关系。在一项由 16 名男性和 19 名女性参与的研究中，每位研究对象在受控条件下连续 3 个晚上都穿着一件 T 恤。使用后立即将 T 恤深度冷冻，就在评价气味前，将 T 恤重新加热至体温。然后，由 15 位异性对象按照一个 7 分的等级对性感的气味进行打分。其他 22 位男人和女人评价试验对象肖像的魅力，并且基于 7 个特征计算试验对象的对称性指数。结果表明，女性试验对象的面部魅力和性感的体味是一致的。而且，男性发现，一个女人

的身体越对称，她的气味就越性感。有趣的是，女性只有在处于其月经周期的排卵期时，才发现越对称的男人的气味越有魅力。

也许最令人惊奇的是，索恩希尔和甘杰斯特发现了对称性和女性性高潮之间的关系。研究人员推断，如果女性的性高潮是为保障她们的后代获得健康基因而做的一种适应性设计，那么女性应该与较对称的配偶经历更多的性高潮。用86对学生夫妻进行了一项研究，研究人员发现，配偶最对称的女人的确经历了一种明显较高频率的性高潮。多少有点意外，研究人员没有发现，在性交中女性的性高潮与性爱中的浪漫水平或配偶的性经验之间有任何相关性。在任何女性读者跑去找一个对称的家伙前，我应该指出，研究还表明，最对称的男人在他们的交往中付出最少，而且更经常欺骗配偶。旧石器时代，女性更愿意选择那些基因天赋评价较高的配偶；而后来，女性愿意与一个“成功男人”结合。二者相比较，后者女性获得的性高潮较少。

心理学家托德·沙克福德（Todd Shackelford）和兰迪·拉尔森（Randy Larsen）进行的独立研究表明，无论在生理方面还是在心理方面，人类面部的对称与其他适度指标的相互关联度都很好。特别地，研究还发现具有不对称脸部的男人更可能遭受挫折、焦虑、头疼、难以专心，甚至胃的毛病；面部不对称的女人健康不佳，更易于产生感情波动和消沉。而且，对称性也是年轻的另一种暗示，因为人变得越老，他们的脸就变得越不对称。

出现的画面是富有启发性的。正如在动物王国里配偶选择的过程已将对称识别为一种优良的适度指标，人类也是这样，两侧对称已经等价于发展的稳定性、年轻和抵抗各种使人衰老的病菌的能力。用动物/人类的术语“吸引力”来说，结果是不可避免的——“对称的”几乎已经变成了“有魅力的”的同义词。

我不想给你留下一种印象，这种印象即对称是影响魅力的唯一品质。心理学家朱迪斯·朗罗伊斯和她的合作者强调，脸部的平均化是最有魅力的。朗罗伊斯对4张、8张、16张、和32张脸进行了计算机合

成。令她惊奇的是，她发现，合成的脸一律被判断为比它所赖以制造的个体更有魅力。16 张脸的合成被排序在 4 张或 8 张脸的合成之上，而 32 张脸的合成被发现最具魅力。当合成的脸通过构造也更对称时，朗罗伊斯发现，即使在控制了对称的影响后，平均化依然被判断为更有魅力。既然平均化可与一种原型模板很好匹配，那么这些发现支持了大脑中存在某种水平的原型的观点。

位于苏格兰的圣安德鲁大学的认知科学家大卫·派瑞特（David Perrett）发现，我们发现有魅力的脸常常是有吸引力的，因为它们看起来像我们自己的，或者像我们父母的脸。被这些结果引起了兴趣，在一次对圣安德鲁的访问中，我打电话给他，想查明为什么他认为那是一个适度的选择。他首先强调，对于能够帮助选择配偶的大脑，它必须是一个学习系统。“特别地，”他补充道，“大脑必须具有锁定一些事物的能力，这些事物——像对称或平均化——与其周边环境相关。既然你的家庭通过进化道路已经成功生存，那么找到某个有魅力的长得像（你或你的父母）的人也可能有意义。”

其他影响配偶选择的因素与生育能力、资源，以及照顾父母的能力和意志等指标有关。例如，由心理学家德文达拉·辛格（Devendra Singh）所做的研究表明，男人几乎普遍地偏好腰臀比为 0.7 的具有经典“沙漏”体形特征的女人。辛格发现，在这种偏好背后可能的原因是，这一比例是一种良好的生育能力指标。另外发现的一种可能的偏好是乳房对称。其他的调查发现，女人一般偏好比自己稍微大点的男人，可能因为女性偏好有资源的男性。

尽管在本章我根据进化心理学的结果和思想做了简要的描述，但这样的描述似乎也不可避免地要引出一个结论。要么因为配偶选择、认知、逃脱捕食者，要么因为所有这三者的结合，我们的大脑被对称性的发现所吸引和细微地调节。对于宇宙本身，或者说仅对人类感知到的宇宙，对称是否真的是其基础？这个问题因此变得特别急迫。

对称性真的统治一切吗？

设想一下，如果人类眼睛仅对蓝光敏感将会发生什么。在发展任何其他光探测器之前，科学家们将自然得出结论，宇宙中万物都是蓝的（甚至只是那种想法给了我蓝色）。相似地，如果一个害虫控制公司生产3英寸长的人性的捕鼠器，那么它可能认为，所有老鼠都比三英寸短，因为实际捕到的所有老鼠都是这个长度。这些是可观察的“选择效应”的简单例子。选择效应①是指用观测方法和观测工具都未识别的偏见所引起的对物质现实的过滤。我们大脑对对称的偏好，在我们对宇宙中什么是真正基本的感知中会引入相似的偏见吗？

这里我要再次强调，我正在专注于自然法则的对称性和用群论对它们的描述，但不是专注于实际的任何特定结构的对称。完美的水晶是后者的例子。当我们在晶体中在各个方向上按一定数量移动时，它们看起来完全一样。结晶学是研究由大量相同单元构成的集合的结构和性质的科学。单元本身可能由原子、分子组成，或者在一种更抽象的语境中，甚至由计算机代码片段所组成。在结晶学中，一个典型的问题可能是，在空间中如何安排大量相同的单元，才会使每个单元都能“看到”相同的环境？群论是结晶学的根本——回答上述问题的努力产生了一个证明，即只存在230种不同的空间对称群（正如只存在7种不同的线性片断样式的对称群；见第七章）。

对称原理在从结晶化的蛋白质和DNA到病毒的多种生物分子和器官的结构上也证明了自己。所有这些对称显然是重要的，因为它代表了

---

① 1631年，英国剑桥商人霍布森从事马匹生意，他说，你们买我的马、租我的马，随你的便，价格都便宜。霍布森的马圈大大的、马匹多多的，然而马圈只有一个小门，高头大马出不去，能出来的都是瘦马、赖马、小马，来买马的左挑右选，不是瘦的，就是赖的。因为选择只能在门口选，这个空间就小。后来，管理学家西蒙，把这种没有选择余地的所谓“选择”讥讽为“霍布森选择”。

稳定的（能量最小的）系统，这种稳定系统反过来形成了矿物质和生物。然而，这些不是构成自然界基本法则的对称性。

一谈到法则，对称和群论是极其“有用的”概念，这是确然无疑的。如果不在粒子物理学中引入对称性和群的语言，描述基本粒子和它们之间的相互作用将是难以理解的噩梦。不像其他的数学机器，群确实充实了秩序，并确定了模式。

在 1985 年的一次访问中，哈佛的数学家安德鲁·格里森说：“数学当然应该在物理学中发挥作用！它天生就是用来准确地讨论物理学所面对的这种情况；也就是说，似乎存在一些出格的规则——让我们找出它是什么。”除了它的有用性，对称从真实和抽象系统的描述中剔除了累赘部分。例如，设想一个由字符串象征性地表示的某种系统

X Y Z X Y Z X Y Z X Y Z X Y Z

我们可以使用符号的平移对称除去累赘之部分，将描述减少到非常紧凑的形式 5*(XYZ)，读作“重复子字符串 XYZ 五次”。同样在字符串

U V W X Y Z Z Y X W V U

中，我们可以使用反射对称将字符串缩减为 *SYM*（UVWXYZ），其中运算 *SYM* 表示反射。因此，真正的问题是，对称是否确实嵌入了自然的结构，或者它是否仅仅代表了一种便捷的方法，我们可以用这种方法与物质现实建立起一种对话。这不是一个容易的问题。在沿着通向宇宙最终理论的道路上的某些步骤中，对称似乎比其他步骤更为根本。例如，在任何两个观测者之间的基本对称构成了相对论的基础，这种对称是一种似乎的确表征了自然方式的准确的对称。另一方面，原子核的一个早期模型，即“艾里奥特模型”，是用一种对称（和一个联合群）来描述的，虽然已经知道该对称只是近似的，而且几乎肯定不是基本的。

规范对称被假定支持标准模型，一些规范对称的一个潜在问题是“对称破坏”。让我简单地解释一下这个概念。检查一下图 100 中一个餐桌的俯视图，餐桌上的小碟子用来放面包。围绕这个桌子的所有座位都是一样的，而且从坐在桌子上的任何人的角度来看，左和右是不能辨识

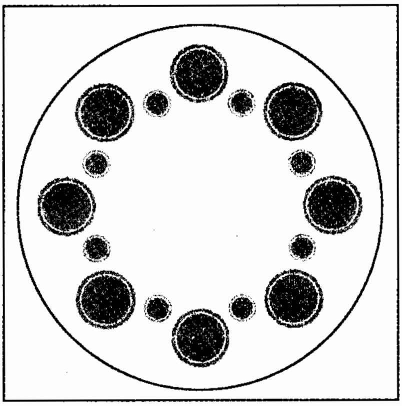


图 100

的。因此，这个构造在旋转（通过 360°÷8＝45°的整数倍）和反射（关于八条轴）条件下是对称的。然而，面包一上来，第一个人就把它放在一个碟子（在她的左边，我被告知）中，对称性是“自发破坏”的。左和右变得截然不同，而且旋转不变性消失了。

回想一下电弱理论，电磁和弱力是同一事物的两个方面（第七章）。力的载体——光子，W 和 Z——是可以互换的。这样立即会出现的一个问题是，那么为什么在今天的宇宙中这两种力具有这样不同的表示（例如，一个比另一个强 10 万倍）呢？标准模型将过失推在对称破坏头上。根据最流行的假说，在我们的宇宙形成（这一事件我们称之为“大爆炸”）不久，在电磁和弱力之间存在完美的对称。这个阶段的特征是超高温，在超高温下光子、W 和 Z 确实是难以区分的。然而，当宇宙膨胀并冷却后，它经历了一个转变阶段——不像一种液体的冻结——在这个阶段对称破坏发生了。在宇宙最初形成的一瞬间（大约 10^{-12} 秒）时，这肯定已经发生了①。事实上，可以将液体类比进一步延伸。无论你如何转动它时——一种液体看起来都是一样的——不存在首选的方向。然而，当液体冷冻时，这种对称消失了。出现的晶体结构有一些首选的轴。据信，在电磁力和弱力之间的对称的破坏已经产生了我们今天观测到的差异，这种对称破坏与宇宙“冷却”有关。W 和 Z 被赋予质量，而光子仍为无质量的。弱力仅仅

① 在 10^{-12} 秒时，随着温度降低，光子碰撞生成对称的正、反电子，正、反电子碰撞生成正、反中微子，弱核力与电磁力分离，在上述过程中，反引力不断通过光子这个媒介将自己分化成电磁力和弱核力。

因为它的缓慢的、沉重的载体，其范围局限于原子核尺寸序列的距离上。

对一名初学者而言，上面的描述可能听起来有点像一个虚构的神话故事。这样的一个人可能认为，粒子物理学家已经发明了一种对称，这种对称应该表征自然界的基本力，而当发现今天的宇宙不遵循该对称时，他们就编造了一个很方便的对称破坏的剧本。实际上，该理论的状况比上述描述的意见更坚固。试验已经引人入胜地证实了标准模型的许多预测（第七章）。甚至更重要的是，检测对称破坏的整个方案的试验不久就会变得切实可行。可以根据原子质量和将原子束缚在一起的能量来估计液体的冰点，同样地，可以用标准模型的已知参数估计对称破坏点的能量。所要求的能量要么已经位于一台巨型粒子加速器——例如在芝加哥大学的费米试验室的一万亿电子伏加速器可以达到的范围内——要么将可以在大约 2007 年建成的 CERN 的大型强子对撞机中达到。至少，预计这些试验将告诉我们，对称破坏的理论思想是否在正确的道路上。同样的试验也能够检测超对称的预测性。回想一下，如果现实世界服从超对称，那么各种新粒子正等待被发现。自旋-1/2 的电子应有一个自旋-0 的伙伴（称为一个“超电子”），自旋-1 的光子应有一个自旋-1/2的“超光子”伙伴，而且据预测，标准模型中的每个粒子都存在一个相似的伙伴。

然而，严格说来，即使一个试验证实了对称破坏和超对称，它也不能像证明对称是有用的那样毫无含糊地证明对称是根本的。正如我们已经看到的，超对称还只是弦论的一种特征，而不是其起源。该理论潜在的原理依然未被揭开，而这个原理可能被证明，也可能不被证明是一个对称的原理。

在我们欢呼对称是宇宙起源和工作方式的主要原动力，群论是宇宙主要的语言之前，有另外一个我们应该保持谨慎的原因。也许，使用凯瑞拉血亲婚姻规则的例子可以最好地证明这个原因。回忆一下，显示一个土著部落的这些法则，以创建一个与著名的克莱茵四群具有相同结构

的群。然而，毫无疑问的是，凯瑞拉没有打算用他们的规则代表任何特殊的数学结构。因此，我们面临这样一种情况，也就是说，我们已经确认了一种提供对现实的完美描述的数学工具，但是现实的真正原因仍然是未知的。导致凯瑞拉选择这套特别规则的实际动机，可能与我们在其中已经认识到的顺序没有多大关系，尽管更深入的分析可能揭示这些规则提供了一个稳定的社会。

真正的基本对称是怎样的？当我为这个问题而困惑时，我决定在全球顶尖物理学家和数学家中进行一次小规模调查，以便查清他们在这个主题上的想法。史蒂夫·温伯格（Steve Weinberg）是1979年诺贝尔物理学奖获得者和标准模型形成的关键人物之一，他也认为，对称在最终理论中可能不是最基本的概念。他补充说："我猜测，最终唯一牢靠的原理将是具有数学一致性的原理。"埃德·威腾（Ed Witten）是1990年数学界菲尔兹奖获得者，也是带来第二次弦革命的人，他也强调，"在弦论中依然存在丢失的或未知的成分"，"可以证明一些概念，比对称更为基本，例如广义相对论中的黎曼几何。"收到1966年菲尔兹奖和2004年阿贝尔奖的迈克尔·阿蒂亚爵士暗示了人类头脑驱动选择效应。"我们戴着有色眼镜看世界"，他说，"我们的数学描述是精确的，但是可能还有更好的方式。例如，李群的应用可能就是我们如何思考的另一人工制品。"尤其最后一句使我想起了著名数学家和哲学家伯特兰·罗素（Bertrand Russell，1872～1970）的另一种有趣的陈述："物理学是数学的，不是因为我们对物理世界了解得太多，而是因为我们了解得太少；它仅仅是我们能够发现的数学性质。"换句话说，罗素甚至通过数学将我们对宇宙的描述看做危险地接近某种选择效应。弗里曼·戴森（Freeman Dyson）是量子电动力学发展中的主要人物之一，也是1981年沃尔夫物理学奖获得者，像以往那样他提供了他独特的视角："我感到，我们甚至还没有开始理解为什么宇宙是这个样子。"经过几秒钟的沉思后，他补充说，"我们能够指出一条线是否完全笔直，或者能够区分一个圆和一个椭圆，但即使这些事情如此简单，其自身都是神秘的。"

谈到对称时，他坦承，他不大喜欢“基本的”这个词，当把对称看做是力的源泉时（就像电弱理论的规范对称那种情况），他更喜欢使用“富有成效的”这个词。最后，他指出，自从量子力学引进对称和群论后，对称和群论已经变成越来越强大的描述符号。

根据对称在宇宙织锦中的作用，我们能从所有这些洞悉中推出什么呢？我个人的粗浅小结是，我们仍然不知道对称在宇宙的工作方式中是否会被证明是最基本的概念。物理学家已经发现或讨论了多年的一些对称性，后来被认为是偶然的或仅仅是近似的。其他对称性，例如广义相对论中的广义协变和标准模型中的规范对称，变成了力和新粒子之花的蓓蕾。总之，对称原理几乎总是告诉我们一些重要的事情，而且，无论宇宙的潜在原理是什么，它们对揭开和发现这些原理可能提供了最有价值的线索和洞悉，在我的头脑中这是确实无疑的。在这种意义上，对称确实是“富有成效的”。

著名物理学家理查德·费曼根据 1961～1962 学年所开的一门课写了一本《费曼物理学讲义》。在该书中，费曼这样总结他对对称的讨论：

> 因此，我们的问题是解释对称是从哪里来的。为什么自然是如此的近似对称？没有人知道为什么。我们可能表明的唯一的事情是这样的：在日本的日光有一道门①，有时称之为全日本最美丽的门；它是在受到中国艺术影响最深的时候建造的。这道门十分精巧，有大量的三角墙以及美丽的雕刻，更有许多龙头与王子刻在石柱上等等。但是当一个人靠近看的时候，可以在其中一个石柱上看到精巧而复杂的设计，这些设计中有一个小小的设计元件在雕刻时上下颠倒了；否则这个东西是完全对称的。如果有人问为什么要这

① 这里作者或者转引的作者有一处小小的笔误，在英文中错误地把日光的英文 Nikkou 写成了 Neiko。日光的这座门就是著名的阳明门，由朝鲜工匠建造，但反映的是中国传统建筑艺术特色。

样做，引出来的故事就是这个上下颠倒的雕刻，它可以让上帝不至于嫉妒人类所做出的完美物品。因此，它们有意在那里犯了一个错，以便上帝不会嫉妒和恼恨人类。我们可能喜欢把这种思维反过来认为它接近自然对称的真正解释是这样的：上帝使法则只接近对称，以便我们不嫉妒他的完美！

与自然法则相关的对称不是唯一的主题，伽罗瓦的遗产在这个主题上已经产生并继续产生新的思想。通过检验从音乐到现代代数学跨越了一系列艺术和智力活动的几个简单的例子，我们至少可以品味这种不可思议的遗产。

什么激情是音乐不能激起和扑灭的?

本节的题目取自“圣西西莉亚日之歌”，作者是著名的英国诗人兼戏剧家约翰·德累顿（John Dryden，1631～1700）。圣西西莉亚节（11月22日）是为了纪念乐圣守护神发明风琴的传说。这首诗的主题是对音乐力量的赞辞。的确，很少有艺术形式能像音乐那样既与情感状态相联系，又与人体节奏相联系。例如，我们的呼吸和心跳，与我们活动的水平和性质，与我们兴奋或恐惧的强度密切相关。纵有许多首音乐，也许没有哪首能比拉威尔著名的“波列罗舞曲”更直接反映生命的这些节奏。事实上，在布莱克·爱德华兹（Blake Edwrds）1979年的影片《10》中，“波列罗舞曲”被宣布为完美的做爱音带。像我在第一章已经指出的那样，即对称在音乐中起主要作用就是要陈述这件显而易见的事情。因此，就只能预期群论将美好地描述音乐的结构和类型。

钢琴键上的音符提供了一个群与音乐关系的最简单例子。音高是用每秒钟（例如，一根弦的）振动的次数，即频率来表征的。在德国物理学家海因里希·鲁道夫·赫兹（Heinrich Rudolf Hertz）之后，频率按每秒钟的振动次数或者赫兹（记为 Hz）来测量。例如，钢琴键上（图

101）的中音 C 调（或者在大音阶中的“do”）的频率大约是 261.6Hz。A_4（或者“la”）的频率是 440Hz。八度被定义为其频率的比率恰好等于 2。一个比中音 C 调高八度的音具有频率 $261.6\times2=523.2$Hz，而一个比中音 C 调低八度的音具有频率 $261.6\div2=130.8$Hz。被准确的整数个八度划分的音符，具有相同的名字，而且它们听起来差不多。在巴赫通过其令人印象深刻的序曲和赋格曲集子普及的“平均律系统”中，所有的键具有相等的地位。在任意两个相邻键频率之间的比值是一样的，并且等于 1.05946。这个数（等于 2 的 12 次根）是通过下列要求而简单得到的：当提高到 12 次方（在八度中有 12 个半音或半步）时，它就给出一个比率 2，这对应着一个较高的八度音阶。

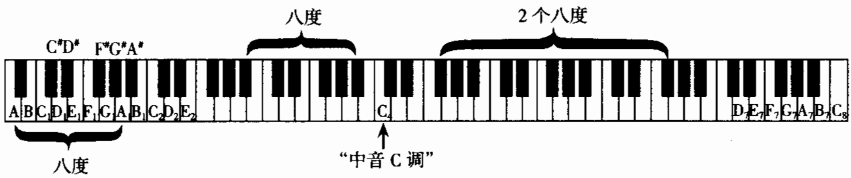


图 101

与比率等于两个简单整数之比（例如 3∶2）的频率对应的两个音符将产生和谐的（“协调一致的”）和令人愉悦的声音，传统上人们把这一发现归功于古希腊数学家毕达格拉斯。例如，一个纯五度由一个 3∶2 的频率比来表征，它对应着七个半音的划分（1.05946 的七次方非常接近 1.5），一个纯四度对应着一个 4∶3 的频率比和 5 个半音。

既然在八度中有 12 个半音，我们可以方便地在一个钟面上表示它们，如图 102。现在，我们可以通过像每天计算时辰那样执行完全相同的操作，从任何一个音符移动到另一个音符。也就是说，当我们想知道，下午 7 点以后再过 9 个小时是什么时间时，我们计算 $7+9=16=$ 上午 4∶00（因为 12 也被认为是 0）。以这种方式增加数字在数学术语中叫做“12 进制加法”。例如，$8+7=15=3$（12 进制）和 $10+2=12=0$

(12 进制)。平均律系统的半音遵从同样的规则。如果你想知道在 D♯ 上的 10 个半音是哪个音符（图 102)，你计算 3＋10＝13＝1（12 进制）＝C♯。数的集合 {0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11} 或者在音阶上的音符形成了一个在 12 进制加法运算下的群。你能容易地检验其封闭性——例如，9＋4＝13＝1（12 进制）——和结合律。单位元是数字 0，而且任何数都有一个逆。例如，纯五度（对应着 7 个半音）是纯四度（对应着 5 个半音）的逆，因为 7＋5＝12＝0（12 进制）。即使从纯音乐的角度看，这也很有意义，因为当将这两个音程结合时，它对应着一个 3/2×4/3＝2 的频率比，这个频率比恰好是一个八度——八度发出同样的声音。事实上，非常近似地，音乐家将联合起来给出一个八度的两个音程称为彼此的“转位”。关于转位的另一个例子（图 103）是小三度（比值 6∶5；3 个半音）和大六度（比值 5∶3；9 个半音），因为 3＋9＝12＝0（12 进制）。

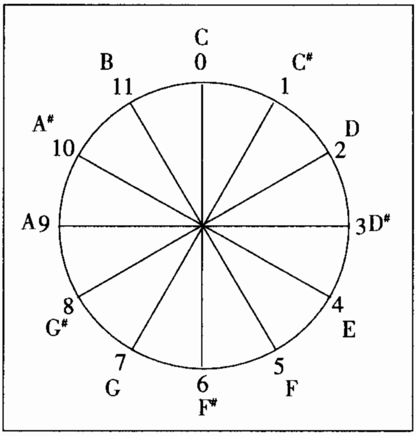


图 102

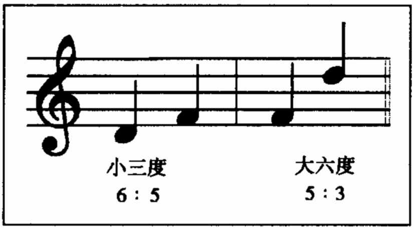


图 103

群不仅在音阶中出现，而且在某些音乐形式的结构上出现。一个简单的情况就是轮唱——一种短卡农曲，在这样的卡农中每种声音轮流参与演唱同一旋律，如同在熟悉的“雅克兄弟”中那样（图 104）

A 雅克兄弟　　B 你在睡觉吗　　C 早晨的铃在响　　D 叮当咚

图 104

如果我们把这四种不同的乐句分别用 A，B，C，D 来表示（图 104），那么其结构可以用 AABBCCDD（每个乐句是重复的）来代表，并且四个人声轮唱采用这个形式：

1：A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B C C D D

2：－－A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B C C

3：－－－－A A B B C C D D A A B B C C D D A A B B

4：－－－－－－A A B B C C D D A A B B C C D D A A

注意，如果要加入一个五度声部，那就只是重复或增加一次一度声部。事实上，无论从任何声部开始，如果我们连续地增加声部，那么完全会造成四种声部各增加一次。现在我们可以用 a 来标记指令“后面进入两个小节”。这使我们从一个声部移向下一个声部。象征性地，a^2（或 $a \circ a$）将表示“在四个小节后面进入”，a^3（$a \circ a \circ a$）将是“在六个小节后面进入”以及 a^4（“在八个小节后面进入”）将造成同一声部增加一次，或者恒等变换。你可以容易地验证，四个指令 I，a，a^2，a^3（其中 I 是单位元）构成了一个在“乘法”（例如，a 和 a^3 是彼此的逆，因为 $a \circ a^3 = a^4 = I$）运算下的群。

显然，当巴赫或任何其他经典作曲家为音乐作曲时，在他们心中都没有群论。群论不可避免地用于描述音乐方式，仅仅因为它天然适合作为一门对称的语言。一些 20 世纪的作曲家，最引人注目的是来自第二维也纳乐派的阿诺尔德·斯科恩伯格（Arnold Schoenberg），阿尔本·伯格（Alban Berg）和安东·韦伯恩（Anton Webern），据说他们已经比较谨慎地玩起基于数学的音乐。特别地，诸如伯格的《抒情组曲》或斯科恩伯格的钢琴协奏曲都使用了“用十二音作曲的方法”，在这种方法中，所有的和声都基于一个“十二音列”，事实上这种音列是十二个半

音音符的一种置换。可以依原始顺序（作曲家的选择）使用“十二音列”，或者通过一些运算对其进行进一步的变换。维也纳作曲家使用的三种基本运算是“行转位”、“后退”和“逆行转位”。在行转位中，下降的音程被上升的音程替换，反之亦然。例如，如果初始行是由C开始的，并将一个纯四度提高到F，那么转位行将一个纯四度降到G（图102）。“后退”颠倒了旋律跳跃的顺序。如果在初始行中的最后一次跳跃是升到大三调，那么这将是新行的第一次跳跃。最后，逆行转位同时产生行转位和后退的作用。你能容易地相信，这三种变换和单位元(“绝对什么都不做”）合在一起形成一个在“伴随”运算下的群。特别是，该群中每个元素都是其自身的逆。

许多人，包括热心的常去音乐会的人，都对斯科恩伯格的无调的音乐感到不舒服，就像他们相似地忍受伊果·斯特拉文斯基（Igor Stravinsky)，亚伦·柯普兰德（Aaron Copland)，皮埃尔·布莱兹（Pierre Boulez)，卢西恩诺·贝里奥（Luciano Berio）和许多其他人的作品一样。这个“反无调性”听众的成员可能会赞成，这些作曲家（即使的确深思熟虑地）使用数学无助于音乐的品质。然而，不管一个人对无调性音乐的观点是什么，他都不能否认斯科恩伯格和温伯格的“数学”试验，特别是温伯格的试验，它打开了有趣的前卫新音乐的大门，是对十二音阶的鼓舞。这一作曲上的革命通过一种音符结构序列取代了所有传统规则和惯例，这种音符序列支配了作曲的整个发展。诸如奥里弗·梅西安（Olivier Messiaen）和密尔顿·巴比特（Milton Babbitt）这样的作曲家从这种原则的根本变革中开创出迷人的音乐。

音乐代表了一种艺术形式，在这种艺术形式中只包括非常基本的群的概念。然而，在20世纪开始时，群论自身的发展并未止步。相反，仅仅2004年8月就完成了一个群论的证明，这个证明在某些方面是数学史上最复杂的证明。

“三十年战争”，还是怪物的驯服

科学的努力经常是寻找最基本的结构单元。考虑一下物质的结构，寻找了数世纪后终于发现了分子和原子，接着是质子和中子，再就是标准模型中的基本粒子（夸克、电子、微中子、μ 介子、τ 子），最后是弦论的提出。在空间的剧烈膨胀中，天文学家现在正在寻找在宇宙中形成的第一颗恒星和第一个星团——今天巨大星系的结构单元。在群论中，寻找的是所有单群（它没有非平凡的正规子群）的一个分类，可通过单群构造所有其他群。正如我们在第七章看到的那样，单李群的划时代的分类在 19 世纪末由威尔海姆·基令和埃利·嘉当完成。李群是由索福斯·李在 1874 年定义的连续变换（例如三维旋转）群。从道理上说，李群有有限个元素（例如有有限个可能的旋转角）。而且，它足以指定有限个参数来完整地刻画任何李群。例如，平面上一个圆的旋转群的元素通常记为 SO(2) 或 U(1)，这些元素完全取决于一个指定的参数——旋转角。因此，群的维数是 1。在三维空间中一个球的旋转群可以用三个参数来刻画——两个识别旋转轴的角度和一个自身旋转的角。这个记为 SO(3) 的群因而有三个维数。基令和嘉当成功地找到了四个有限的李群族（传统上称为 A_m、B_m、C_m、D_m，取 $m=1$，2，3，…）和五个散见单群，散见单群是不适合归入任何族的个别的“独一无二”的群。这些散见单群称为 G_2、F_4、E_6、E_7、和 E_8，它们的维数分别是 14、52、78、133 和 248。如我在第七章描述的那样，单李群在标准模型中起着关键的作用，可能在弦论中证明是一个基本的工具。

较之李群分类，有限单李群的分类证明是更令人畏缩不前的任务。到 19 世纪末已经知道，存在 6 个有限族和 5 个散见（例外的）有限单群。其中一个族正是由伽罗瓦本人在攻克五次方程不可解性时定义的。回想一下，在一个对象集合的偶排列中，从自然顺序到初始顺序存在偶数次颠倒（第六章），而在一个奇排列中颠倒的次数是奇数。例如，

1324 代表 1234 的一个奇置换，因为它只涉及一次颠倒（3 出现在 2 之前）。但是 4321 代表一个偶置换，因为你可以验证，它涉及 6 次颠倒。我们已经知道（第六章），n 个对象排列的集合形成一个具有 $n!$ 个元素的群。事实上，凯莱定理声明，每一个群都具有与一个置换群相同的结构。任何个对象的偶置换的集合也形成一个群——完整置换群的子群。这容易理解：如果一个涉及偶数次颠倒的置换紧跟着第二个偶置换，那么颠倒的总数显然还是偶数，这意味着封闭性。偶置换的群称为交错群。伽罗瓦证明了，从超过 4 个元素的置换得到的交错群都是单群，这就是他用以证明五次方程不存在公式解的性质。

19 世纪末的数学家所知道的第二个单群族是我们已经遇到的音阶类型。数字 0 到 11 在 12 进制加法运算下形成一个群，同样地，对任何 n 值，数字 0 到 $n-1$ 在 n 进制加法运算下也形成了一个群。这种类型的群称为循环群，并且具有质数个元素的循环群是单群。4 个其他的有限单群族在许多方面与对应的李群族等价。1955 年，法国数学家克劳德·谢瓦莱（Claude Chevalley，1909～1984）发现了新的单群族。事实上发现了散见李群是有限单群族的源头。最后，确认了 18 个单群族。

散见单群的故事起始于法国数学家埃米利·莱昂纳德·马修（Émile Léonard Mathieu，1835～1890）。在 1860～1873 年间研究有限几何时，马修发现了最早的 5 个散见单群，这些单群后来以他的名字命名。这些单群中最小的有 7920 个元素，而最大的有 244 823 040 个元素。整整一个世纪过去了，直到 1965 年，南斯拉夫的数学家兹沃米尼尔·扬科（Zvonimir Janko）才发现了下一个散见单群。他在实际“发现”这个单群和其他几个单群之前，已经预测了它们的存在。就像 SU(3) 对称预测了 Ω 负粒子的存在性一样，扬科设法证明了如果具备某些性质的单群存在，它肯定由 175 560 个元素构成。经过一页又一页的计算，扬科的寻找结出了硕果，他成功地构建了现在被称为 J_1 的单群。扬科的发现结束了一个世纪的徘徊，同时标志着 10 年大发现的开始。在 1965 年和 1975 年间，不少于 21 个散见单群被构造出来，这使总数达到了 26（除

了18个群族)。26个散见单群中最大的一个，通常被指为“怪物”，它包含惊人的

808，017，424，794，512，875，886，459，904，961，
710，757，005，368，000，000，000

个元素。对于因数分解爱好者，这个数等于

$$2^{46}\times 3^{20}\times 5^{9}\times 7^{6}\times 11^{2}\times 13^{3}\times$$
$$17\times 19\times 23\times 29\times 31\times 41\times 47\times 59\times 71。$$

1973年，德国数学家伯恩德·菲舍尔（Bermd Fischer）和美国人罗伯特·格里斯（Robert Griess）（独立地）预测了这个怪物的存在，并且格里斯在1980年构造了它。菲舍尔还发现了其他4个散见单群，就像扬科在澳大利亚和德国所做的那样。在英国，约翰·康威（John Conway)又发现了3个。

18个群族和26个散见单群的确认仅仅是被证明为数学史上最难忘的和最具挑战性的工作的起点。目标是清晰的：清楚地证明这一分类确实穷尽了所有可能的有限单群。换句话说，证明每一个单群要么是18个群族中的一个，要么是26个散见单群中的一个。接下这项使人畏惧的工程的人，丹尼尔·戈伦斯坦（Daniel Gorenstein）后来把它叫做“三十年战争”，因为该分类的许多工作是在1950年到1980年三个十年中完成的。

戈伦斯坦（1923～1992）成长于波士顿，就学于哈佛，在大学学习期间他对有限单群产生了兴趣。在二战中作为备战的一部分他向军方讲授数学。战后他返回哈佛大学研究生院，1950年完成其博士学位。接着几年他主要工作于代数几何领域，1957年转回有限群，并在1960～1961学年涉足有限单群的分类。

除了实际发现的21个散见单群，另外两件事为大举进攻分类问题奠定了工具基础。第一件事是1954年德裔美国人数学家理查德·布饶尔（Richard Brauer，1901～1977）在阿姆斯特丹所做的演讲。在这篇开

创性的演讲中，布饶尔提出了依赖单群小“核”识别的分类方法，小“核”本身在性质上与母群相似。为了验证任意的群是否的确能用一个已知的单群予以确认，布饶尔的思想是用这些核作为验证的第一步。

分类战争的第二个关键要素是一个重要的定理，1963年芝加哥大学数学家沃尔特·费特（Walter Feit）和约翰·汤普森（John Thompson）证明了这个定理。这个定理基本上表明，每一个有限单群（不是循环的）一定有偶数个元素。因为1906年英国数学家威廉·伯恩赛德（William Burnside，1852～1927）预言了该命题的正确性，所以将这个命题称为伯恩赛德第二引理，1963年由费特和汤普森所做的实际的证明占了《太平洋数学杂志》整整一期（255页）。这一证明的影响是巨大的。论文中所介绍的思想和方法变成了分类工作的基础。正如戈伦斯坦在1989年所描述的那样：“在奇数阶定理（费特-汤普森定理等价地表明，具有奇数个元素的有限群是可解的）的推动下，对有限群理论的兴趣被唤醒了。在随后的15年，许多天才的年轻数学家被吸引到这个领域，他们将在分类证明中起到突出的作用。”在布饶尔洞悉和费特-汤普森定理的武装下，戈伦斯坦在1972年列出了一个大胆的16步计划，以实现分类的证明。他表达了谨慎的乐观主义，认为到20世纪末能够完成全部证明。

鉴于证明实际上涉及了大约100位数学家，这些数学家在500篇杂志论文中产生了1500页的证明，所以看来戈伦斯坦对完成证明所需要时间的最初估计确实没有夸大其词。事实上，俄亥俄州的数学家罗恩·所罗门（Ron Solomon），也是这些工作的一位领军人物，他在1995年写到：“除了戈伦斯坦外，没有一个主要的群论家在1972年相信该分类可以在本世纪完成。”然而，就像数学中司空见惯的那样，有一个人可能与众不同。就分类定理而论，那个人就是加州理工学院的迈克尔·阿斯科贝克（Michael Aschbacher）。通过一系列闪电般的进攻，他踢开了几块主要的绊脚石，攻克了许多证明。用戈伦斯坦的话说：

> 有许多其他群论家对于分类证明做出了重要的贡献。但是只有在 20 世纪 70 年代初阿斯科贝克进入这一领域后才永久地改变了单群的风景。他在单纯探索完全分类定理的思想中迅速地承担起领导作用，并带领整个“团队”和他一道跨过随后的 10 年，直到完成定理的证明。

的确，出乎所有人的意料，该证明被认为早在 1983 年就已完成。不过，因为证明的几乎难以驾驭的长度，戈伦斯坦、所罗门和数学家理查德·里昂（Richard Lyons）在 1982 年加入了进来，发起了一项修订项目，其目标是产生一个更短、更连贯版的证明。在随后的几年，已经在主要的证明中确认了几个明显的突破口。2004 年 8 月终于完成了最后的工作，阿斯科贝克和伊利诺斯大学的数学家斯蒂文·史密斯（Stephen Smith）出版了两卷著作。戈伦斯坦-所罗门-里昂修订项目也进展顺利，有 6 本专题著作已经出版或待出版。然而，至少还需要 5 年才能最终完成这一里程碑式的事业。

近年来有限群的研究与从拓扑学到图论的许多其他数学领域发生了复杂的联系。与量子场论的一些遭到怀疑但还未完全探明的联系也可能存在。

伽罗瓦引入了群论的概念，并构造了第一个有限单群族，他这样做时头脑中只有一个谦虚的目标——证明哪些方程可由一个公式解出或不可解出。如果他看到渺小的开始已经结出了累累硕果，那么他一定十分高兴。所罗门美好地描述了“三十年战争”的结果：“在单群研究鼎盛时期数学的爆发在有限单群结构方面产生了令人惊奇的洞见，并且在数学天空中揭开了几个最迷人的目标。”

第九章

一个浪漫天才的安灵曲

自古巴比伦以来成千上万的数学家里，谁最有影响力？数学家兼作家克利福德·皮克奥文（Clifford Pickover）就这个问题进行了一次非正式的调查，并且在他那有趣的书《数字的异想世界》中给出了由10位顶级数学家的名字组成的名单。埃瓦利斯特·伽罗瓦就在其著名的名录上（排在第8位），尽管这位受尽折磨的传奇人物年方20就已辞世。是什么使得某些人有超越其他所有人的创造力？如此光华四溢的创造力又怎么能够在如此年轻时就已耀眼夺目呢？如果有可能给出这些问题的准确答案，我确信，众多的心理学家、生物学家、教育家和大公司将非常地感激。不过，既然我不可能给出答案，那么我将改为简单地提出关于这些话题的一些当前的想法，并考察这些想法是否以及如何适用于伽罗瓦。

首先，我要阐明，超常的创造力是指一种有着重要文化影响的过程——一种产生富有意义的变化的思想或行动。明显的例子包括希格芒德·弗洛伊德（Sigmund Freud）创建精神分析法和牛顿公式化运动定律。

芝加哥大学的心理学家米哈利·史克斯特密哈利（Mihaly Csikszentmihalyi）富有洞察力地指出，依照创造力的真正本原，它不仅仅是出现在人头脑里的东西。为了能够宣布某种思想或成就是富有“创造性的”，我们必须将它与现存的准则与标准相比较。比如，只有在以世界上所有其他物理理论为背景对爱因斯坦的广义相对论进行判断之后，我们才可以无条件地说，它是所有时代最具创造性的理论之一。因此创造力总是涉及至少三个组成要素之间的关系：具有创造力的人；创造性活

动出现的领域（比如，数学或其分支，音乐，文学）；充当守门员或裁判（如其他的数学家，博物馆馆长，文学作品读者，以及评论家）的游戏者或参与者。无论按照任何标准，伽罗瓦都有着惊人的创造力。这个年轻人的思想深刻地改变了数学。他所建立的新领域——群论——已远远跨越纯粹数学的边界而扩展到视觉艺术、音乐、物理学、以及任何能够发现对称性的领域。

正如我先前指出的，理解创造力如何起作用不仅仅激起了认知科学家，神经学者和教育家的兴趣。大公司和集团都急于找到方法来培养员工的创造力和创新精神。每年用在研讨会、进修、集体讨论会以及专门课程的开支数以百万美元计，设计的所有这些活动的具体目标是制造下一代比尔·盖茨（Bill Gates）。但是创造力的源泉能够确定了吗？或者说创造性思想仅仅是偶然擦出的火花，以及从松散联系的学科中聪明地抓住稍纵即逝的少许知识？

创造性大脑的秘密

英国诗人欧文·梅利迪斯［莱顿伯爵，爱德华·罗伯特·布尔维-莱顿（Edward Robert Bulwer-Lytton）的笔名］曾经说过："天才做应当做的，而人才做能够做的。"这是一句有趣的引文，因为它将两个可能偶尔会与创造力重叠但不应该将其混淆的两个词——"人才"和"天才"组合在一起并加以对比。几个世纪以来，肯定有许多极具才干的画家和发明家，但比得上莱昂纳多·达·芬奇的创造力的却很少（若有的话）。另一方面，要具有创造力——也就是说，会带来模式的变化——这样的人不必是天才。特别是，许多研究表明超过某一水平的IQ值，大概在120左右，智力和创造力之间就没有清晰的关联了。换句话说，真正的创造力也许需要某种程度的智力，但也不能绝对保证IQ值为170的人就比IQ值为120的人有更高的创造力。没有对创造力的"解释"的主要原因之一恰恰是这样的事实：任何人都有某种程度的创造力。

当无法打开一个瓶子，而握着一条毛巾防止手滑时，你已经提出了一个创造性的解决办法。当一个还在上学的小孩将朋友的电话号码记在手背上时，他就创造性地解决了这个不时之需。当夜幕降临的时候，即使曾经生活在这个世界上的最富有创造力的人也不得不使用常人般的智力。

需要记住的另外一点是，在不同领域产生的创造性不容许进行简单的比较。正如哈佛大学认知学家兼教育学专家霍华德·迦纳（Howard Gardner）所指出的："一个领域中出现的创造性突破不能不加区别地与其他领域中的突破相比较，爱因斯坦的思维过程和科学成就与弗洛伊德有所不同，与艾里奥特［诗人T.S.艾里奥特］或甘地就有更大的差异。单一类型的创造性是一个神话。"尽管有这些告诫，在弄清创造力基础的几乎令人绝望的尝试中，专家们（包括迦纳本人）常常依靠努力鉴别出众多创造性个体中的共有特征。希望在于突出创造力的大多数代表性潜在来源所共有的特质。已经检测到的特质包括大脑的生理学特征、个人性格、各种认知特性（如进行远隔联想的能力），直接的（例如家庭和亲密的朋友）与更全面的（例如伦理的、政治的）社会环境。从一个基于科学方法概念的简单试验出发，我们至少可以对各种创造性模型起作用的程度有一种体验。这种试验代表了使用模型解释收集到的观测事实的组织方法。这个理想化的过程可以用三个词语来总结：归纳，推理，验证。说得更清楚一点，科学方法应该从收集实验或观测数据开始。以这些数据为基础，可以建立一个模型，一套方案，有时可建立一套完整的理论。最后，用新的实验、观测、或在构建模型过程中未曾使用过的新收集的事实来检验模型或理论。

只要在"模式"的构建中没有用到伽罗瓦，我们就可以简单地通过检验伽罗瓦是如何符合具有创造性大脑的个人特质的"模式"来理解这种一般哲学。很容易证实前面的条件是满足的——在由创造力研究者编撰的所有著作中我没有找到伽罗瓦这个名字。应该注意的第一件事情是：我之所以将单词"模式"放在引号中的原因是——"模式"是根本

不存在的！即使某人有作为画家的创造力天赋，如果这个人没有机会接受适当的训练，并与艺术界有所联系，那么可能我们永远都不会听说她或他。而且，具有创造力的人，即使处于特定领域中，他们都不大相似。正如史克斯特密哈利所指出的："米开朗基罗对女人没有多大的兴趣，而毕加索不能得到足够的女人。"类似地，我们在第三章曾经看到卡尔达诺做人极为张扬，而对同一数学问题的求解做出贡献的达尔·费罗却是低调而谦虚的。不过，波士顿大学心理学家艾伦·维纳（Ellen Winner）曾经谈起天才儿童："对于那些'成为'（我强调的）有创造力的人，即使是天才，个性特征比高 IQ 值或特定领域的才能要重要得多。创造者都是刻苦的、专注的、有支配欲的、独立性强的冒险家。"虽然专家们不能断言个性特征的确是创造性的直接原因，但几乎没有疑问，某些品质与创造过程是密切相关的。那么是什么品质呢？心理学家约翰·达希（Jonh Dacey）和卡斯勒恩·勒农（Kathleen Lennon）强调对模糊性的承受力——在规则不清晰、没有行为准则，或通常的支持系统（比如家庭、学校、社会）崩溃的情形下，个人思考、行动和保持清醒头脑的能力。事实上，如果不具备在无规则情况下行动的能力，毕加索永远也不可能发明立体派，而伽罗瓦也不能创建群论。因此对模糊性的承受力是创造力的必要条件。

心理学家史克斯特密哈利将注意力集中于被他称为"复杂性"的相关品质。复杂性意味着能够保持通常似乎处于两个相反极端的趋向。例如，大多数人介于叛逆和高度守纪律之间。非常有创造力的人能在一顶帽子落地的时间内从一个极端变到另一个极端。史克斯特密哈利与从艺术、人文学科、科学，到商业和政治广泛领域中众多具有创造力的人面谈过。以这些面谈为基础，他编了一个十元复杂性表——常常出现在有创造性的人中的明显对立的十对特征。该表包括：

1. 不时打断空闲与休息时间的爆发式冲动。
2. 聪明而极其天真。

3. 在极端有责任感和极端无责任感之间大幅摇摆。

4. 根深蒂固的现实感以及偏执的幻想与想象力。

5. 内向和外向的更替周期。

6. 既谦逊又骄傲。

7. 心理上的双性人——没有一成不变的性角色。

8. 叛逆，打破旧习，然而尊重专业领域及其历史。

9. 一方面富有激情，另一方面对自己的工作保持客观。

10. 经历过掺夹着愉快与享受的折磨与痛苦。

有趣的是，心理学家艾伦·维纳发现神童通常只显示出上述特征型谱的一个极端——他们往往是敏感的、冲动的和性格内向的。然而，我们应该记住，神童仍处于吸收知识模式而非创造模式之中。大多数神童成年后并未变得特别有创造性的事实反映了，只有很少的神童实际上拥有复杂性的能力。

尽管史克斯特密哈利的列表显然很多方面是建议性的，但它极好地描述了伽罗瓦。从许多方面来说，伽罗瓦是矛盾性和复杂性的综合。比如，在他5月25日给奥古斯特·薛瓦烈的信中写道："当我已经在一个月里耗去了一个人所能拥有的最好的幸福之源时，我怎样才能安慰自己？"一个人能够想象更激烈的情绪摆动吗？也可以看看下面拉斯佩尔从监狱里发出的一封信中的描述。伽罗瓦的行为摇摆于平静和爆发之间：

> 他整天在监狱院子里徘徊，陷入沉思之中，似乎在做白日梦一般。他病态的外表似乎像行尸走肉，他只有思想还保持着活力。
>
> 狱中的暴徒们嚷道："嗨，你可能只有二十岁，但你是个老头了！你不能喝酒，你能吗？喝酒要吓着你，不是吗？"随后他直接走过去应对这个威胁，一气喝光了一瓶酒，然后将瓶子扔向了那个挑衅者。

聪明但天真，现实而富有想象力，叛逆且同时尊敬数学与数学家，这些综合的性格可以用来刻画伽罗瓦。此外你能怎样刻画他在综合技术学院的入学考试，与他的学校校长的辛辣交锋，与数学界偏执狂般的交流，以及他对法律的违抗呢？

心理上的两性人——一方面非常敏感和非常“女性化”，另一方面敢作敢为又具有攻击性——是伽罗瓦另外一个明显的特质。看看下面这封他从监狱里写给姑妈切勒斯特-玛丽·古依纳德的信：

> 亲爱的姑妈，我已经听说您卧病在床。我想让您知道我很抱歉，被剥夺了去探视您的权利更加深了这种感觉，因为我被限制在这房间里不能去探视任何人。感谢您想起给我送礼物。非常高兴能收到仍然活着的提醒，这里就像坟墓一样。希望当我出狱的时候，您已恢复健康。我将首先去看您。

很难相信，但这就是数学家苏菲·热尔曼写给她的朋友及同事古格利姆·利波里·卡鲁利·达拉·索玛娅（Guglielmo Libri Carucci dalla Sommaja）的信中提到的同一个人：“一回到家，他（伽罗瓦）就恢复了侮辱人的恶习，就像你在科学院做了最佳报告之后他对你所做的那样。那个可怜的女人（伽罗瓦的母亲）逃离了家，好离她的儿子足够远，以安静地生活。”

达希和勒农在他们的观点中提到另外一些对模糊性的承受力以及在提高创造力中有重要作用的特质。其中之一是——刺激自由——也许我们可以称之为在盒子外思考的能力。

在很大程度上，创造力的本质就是打破常规和避免任何思维定式的能力。举一个关于这类刺激自由的非常简单的例子。如图 105，给你六根长度相等的火柴，任务是用它们摆出四个全等的等边三角形。尝试几分钟，但注意，解决这个问题需要非常规的方法。万一你没有成功，也别泄气；这个问题对大多数人来说都很困难。问题的解见附录 10。伽罗

瓦关于方程有公式解（第六章）的证明是在定式思考外的具体体现——为了回答关于代数方程的问题，他开辟了一个全新的数学领域。

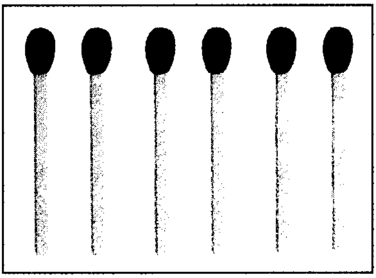


图 105

还有另外一个似乎大多数具有创造力的人（特别是有创造力的男人）都有的特点——早年丧父，这个特点也适用于伽罗瓦。在几乎一百名具有创造力的被访问者中，史克斯特密哈利竟然发现每十个男士中不少于三个，每十名女士中不少于两个都在十多岁时成了孤儿。

丧父如何激励创造力呢？生活给了那些丧父的年轻人一种由重担和机遇组成的复杂的环境。一方面有着巨大心理负担，为实现亡父的期望，而努力要去快乐地生活；另一方面，这样的年轻人有着真正发现自己的非常好的机会。法国哲学家让-鲍尔·萨特瑞（Jean-Paul Sartre，1905～1980）在他自传体的《消息》中写到：“让·巴普迪斯特（萨特瑞的父亲）的死亡是我生命中的大事件：它将我的母亲送回到她的圈子里，并给了我自由……如果我父亲还活着，他将给我重压而压垮我。幸运的是，他死得很年轻。”这肯定是太愤世嫉俗了。当一些有创造力的人，可能包括阿贝尔和伽罗瓦，由于父亲的死亡变得独立和有好奇心时，许多其他的人则依靠从家庭得到的支持而成长起来。例如，这有一些父子都是诺贝尔奖得主的例子。尼尔斯·波尔（Niels Bohr）于1922年获得诺贝尔物理学奖，而他的儿子阿格·波尔（Aage Bohr）获得了1975年的诺贝尔物理学奖。一个给人印象更深刻的例子是威廉·亨利·布拉格（William Henry Bragg）和他的儿子威廉·劳伦斯·布拉格（William Lawrence Bragg）。当劳伦斯年仅25岁时，这对父子双双获得了1915年的诺贝尔物理学奖。

伽罗瓦在21岁之前完成了他所有关于群论的辉煌的奠基性工作，

阿贝尔的天才才能在他 27 岁之前就照耀了数学界。我们应该惊讶吗？真的不必。一些最有创造性的数学家，抒情诗人和音乐作曲家都在非常年轻的时候做出了他们最好的工作。另一方面，大多数的画家，小说家和哲学家进入老年后仍保持着创造力并达到他们的巅峰。音乐评论家兼小说家玛希亚·达文波特（Marcia Davenport，1903～1996）很好地描述了这个事实："所有伟大的诗人死时都很年轻。小说是中年人的艺术。而散文是老年人的艺术。"

我曾经问过 2004 年阿贝尔奖得主迈克尔·阿蒂亚爵士：为什么他认为数学家在年轻时很有洞察力。他马上回答道：

> 在数学中，如果你足够聪明，你可以很快进入尖端研究的"前沿"。在其他一些领域你可能首先需要读完厚厚的几大本。而且，如果你待在某个领域的时间太长，你就会像其他人一样思考。如果是个新人，你就不会受到周围人观念的局限。越年轻，你就越有可能做出真正原创的东西。

心理学家霍华德·迦纳一方面在数学家和科学家之间，另一方面在艺术家之间做了一个类似的区分：

> 在此重要的是要注意，在科学或数学中的创造有一个决定性的区别。在数学领域里的人年轻时就开始富有成果，并且的确有机会在同一时期做出众多的创新。然而，与艺术不同，这些领域被极富创造力的人的发现所刺激，而以极快的速度发展和积累；早年流行的工具可能变得无关或无用了。

数学中的创造性的人甚至与其他科学中的创造性的人还有所区别，他们常常不遵循迦纳所称的"十年规则"。"十年规则"是一个观测结果：许多具有创造力的人在他们进入其研究领域十年后会有大的突破。阿贝尔

和伽罗瓦还在中学时就极具勇气地去“攻克”五次方程。他们在二十多岁或之前就给出了五次方程可解性的最后答案，远远提前于十年规则适用的时间。

在伽罗瓦的个性中还有与当前关于创造力的思想吻合的另一方面——他有很强的偏执狂症状。由于连遭迫害和被平庸之才折磨，他的错觉肯定不正常了。天才经常与神经错乱相联系。早在古时代，罗马哲学家瑟尼卡（Seneca）写到“没有伟大的天才不与疯狂相连。”1895年，精神病学家W·L·巴布柯克（W. L. Babcock）发表了一篇题为“关于病态遗传和天才易患精神错乱症”的论文。在这篇论文里他宣称天赋像容易夭折一样，是低劣基因组成的特征。从更可靠的基础来说，近期研究支持创造性与精神病理学之间的普遍联系。比如，心理学家阿诺尔德·鲁德维格（Arnold Ludwig）考察了超过一千名富有创造力的人的生平，发现这些杰出的科学家中大约28%有至少一种精神错乱。而在杰出的诗人中这个比值升到了87%。加利福尼亚大学伯克利分校个性评价与研究学院的心理学家多纳德·迈克金农（Donald MacKinnon），对众多具有创造力的数学家、建筑师和作家做了一次广泛的心理测试评估。结果显示具有创造力的人一致地在诸如精神分裂，沮丧和偏执等指示情感紊乱的要素方面得到了更高的分数。从以上这些和大量类似的研究得出的结论，正如加利福尼亚大学戴维斯心理学家迪恩·科斯·希蒙顿（Dean Keith Simonton）所说：“天才与疯狂之间的联系不仅仅是虚构的。”我注意到，在伽罗瓦这个例子里，精神错乱程度是少见的高，以致这个富有创造力的人变得虚弱。伽罗瓦和许多其他有创造力的天才拥有足够的自我意识和其他精神力量来帮助他们克制其精神疾病。然而关于这种富有创造力的人不得不协商浮士德似的契约的证据是十分引人注目的。英国散文家马科斯·比尔伯姆爵士（Max Beerbohm，1872～1956）以他自身的经历来说明这个现象：“我没见过不付出代价的天才。拜上帝所赐，他们都有某种生理或者精神上的痛苦或缺陷。”

非常引人注目的例子是伽罗瓦，他非常符合创造性天才的条件，我们想知道，其大脑是否有某些特别不同的地方？

两个大脑的故事

阿尔伯特·爱因斯坦于 1955 年 4 月 18 日在新泽西州普林斯顿医院去世。负责验尸的是病理学家托马斯 S. 哈维（Thomas S. Harvey），他取走了最伟大科学家的大脑，并将其分割成 240 片后用树脂将其固化。

埃瓦利斯特·伽罗瓦于 1832 年 5 月 31 日在巴黎科钦医院去世。病理学家打开了他的头盖骨并对其大脑进行了仔细的检查。鉴于伽罗瓦是腹部中弹并死于腹膜炎，这次检查是非常奇怪的。验尸报告的大半内容是关于其大脑的。

过去了 20 多年，所有的人，甚至爱因斯坦的家人都不知道爱因斯坦的大脑保存在哈维家中的瓶子里。在 1978 年，当时《新泽西月刊》的记者斯蒂文·勒维（Steven Levy）跟踪哈维到了他在堪萨斯州卫奇塔市的家中。在与记者长时间交谈之后，哈维承认他拥有爱因斯坦的大脑。他从一个标签为“科斯塔·辛德”的盒子中取出了两个玻璃罐，罐里装着给科学带来了革命的大脑。

从那时起，哈维同意了三个团队来考察大脑切片。加利福尼亚大学伯克利分校的解剖学家玛瑞安·戴芒德（Marian Diamond）和她的同事在 1985 年发表了一篇关于爱因斯坦大脑的论文。他们发现在爱因斯坦大脑的某个部分神经元与神经胶质细胞（支持和保护神经元的细胞）之比小于另外 11 个正常大脑的相应部分之比。他们总结说，每个神经元需要更大数量的神经胶质细胞也许表明爱因斯坦的大脑工作得更勤奋——比正常人需要更多的能量。但是这个解释后来受到了其他研究者的质疑。第二篇论文发表于 1996 年，作者是伯明翰阿拉巴马大学的布瑞特·安德森（Britt Anderson）。安德森和哈维（Harvey）表示爱因斯坦的大脑的重量比平均值（2 磅 11.4 盎司相对于平均的 3 磅 1.4 盎司；

1 230 克相对于 1 400 克）小，并且在特定的区域有更多的神经元。

最后，1999 年迈克马斯特大学的神经心理学家桑德拉·维特森（Sandra Witelson）和她的同事发现了值得欢呼的解开爱因斯坦天才之谜的可能的关键之处。他们发现其用于数学推理的顶叶区域要比正常人宽 15%。此外，还发现该区域凹槽（回间沟）部分地缺失。研究者认为那些缺少的组织可能使神经元之间更有效地产生联系。尽管很有趣，但所有这些研究都不能被视为最终定论。毕竟，即使维特森的研究使用了 35 个大脑来对比，但实验对象只有一个——爱因斯坦的大脑。

爱因斯坦大脑剩余的切片后来被哈维带到了它们的最终存放地——普林斯顿医院的病理系。当哈维被问到为什么取走大脑（爱因斯坦的遗体被火化了）时，他解释道，他觉得有义务为后代保护这珍贵的大脑灰质组织。

关于伽罗瓦大脑的验尸报告写道：

> 剥去头盖骨的包膜可以看到，年轻人形成冠状物的两块以一个钝角连在一起。这至多有五分之一英寸宽。在冠状沟缝合顶骨处的边缘，可以看到紧接两块骨头连接处有一个深的，扁平的，圆形凹陷；顶骨封丘发育很好，彼此分得很开；这部分的发育是不寻常的，相对于枕骨来说……
>
> 一旦头盖骨被打开，前窦的内壁靠得非常近；剩下的空间小于五分之一英寸；在头盖骨圆顶的中央，对应于上面所述封丘的两个凹陷……
>
> 大脑很重，回旋很大，裂缝很深，特别是在侧面部分；有一些隆起对应头盖骨上的腔；在每个前丘的前部有一个，在上面的顶部有两个；大脑组织一般柔软；脑腔很小，没有体液；垂体腺很大且含有灰色颗粒；小脑很小；大脑和小脑总重量为三磅两又不足八分之一盎司。

为什么死因是如此明显而病理学家却对伽罗瓦的大脑检查得如此仔细？报告的第一句话也许提供了线索："年轻的伽罗瓦·埃瓦利斯特，21岁，一位优秀的数学家，主要因为其热烈的想象力而出名，刚刚于12小时内死于25步外射中的一颗子弹所造成的急性腹膜炎。"我的感觉是，这个病理学家受到了与哈维取走爱因斯坦大脑相同的好奇心的驱使。这个病理学家知道伽罗瓦作为数学家的名声，也知道他暴躁的脾气和富有激情的想象力。他觉得，为了找到那些特征的根源的可能线索，有必要检查这个大脑。正如爱因斯坦的情况一样，验尸没有揭示任何清晰的"确凿的证据"。尽管如此，这个努力还是值得的，因为其目的是要揭开一个心怀革命浪漫主义，同时立足于数学和政治的人的大脑秘密。

不可分割

与其他大多数科学不同，在数学里观念有着永恒的价值。亚里士多得的世界观有着有趣的历史意义，但仅此而已。另一方面，到今天欧几里得《几何原本》里的定理仍然像公元前300年那样有效、正确和不朽。这并不是说数学是停滞不前的。事实远远不是这样。正如新一代望远镜扩展了我们的视野而没有使得先前在附近宇宙中的发现失效一样，数学不断地展示建立在已有知识之上的新景观。观点可能改变但真理不会变。数学家兼作家易安·斯图尔特（Ian Stewart）很好地表达了这个事实："实际上，数学中针对后来被改变了的先前结果有个专门的单词：它们被称为'错误'。"

伽罗瓦的思想及其光辉并没有随风而逝。它们涉及一个其根源可以追溯到古巴比伦时期的问题。进而言之，伽罗瓦所开启的革命将先前无关的领域结合成了一个整体。正如寒武纪生命大爆炸一样——地球上多样性生命形式的惊人爆发——群论的抽象化开启了通向无限真理的窗户。突然间自然规律和音乐等原本毫不相干的领域被神秘地联系了起

来。对称性的巴别塔①不可思议地融合成了单一的语言。

网络设计师布伦达·C·蒙德拉甘（Brenda C. Mondragon）管理着一个名为“神经质的诗人”的富有吸引力的网站。她关于英国浪漫诗人裴斯·拜斯赫·雪莱（Percy Bysshe Shelley）的第一行（1792～1822）写道：“革命精神和自由思考的力量是裴斯·雪莱生活中最大的激情。”你也可以用完全相同的话语来描述伽罗瓦。在伽罗瓦参加致命决斗之前留在桌子上的其中一页纸上，我们发现了一份混杂着革命观点的迷人的数学草稿（图 106）。在两行函数分析之后是似乎用于数学的词语“indivisible（不可分割的）”。然而，紧接这个词语的是革命口号“unité；indivisibilité de la république”（“统一；共和国是不可分割的”）和“Liberté，égalité，fraternité ou la mort”（“自由，平等，手足情谊，或死亡”）。在这些共和党人的宣言之后，似乎是一个不间断思考数学分析的概略的全部过程。很明显，在伽罗瓦的脑海里，统一和不可分割这些观念是平等地用在数学和革命精神中的。事实上，群论完全达到了——似乎不相关的众多领域有了统一和不可分割的模式。

在伽罗瓦潦草写成的东西中另外还有两个吸引眼球的字眼。一个是，“Pas l’ ombre”，几乎肯定是指“pas l’ ombre d’ un doute”（“没有一点怀疑的阴影”）。再一次，伽罗瓦对于他的数学证明和共和理想的正确性是如此确信无疑。第二个短语，“une femme”（“一个女人”），是将要造成他几小时后过早死亡的恼人窘境的悲哀暗示。

著名印度诗人罗宾德拉纳特·泰戈尔（Rabindranath Tagore，1861～1941）写到“死亡不是光的消失。那是因为黎明的到来而熄灭了灯。”这是对伽罗瓦的真实写照。他的洞察力宣布数学新时代的到来。他属于由那些永远不朽的人所组成的限制严格的俱乐部。

一代代被伽罗瓦的悲剧故事和毫无意义的死亡所打动的年轻数学家

① 《圣经》载大洪水后人们在巴比伦的示拿（Shinar）所建造的塔。这段故事载于《创世纪》第 11 章 1～9。

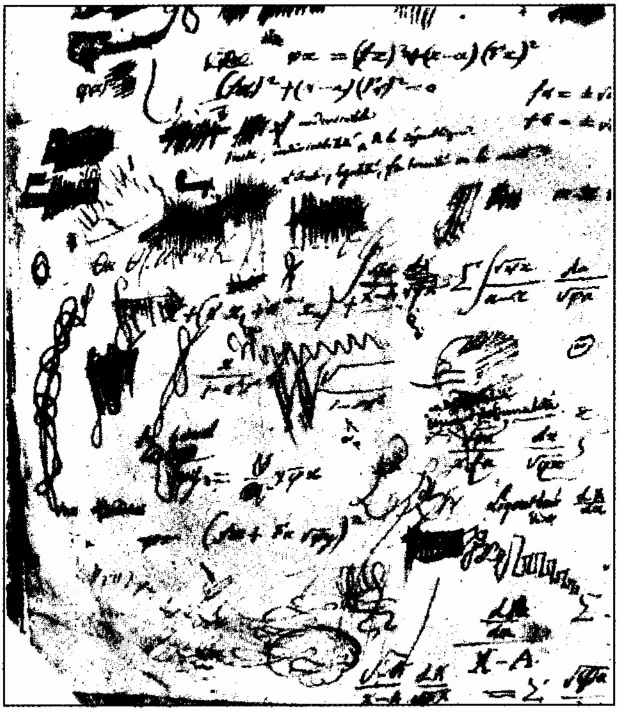


图 106

会在他惊人的遗产中找到值得安慰的东西。通过这些，他们就会宽恕那些在伽罗瓦之前数十年读了歌德的巨著《少年维特之烦恼》的更为敏感的青年人的命运了。歌德的敏感主人公的浪漫痛苦引起了广泛的共鸣。这部小说是如此有影响力，以致在欧洲各地发生了一系列青年人自杀事件。附带地说，人们可能认为如此的激情已从这个更加愤世嫉俗的世界消失很久了。然而戴安娜王妃去世之后自然流露的悲伤证明浪漫主义还没有消亡。甚至今天，伽罗瓦的故事仍延续着悲哀和感动，其成就的精神实质仍弥漫在许多现代数学中。我不可能找到比爱米莉·狄更生（Emily Dickinson）的诗句更好的言语来描述这种肉体的易逝和思想的

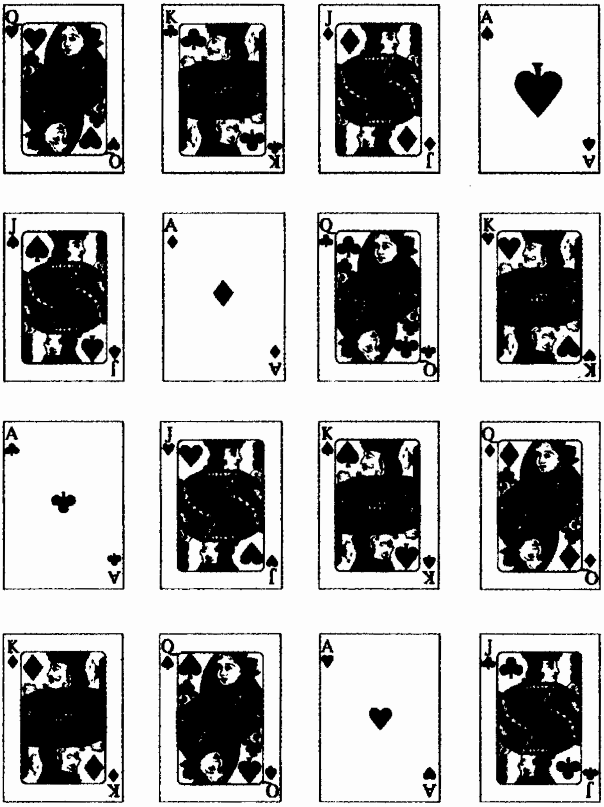
持久之间的对比：

死亡是灵魂与浮尘之间的对话。
“散开吧”死亡说——灵魂“先生，
我又有了希望”——

附录 1

扑克难题

正文第 23 页扑克牌问题的一个解。目标是将一副牌中所有的 J，Q，K，A 放在一个正方形中，使得任意一行、一列和两条主对角线上没有相同花色和大小的牌。



附录 2

求解两线性方程构成的方程组

在正文第 53 页我们遇到了古巴比伦人的方程组：

$$\frac{1}{4}y+x=7$$

$$x+y=10$$

这里有如何求解这种方程组的简要提示。一个相对简单的求解方法是从其中一个方程中分离出一个未知量，然后将其代入另一方程。从而将方程组化为只有一个未知量的方程。在上述方程组中，我们可以从第二个方程的两边减去 y，将方程变为

$$x=10-y$$

现在我们替代第一个方程中的 x，得到

$$\frac{1}{4}y+10-y=7$$

然后合并同类项 y 得

$$-\frac{3}{4}y+10=7$$

等式两边减去 10：

$$-\frac{3}{4}y=-3$$

两边同乘以 $\left(-\frac{4}{3}\right)$，我们可得：

$$y=4$$

现在，将 y 的值代入先前的方程 $x=10-y$，我们可得：$x=6$。因此解为长 $=6$；宽 $=4$。

附录 3

丢番图的解

这是丢番图给出的《算术》第一册中问题 28 的解（正文第 61 页）。

我们需要找到两个数使得它们的和以及平方和等于给定的数。假设它们的和等于 20 而平方和等于 208。丢番图并没有将这两个数设为 x 和 y，而是利用它们的和等于 20 这个条件将它们设为 $10+x$ 和 $10-x$。因此他由平方和得到的方程为

$$(10+x)^2+(10-x)^2=208$$

现在，既然：$(10+x)^2=(10+x)(10+x)=100+20x+x^2$

$$(10-x)^2=(10-x)(10-x)=100-20x+x^2$$

方程变为（合并同类项）：

$$200+2x^2=208$$

等式两边减去 200：　$2x^2=8$

除以 2：　$x^2=4$

取正的平方根：　$x=2$

因此，所求的两个数为 12 和 8。

附录 4

丢番图方程

我们需要求出以下方程（正文第 61 页）的整数（如 1，2，3，…）解

$$29x+4=8y$$

我们可以从等式两边减去 4 得到

$$29x=8y-4$$

从等式右边两项中提出公因子 4 得到

$$29x=4(2y-1)$$

因为 x 必须是整数，等式左边被 29 整除，故等式右边也必须被 29 整除。然而，29 是个素数（只能被 1 和自己整除）；因此 $2y-1$ 必须被 29 整除。特别地，我们取：

$$2y-1=29 \text{ 和 } x=4 \text{（为了保证等式成立）}$$

在 $2y-1=29$ 的两边加上 1 再除以 2，我们得到 $y=15$。所以方程的一组解为 $x=4$，$y=15$。

附录 5

塔尔塔利亚的诗和公式

塔尔塔利亚将求解三种形式的三次方程的规则写进了诗歌（正文第 70 页）里面。罗恩·G·奈特雷翻译如下：

在立方项加未知数项
等于某个整数的情况下，已经知道：
先找两个不完全相同的数；
那么，它们的乘积，就如人们都知道的那样，
将等于未知数的三分之一次方；
它们的立方根的余数，当出现
并被适当地减去时，接下来将给出
你的主要未知数的值，的的确确！
至于这种方程的第二种形式，
当只在一边求立方时，你会发现
其他的项都固定：
一旦从那个方程找到两个数，
将它们相乘，如同鸟儿般敏捷，
清楚并简单地给出未知数的三分之一次方的乘积；
按照同样的规则，你对这些数取立方根；
如果你愿意，将它们相加，
它们的和会轻松地实现你的目标。

既然已经解决了第二种，
那么第三种情形，现在在我们这些琐碎的和中；
对于它，正如已经证明的，
方法相同，我也是这么说的！
我发现的这些事情——噢，不待说——
在我们这个时代的1534年或更久；
这壮丽的证明藏在
亚得里亚海滨城市女郎居住的地方

当三次方程像 $x^3+6x=20$ 一样，形如

$$x^3+px=q$$

其中数 p 和 q 是任意的，以下有点吓人的表达式给出了达尔·费罗-塔尔塔利亚-卡尔达诺的求解公式

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

例如，由上述例子代入 $p=6$ 和如 $q=20$（并取正的平方根），得到正数解 $x=2$。

然而，检查邦贝利所考虑的如下方程：

$$x^3-15x=4$$

此时，$p=-15$，$q=4$。你可以很容易地发现将这些值代入上面的公式时得到

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

此时中间步骤涉及负数 -121 的平方根。然而，一个简单的检查发现 $x=4$ 是原方程的一个解。在邦贝利用巧妙的方法求解这类具体方程时，只有引入复数才能解决涉及负数的平方根的一般问题。

邦贝利的技巧如下：设 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+c\sqrt{-1}$，其中 c 的值待定。等式两边求三次方。这就得到

$$2+\sqrt{-121}=(2+c\sqrt{-1})^3$$

由于121的平方根等于11，等式左边等于 $2+11\sqrt{-1}$。使用恒等式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

展开等式的右边得到 $8+12c\sqrt{-1}-6c^2-c^3\sqrt{-1}$

使两边相等，并合并同类项得到：

$$2+11\sqrt{-1}=(8-6c^2)+(12c-c^3)\sqrt{-1}$$

通过检查发现 $c=1$ 时等式成立。因此我们由邦贝利的替代法找到

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$$

使用类似的代入法，邦贝利得到

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

将两个表达式代入上述 x 的公式，邦贝利得到解

$$x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

附录 6

亚德里安·范·罗曼的挑战

范·罗曼给出的方程（正文第 83 页）为：

$$\begin{aligned}&x^{45}-45x^{43}+945x^{41}-12300x^{39}+111150x^{37}\\&\quad-740459x^{35}+3764565x^{33}\\&\quad-14945040x^{31}+469557800x^{29}-117679100x^{27}\\&\quad+236030652x^{25}-378658800x^{23}+483841800x^{21}\\&\quad-488494125x^{19}+384942375x^{17}-232676280x^{15}\\&\quad+105306075x^{13}-34512074x^{11}+7811375x^{9}\\&\quad-1138500x^{7}+95634x^{5}-3795x^{3}+45x=C\end{aligned}$$

其中 C 是个已知数。特别地，他要求给出一个当

$$C=\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{\frac{15}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

时的解。

韦达已经知道并能够运用 $n\alpha$ 的正弦和余弦的公式（其中 n 是任意整数，而 α 是个角）。他意识到方程左边是 $2\sin 45\alpha$ 的表达式，而后者可以用 $2\sin\alpha$ 表示。因此，只需简单地求出使得 $2\sin 45\alpha=C$ 的 α 值，就可得到范·罗曼形如 $x=2\sin\alpha$ 的方程的解。

附录 7

一元二次方程根的性质

一元二次方程的最一般的形式如下（正文第 85 页）：

$$ax^2+bx+c=0$$

等式两边除以 a，我们得到

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

另一方面，如果我们记方程的解为 x_1 和 x_2，则方程又可以写为

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

因为当 $x=x_1$ 或 $x=x_2$ 时乘积等于 0。将乘积展开，我们得到

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_2x_2=0$$

将这个表达式和前面的形式相比较，我们发现这些解必须满足

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

现在我们来考查表达式

$$\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right]$$

由于：

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

$$(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$$

我们有

$$\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\pm(x_1-x_2)$$

因此

$$\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\right]=\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)\pm(x_1-x_2)\right]$$

给出了 x_1（当选择“+”号时）和 x_2（当选择“−”号时）的值。

附录 8

伽罗瓦家谱

关于埃瓦利斯特的父系家族，我只找到了从埃瓦利斯特的祖父开始的如下内容（正文第 115 页）：

雅奎斯·奥利文·伽罗瓦（埃瓦利斯特的祖父）
1742 年生于奥祖尔-勒-瓦格（塞纳-马恩省）
娶妻玛丽-杰尼·德夫格（埃瓦利斯特的祖母）
1806 年 5 月 12 日死于布尔-拉-林市

埃瓦利斯特的祖父母有六个孩子：

玛丽·安妮·奥利文·伽罗瓦
生于 1768 年 11 月 3 日
嫁给约瑟夫·马丁·布兰德洛特

玛丽·安东妮特·伽罗瓦
生于 1770 年 10 月 20 日
嫁给丹尼斯·弗朗科斯·勒·古依

托多利·迈克尔·伽罗瓦
生于 1774 年 3 月 14 日
娶妻维多莉·安东妮特·格瑞维特

尼古拉斯-加布里埃尔·伽罗瓦（埃瓦利斯特的父亲）
生于1775年12月3日
娶妻阿代累达·玛利亚·德芒特（埃瓦利斯特的母亲）
死于1829年7月2日

玛利亚·鲍莱尼·伽罗瓦
生于1778年9月7日
嫁给安德鲁·罗伯特·赫亚得

雅奎斯·安东妮·拉法尔·伽罗瓦
生于1781年

奥弗瑞（2004）列出了另外一个儿子——让·巴普迪斯特·奥利文——但我在布尔-拉-林城的名单中没有找到他的名字。他也将次小女儿的中间名字拼写为阿珀莱尼（实际为鲍莱尼）。

尼古拉斯·加布里埃尔·伽罗瓦和阿代累达·玛利亚·德芒特有三个孩子：

娜塔莉·西奥多·伽罗瓦
生于1808年12月26日
嫁给本诺特·堪特洛特

埃瓦利斯特·伽罗瓦
生于1811年10月25日
死于1832年5月31日

阿尔弗雷德·伽罗瓦
生于1814年12月18日

娶妻鲍莱尼·堪特洛特

随后几代如下：

娜塔莉(1808～) 埃瓦利斯特(1811～1832) 阿尔弗雷德(1814～)

|　　　　　　　　　　　　　　　　|

鲍莱尼 (1833～1901)　　　　　　伊丽莎白(1843～1855)

娶妻古纳德·费里克斯

|

娜塔莉 (～1877)

埃瓦利斯特母亲方的直系家族树：

迈克尔·德·芒特

娶妻巴比·德·克瑞奎比夫

|

皮埃尔·德芒特 (1590～1670)

娶妻安妮·布瑞得

育有十个孩子，其中第十个孩子

|

弗朗科斯·德芒特 (1645～1711)

娶妻玛古瑞特·德·格鲁奇

育有 14 个孩子，其中第 13 个孩子

|

迈克尔·德芒特 (1692～1766)

娶妻安妮·玛古瑞特·利柯勒克

育有 14 个孩子，其中第 6 个孩子

|

弗朗科斯·德芒特（1723～90）
娶妻玛丽-玛德莱尼·马丁
育有两个孩子；女儿很小的时候死了

托马斯·弗朗科斯·德芒特（1752～1823）
娶妻玛丽·瑟瑞斯·伊丽莎白·杜兰德

阿代累达·玛丽亚·德芒特	安东尼-玛丽·德芒特	切勒斯特-玛丽·德芒特
（1788～1972）	（1789～1856）	（1804～1860）
埃瓦利斯特的母亲	与安妮·德拉波特结婚	与埃切利-查理·古纳德结婚
与尼古拉斯-伽布瑞	有七个孩子	有七个孩子
尔·伽罗瓦结婚		
第二次婚姻则嫁给了让·弗朗科斯·洛依尔		

我有大量关于安东尼·玛丽·德芒特和切勒斯特-玛丽·德芒特后代的信息。但我没有写出来，因为这些与伽罗瓦已没有直接关系。

附录 9

14 - 15 之谜

萨缪尔·洛依德的 14 - 15 之谜中的初始图形（正文第 166 页）：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

可以通过四十四次移动变成如下图形：

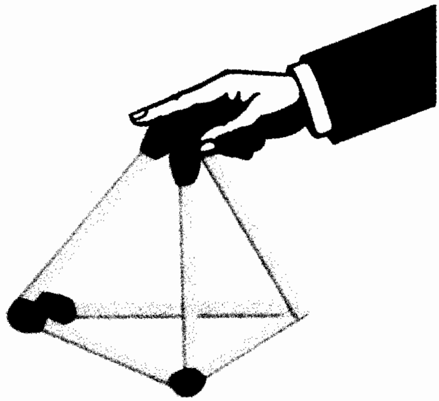
	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

接下来的数字（按照顺序）表明了空格在方块中移动的过程：14，11，12，8，7，6，10，12，8，7，4，3，6，4，7，14，11，15，13，9，12，8，4，10，8，4，14，11，15，13，9，12，4，8，5，4，8，9，13，14，10，6，2，1。

附录 10

火柴问题的解

使用六根长度相等的火柴（正文第 272 页，图 105），我们需要组成四个所有边都相等的三角形。直接的想法是试图在二维（将火柴放在桌面上）内解决这个问题，但那是不可能的。“不落窠臼的”解是在三维空间里构造一个正四面体（如下图所示）。这自动地形成四个等边三角形。



致　谢

作者和出版商非常感谢重印下面这些材料：

艺　术

图 1，3，6～9，12～15，18～25，27，28，30，32，33，35，74～77，79～82，84，87，89，90，92，96，98，100～105，及附录 1 和附录 10 中的图形：由克里斯塔·维尔特提供。

图 2：阿里纳瑞/艺术资源，纽约；乌菲兹美术馆，佛罗伦萨，意大利。

图 4，5，25：由安·菲尔德提供。

图 10a：谦恭的里卡多·维拉-里尔。根据里卡多·维拉-里尔提供的《阿尔罕布拉与格内拉里弗》。

图 10b：M.C.埃舍尔的“对称画 E116（鱼）”，©2004 M. C. 埃舍尔公司，荷兰巴恩。版权所有。

图 11a：伦敦莫里斯公司（1861～1940），威廉·莫里斯，设计师（1834～1896）：《苹果壁纸（蓝色的）》，伦敦，设计于 1877 年。在纸上的彩色木刻，展开有 56.0cm 宽。阿得莱德，南澳大利亚艺术画廊，哈斯勒姆 & 怀特威股份有限公司 2002 年的杰作。

图 11b：伦敦莫里斯公司（1861～1940），威廉·莫里斯，设计师（1834～1896）：《圣詹姆斯壁纸［片断］》，1884，伦敦，设计于 1881 年。在纸上的彩色木刻，长方形 38.5cm×17.0cm。阿得莱德，南澳大利亚艺术画廊，苏格兰大学托伦斯·帕克，阿得莱德 1992 的杰作。

图 16：M.C.埃舍尔的“对称画 E97（狗）”，©2004 M. C. 埃舍尔公司，荷兰巴恩。版权所有。

图 17：谦恭的托马斯 ·M·布朗，NASA 与 ESA。

图 29：©2004 三维立体画公司/www. magiceye. com/。

图 31：©2005 布里吉特·里雷版权所有。

图 34：照片(c)不列颠博物馆。

图 36，39，40，41，43～46，78，83：数学特种图书馆“吉赛贝·皮亚诺”中的“梵多·里特拉蒂”，通过拉劳拉·加布利诺和丽维亚·吉阿卡蒂的帮助。

图 37，42，49，58，62，73：由作者提供。

图 38：B. U. B.，ms. 595，N，7，c. 30v.，《博洛尼亚大学传》

图 47，48，51：谦恭的阿里尔德·斯塔豪格。根据阿里尔德·斯塔豪格提供的《尼尔斯·亨里克·阿贝尔与他的时代：早逝的英才》。

图 50，95：挪威奥斯陆大学数学系，经过了扬格瓦尔·雷切尔特的帮助。

图 52～56，59，68，70～72：布尔-拉-林市政当局，通过菲利普·查普蓝的帮助。图 59：国家档案 F17. 4176。

图 57，61，66，69：法国图书馆学院，依靠诺伯特·威尔德的帮助。

图 60：国立博物馆联合会/艺术资源，纽约；法国巴黎罗浮宫。

图 63：© 巴黎市照片资料博物馆/底片：安德勒阿尼。嘉年华博物馆。

图 64：圣经。巴黎市史，依靠诺伯特·威尔德的帮助。

图 65，106：科学院档案资料，依靠诺伯特·威尔德的帮助。

图 67：巴黎卫生局百年，依靠诺伯特·威尔德的帮助。

图 85，88，93，94：艾略特·汉科斯博士的私人藏品。2004 年 4 月 26 日～5 月 30 日约翰·霍普金斯大学密尔顿·S·爱因斯坦图书馆展出了“著名的和谐：宇宙的四个版本”。

图 86：赛马会博物馆和艺术画廊。

图 97：约翰·彼得克。

图 99：经过福斯曼 & 麦里莱塔的授权而改编。

文　本

附录 5：塔尔塔利亚的诗，经过罗恩·G·奈特雷的许可重印。

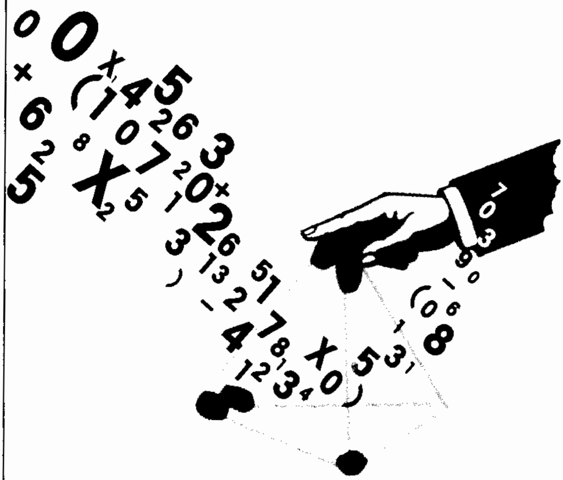
附录 8：伽罗瓦家谱，源自布尔-拉-林市政当局，依靠了菲利普·查普蓝的帮助。

“色动力学”的诗：征得辛迪·施瓦兹的许可重印。

虽然本书作者已经尽了良好而诚实的努力，联系了艺术作品的版权所有者，但是仍有几位作者没能找到。请这些版权所有者与西蒙 & 舒斯特出版公司联系，它的地址是纽约美洲路 1230 号，邮编 NY 10020。

无法解出的方程
——天才与对称

The Equation That Couldn't Be Solved



“马里奥·利维奥以其洞察力和文学技巧讲述了对称性的故事，创作了一本具有可读性与启蒙意义的书。”

——迈克尔·阿蒂亚爵士，1966年菲尔兹奖得主，2004年阿贝尔数学奖得主

“马里奥·利维奥以有趣而浪漫的文笔和戏剧性的历史事件讲述了一个人类发现对称性语言的富有吸引力的故事。对于那些希望理解纯粹数学是如何导出对自然界深刻而有实践意义的洞察的人来说，这是一本好书。”

——伊恩·斯图尔特，《上帝在掷骰子吗？混沌的新数学》的作者，英国沃里克大学数学教授

“马里奥·利维奥做了一件非凡的工作，将两位年纪轻轻就去世的数学天才一生富有吸引力的人文传奇与对称和结构的关键数学思想结合了起来。他清晰而准确地解释了重要的数学概念，使得每位读者都能够理解它们。这是我曾经读过的最好的数学著作之一。”

——阿米尔·D·阿克泽尔，《机会：赌博，爱情，股票市场和几乎其他一切事物的指南》与《费马大定理：解开一个古老数学难题的秘密》两本书的作者

责任编辑/赵龙 吴炜
整体设计/刘苏斌

ISBN 978-7-5357-5161-4
9 787535 751614 >
定价：32.00元