

# 目 录

前言	
绪论	1
§ 1 天体力学的内容和作用	1
§ 2 万有引力定律	4
§ 3 质点和球形物体之间的吸引、位函数	7
§ 4 天体力学中处理问题的方法	11
第一章 二体问题	14
§ 1 二体问题的微分方程和积分	14
§ 2 无摄动运动的轨道分类	22
§ 3 轨道根数	29
§ 4 开普勒方程和它的解法	31
§ 5 计算日心黄道直角坐标的方法	37
§ 6 计算星历表的公式	43
§ 7 二体问题在人造地球卫星运动中的应用	46
§ 8 向大行星发射人造天体的问题	53
§ 9 椭圆运动的级数展开方法概况	54
§ 10 白塞耳函数和它的性质	56
§ 11 用白塞耳函数进行椭圆运动的展开	61
§ 12 超几何级数和它的应用	68
§ 13 直角坐标展为时间的幂级数	78
§ 14 拉格朗日级数和它的应用	81
§ 15 拉格朗日级数的收敛范围,偏心率的极限	85
第二章 轨道计算	93
§ 1 天体观测资料的处理	94
§ 2 高斯方法的基本方程	96

§ 3	扇形和三角形面积之比, 第二次近似	103
§ 4	求轨道根数, 高斯方法的公式总结	111
§ 5	拉普拉斯方法的原理	121
§ 6	计算抛物线轨道的奥耳白尔方法	124
第三章	摄动运动方程	140
§ 1	$N$ 体问题的运动方程和它们的初积分	140
§ 2	用直角坐标表示的摄动运动方程	146
§ 3	正则方程组	150
§ 4	哈密顿正则方程的原则解法, 雅哥比定理	158
§ 5	摄动运动的基本方程	165
§ 6	椭圆轨道的正则共轭常数	171
§ 7	轨道根数为基本变量的摄动运动方程, 瞬时椭圆	178
§ 8	用摄动力三分量表示的摄动运动方程	188
§ 9	正则变换	199
§ 10	正则变换的特例和应用	210
§ 11	德洛勒变量和邦加雷变量	215
第四章	摄动运动方程的分析解法	221
§ 1	摄动运动方程分析解法的原理	221
§ 2	摄动函数展开方法的轮廓	229
§ 3	拉普拉斯系数和它的应用	234
§ 4	纽康算子, 摄动函数展开的基本形式	241
§ 5	长期摄动, 周期摄动和长周期摄动	252
§ 6	关于太阳系的稳定性问题	256
§ 7	限制性三体问题	263
第五章	摄动运动方程的数值解法	274
§ 1	数值方法的原理, 第一科威耳方法	275
§ 2	第二科威耳方法	279
§ 3	龙格-库塔方法	284
§ 4	恩克变换和梯勒变换	287
第六章	地球的自转理论	296

§ 1	地球对外面一质点吸引的力函数 .....	296
§ 2	地球自转的运动方程 .....	301
§ 3	地球的惯性转动,地极移动 .....	309
§ 4	力函数 $U$ 的展开式 .....	315
§ 5	岁差章动基本方程的解 .....	321
§ 6	岁差和章动的系数 .....	328
附录	.....	332
一	习题 .....	332
二	天体力学中常用的天文常数 .....	340
三	用高斯方法计算小行星初轨 .....	351
四	用奥耳白尔方法计算彗星的抛物线初轨 .....	363

# 绪 论

## §1 天体力学的内容和作用

天体力学是天文学的一个分支，是研究天体的运动和形状的学科。

在天体力学中所研究的天体，主要是太阳系中的自然天体和人造天体；所研究的运动，是指天体的力学(机械)运动。关于恒星和星系的运动，是星系动力学所研究的内容。天体的力学运动可以分为两个方面：天体质量中心在空间中的运动(又叫移动)和天体围绕自己质量中心的转动(就是自转)。天体的自转同形状有密切关系，而形状又影响到天体之间的吸引力，因此必须研究天体的形状，才能更好地研究天体的运动。但从整个天体力学的内容来看，研究天体的运动是主要的。

到目前为止，研究天体运动的引力理论仍然是采用牛顿的万有引力定律。虽然在太阳系范围内，已经发现了一些矛盾(如水星近日点移动等)，而用广义相对论可以解释得更好些，但是还没有作最后结论。这是今后还要继续研究的一个重要课题。

天体力学自十七世纪诞生到现在已约三百年了。随着各个历史时期的社会实践的需要，天体力学已逐步发展成为一门内容丰富、应用广泛的学科。根据现代天体力学的研究对象、范围和方法进行划分，天体力学大致可包含下列主要内容。

1. 多体问题又叫做 $N$ 体问题，研究 $N$ 个质点在万有引力作用下的运动规律，是一个动力学问题。这是天体力学的主

要基本理论问题之一。其中二体问题已解决；从三体问题开始，以及加上某些限制条件后形成的限制性三体问题都没有得到解决。具体情况将在第三章中介绍。

在研究方法上，有时直接从 $N$ 体问题的运动方程来研究天体运动的某些性质，这个内容叫做天体力学的定性理论。

2. 摄动理论也是天体力学的主要基本理论问题之一。由于二体问题已解决，根据二体问题理论得到的天体运动轨道，又叫做无摄动轨道，常用来作为天体的第一近似轨道。研究天体的无摄动轨道在各种因素摄动（即干扰）下的变化规律，就叫做摄动理论。使天体偏离无摄动轨道的作用力就叫做摄动力。根据各具体天体的不同特点，又形成各种特殊的摄动理论。例如：大行星运动理论，小行星运动理论，卫星运动理论，月球运动理论等。在这些理论中，都是把天体在各种摄动力影响下的坐标或轨道根数表示为时间的函数，而且展开成近似分析表达式。这样的方法叫做天体力学分析方法，是天体力学研究得最多的内容。

如果用计算机直接从天体的运动方程计算出天体在任何时刻的具体位置，这个内容叫做天体力学数值方法。特别在现代高速电子计算机出现以后，用数值方法解决了大量的天体力学的实际问题。

3. 轨道计算是从天体的观测数据（位置、距离、速度等）按照运动理论来确定天体的轨道根数和有关天体运动的其他基本数据。这是天体力学理论联系实际的重要环节。

4. 历书天文学是根据天体的运动理论和轨道根数以及有关基本天文常数来编制天体的位置表，如天文年历编算和某些特殊天体位置表编算工作等。

5. 天体的形状和自转理论。形状理论主要研究流体在自转时的平衡形状问题；自转理论是研究具有一定形状的流体

或刚体在内外力作用下,自转速度和自转轴方向的变化规律.例如岁差和章动理论就是研究地球自转轴方向的变化规律.

6. 人造天体的运动理论是现代天体力学的主要内容之一.根据不同的研究对象,又分为人造地球卫星运动理论,月球火箭运动理论和行星际火箭运动理论.由于星际航行事业的迅速发展,已形成一门新的学科——星际航行动力学(Astrodynamics),人造天体的运动理论是它的一个部门.

以上是天体力学的主要内容,特别是五十年代以后,由于星际航行事业的实现和现代高速电子计算机的广泛应用,天体力学发展得更快了.天体力学也将同其他科学部门一样,在我国的阶级斗争,生产斗争和科学实验三项伟大革命实践中,发挥应有的作用.

星际航行也是阶级斗争的一种工具.两个超级大国大力发展星际航行事业,就是为它们侵略性的全球战略服务的.现在天上飞行的人造地球卫星,有很多是作侦察的间谍卫星,还有的是试验性卫星武器,至于秘密军事卫星就更多.我们必须针锋相对,利用星际航行这种工具,同它们进行斗争.在这个斗争中,天体力学工作者可以做出一定的贡献.

其次,精确掌握太阳系自然天体和人造天体的运动规律,可以为飞机、海船和远程导弹的导航服务;也是大地测量和研究地球形状及内部结构的基础.

另外,天体力学为科学实验服务是非常明显的.例如天体的起源和演化问题,是自然科学的基本问题之一,特别是地球和太阳系的起源和演化问题,对很多地球科学有用.而掌握太阳系天体的力学运动规律,是研究太阳系起源和演化的必要条件.人造天体出现以后,利用人造天体作为观测工具,可以促进科学实验更迅速地发展,同时也为天体力学发展成实验学科创造了条件.

我国天体力学工作在解放前几乎是空白。解放后，在毛主席革命路线指引下，根据我国社会主义革命和建设的需要，逐步开展天体力学的研究工作。例如，我国在解放前没有出版过天文年历。1951年开始，根据外国年历的资料，按照我国的需要出版了天文年历。从1957年开始进行独立编算天文年历的研究工作。1958年以后，在三面红旗指引下，紫金山天文台历算组的同志们，发扬自力更生、奋发图强的革命精神，在兄弟单位协作下，终于在1966年完成了天文年历的试算工作，达到了国际先进水平。从1970年开始，我国自己独立编算的《中国天文年历》正式出版了。这标志着我国依赖外国使用“洋历”的历史宣告结束。这是在毛主席革命路线的指引下我国天体力学工作取得的重要成果。另外，1958年开始进行的人造天体运动理论工作，也取得了重大成绩，为我国人造地球卫星胜利发射成功，做出了贡献。关于小行星的运动方面的研究工作，也做了很多。天体力学基本理论研究工作也有所发展。到目前为止，我国各天文单位和其它不少部门都在进行天体力学的研究工作。

目前，我国的天体力学工作还是比较落后的。我们深信，今后我国的天体力学工作者在毛主席的无产阶级革命路线指引下，在华主席为首的党中央领导下，一定会加倍努力，一定会在不久的将来，使我国的天体力学工作赶上和超过国际先进水平，更好地为我国社会主义革命和建设事业服务。

## § 2 万有引力定律

万有引力定律是天体力学的理论根据，它是根据多年的大量观测实践总结出来的。

早在十七世纪以前，随着生产力的发展，观测仪器得到

改进，对行星的位置观测已能准到1'左右。开普勒（Kepler）根据前人对火星和太阳的几十年观测资料进行研究，肯定了旧的地心学说是完全错误的；但用哥白尼的日心学说（其中假定行星轨道为圆形）仍然不能完全解释理论值同观测值之间还有不小的偏差（10'左右）。这样的偏差不可能是观测误差，开普勒开始对圆形轨道产生怀疑，并亲自对火星、太阳和其他行星作了十几年的观测研究。终于在1609—1619年先后归纳出大家所熟悉的行星运动三大定律：

第一定律：行星绕太阳运动的轨道是椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上。

第二定律：行星在椭圆轨道上运动时，向径扫过的面积与经过的时间成正比。

第三定律：行星绕太阳公转的恒星周期的平方，与行星轨道椭圆半长径的立方成正比。

这就是大家公认的开普勒三大定律。这三个定律在当时是最深刻地揭示了行星运动的规律，即使到现在，在很多近似讨论中也还要用到。用开普勒三大定律已能解释当时所知的行星运动现象，行星位置的理论值和观测值之差已降到1'—2'，符合当时的观测水平。但是，开普勒三大定律只是对行星运动规律的一种描述，是人们对行星运动的感性认识（视运动）到理性认识的一个阶段。认识还有待进一步深化。

随着力学概念的出现，在牛顿以前就有人提出了行星绕太阳运动的原因是太阳引力的看法，但是没有给出具体结果。望远镜的发明，又为提高行星位置观测精度创造了条件。直到1685年，牛顿利用当时的力学发展成果，对开普勒三大定律作了深入分析研究后，才正式提出了万有引力定律：

宇宙间任意两个质点都是互相吸引，引力的大小与它们的质量乘积成正比，与它们之间的距离平方成反比。



如用公式表达,设  $m, M$  为两质点的质量,  $r$  为它们之间的距离,则它们之间的引力大小  $F$  可表为:

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

其中  $G$  是比例常数,叫做万有引力常数。

用现代的力学和高等数学知识,很容易从开普勒三大定律把万有引力定律推导出来。这个推导过程在一般的理论力学书中都有,这里不再重述。牛顿从开普勒三大定律归纳出(1)式后,又用月球运动和地面重力加速度作为验证,结果都能满足,故命名为“万有”(即普遍的意思)引力定律。

反过来,用(1)式可以推导出开普勒三大定律,只是第三定律需要修正,具体结果参看第一章。

万有引力定律的发现,使人们对行星和太阳系其它天体运动规律的认识进一步深化。从此以后,天体力学才正式诞生。但是,认识并没有终止,关于万有引力的本质问题,万有引力定律是否可靠问题,都还在继续研究中。虽然自本世纪以来已有很多成果,但对太阳系这个范围来说,目前还没有修改万有引力定律的充分根据。待观测水平进一步提高后,理论同观测结果的矛盾将会更明显地暴露出来,天体的运动理论必然会进一步发展。

在天体力学中,当采用不同的单位时,万有引力常数有不同的数值。在讨论行星、小行星、彗星等天体运动时,常用天文单位作长度单位,太阳质量作质量单位,平太阳日作为时间单位,此时取

$$G = k^2, \quad k = 0.01720209895 \dots,$$

其中  $k$  又叫做高斯常数 (Gauss Constant)。有时为了理论上讨论的方便,把时间单位改为:

$$58.132441 \text{ (即 } 1/k \text{) 平太阳日,}$$

此时万有引力常数  $G = 1$ .

在讨论人造地球卫星的运动时,常取地球赤道半径(6378.160 公里)作为长度单位,地球质量作质量单位,806.813 秒作时间单位,此时相应的万有引力常数  $G = 1$ . 如时间以分钟作单位,则  $G = 0.0743667$ .

### § 3 质点和球形物体之间的吸引、位函数

万有引力定律是讨论质点之间的吸引,而天体一般不是质点,是具有不同大小和形状的对象,故不能直接用万有引力定律来讨论. 因此,在讨论天体的运动以前,首先要弄清在什么情况下,天体可以看作质点. 现在就来讨论这个问题.

1. 天体可以看作无穷多个质点组合而成,故天体对外面一质点  $P$  的引力,可以看作这些质点对  $P$  点引力的总和. 由于引力是向量,求和比较复杂,下面用位函数来讨论.

先讨论  $n$  个质点  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  对另一个质点  $P$  的引力. 设  $m, m_i$  为质点  $P, P_i$  的质量;  $(x, y, z), (x_i, y_i, z_i)$  为质点  $P, P_i$  在某惯性直角坐标系  $O-XYZ$  中的坐标;则距离

$$\overline{PP_i} = r_i, r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2, \quad (2)$$

$P_i$  点对  $P$  点的引力大小为

$$G \frac{mm_i}{r_i^2},$$

方向是  $\mathbf{PP}_i$  (黑体字表示向量), 而  $\mathbf{PP}_i$  对于三个坐标轴的方向余弦为

$$\frac{x_i - x}{r_i}, \quad \frac{y_i - y}{r_i}, \quad \frac{z_i - z}{r_i}.$$

但由 (2) 式对  $x, y, z$  取偏导数可得

$$\frac{x_i - x}{r_i} = -\frac{\partial r_i}{\partial x}, \quad \frac{y_i - y}{r_i} = -\frac{\partial r_i}{\partial y}, \quad \frac{z_i - z}{r_i} = -\frac{\partial r_i}{\partial z}$$

再设  $X, Y, Z$  为  $P$  点的由  $P_1, P_2, \dots, P_n$  点的引力所产生的加速度分量, 则根据牛顿第二运动定律可得:

$$\begin{aligned} mX &= - \sum_{i=1}^n G \frac{mm_i}{r_i^2} \frac{\partial r_i}{\partial x} = m \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Gm_i}{r_i} \right) \\ &= m \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \end{aligned}$$

亦即

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从(3)式可看出, 万有引力存在位函数, 记为

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{r_i}, \quad (4)$$

则

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (5)$$

由(4)式可以看出, 位函数只同距离  $r_i$  的大小有关, 同坐标系的选择无关. 在讨论各种类型的天体对外面一质点的吸引时, 只要找出了位函数  $V$ , 就可以从(5)式写出引力加速度的分量  $X, Y, Z$ .

2. 现在讨论一个密度均匀的球壳(厚度为无限小)对外面

一质点  $P$  的吸引, 如图 1. 设球壳半径为  $a$ , 中心为  $O$  点;  $OP = r$ , 在球壳上任一点  $A$  处取一宽度为无限小的圆环, 环面垂直于  $OP$ , 则此圆环中心  $D$  点在直线  $OP$  上. 令  $OA$  同  $OP$  的交角为  $\theta$ ; 圆环宽度对应于球心的张角为  $d\theta$ , 则圆环宽

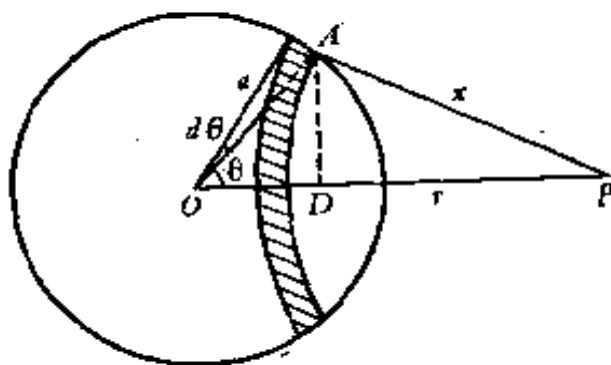


图 1

度为  $a d\theta$ . 再设球壳的面密度为  $\sigma$  (常量). 由于环面垂直于  $OP$ , 故环上各点同  $P$  点的距离相等, 设为  $x$ . 先来讨论此圆环对  $P$  点吸引的位函数.

由于位函数只同质量和距离大小有关, 故把圆环分为任意多个质点后, 因各点同  $P$  点的距离都是  $x$ , 故从(4)式可得圆环对  $P$  点的位函数(记为  $dV$ )为

$$dV = \frac{G m_{\theta}}{x},$$

其中  $m_{\theta}$  为圆环的质量. 而圆环的面积是  $2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ , 由此可得

$$dV = 2\pi\sigma G a^2 \sin \theta \frac{d\theta}{x}.$$

整个球壳可以分为无穷多个垂直于  $OP$  的这样圆环, 因此整个球壳对  $P$  点吸引的位函数  $V$  就是这些圆环对  $P$  点的位函数的总和, 即

$$V = \int_0^\pi 2\pi\sigma G a^2 \sin\theta \frac{d\theta}{x} = 2\pi\sigma G a^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{x}$$

但由图 1 中三角形  $OAP$  可得

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta,$$

用它把积分变量变为  $x$  可得

$$V = 2\pi\sigma G \frac{a}{r} \int_{x_1}^{x_2} dx = 2\pi\sigma G \frac{a}{r} (x_2 - x_1).$$

其中  $x_1, x_2$  为  $\theta = 0, \pi$  时  $x$  的值, 由图 1 可看出  $x_1 = r - a, x_2 = r + a$ , 于是可知

$$V = 4\pi a^2 \sigma G / r.$$

可是整个球壳的质量  $M = 4\pi a^2 \sigma$ , 因此

$$V = \frac{GM}{r}. \quad (6)$$

(6)式表明, 此球壳对  $P$  点的位函数, 等于球壳总质量集中在中心处时对  $P$  的位函数. 也就是说, 如果天体是密度均匀的球壳, 则讨论它对外面一质点的吸引时, 可以看做是位于中心处的一个质点, 此质点的质量等于球壳的总质量.

3. 上述密度均匀的球壳状的天体并不存在. 如果天体的等密度面为同心球面, 则每个等密度面就是上述的密度均匀的球壳. 容易看出, 只要密度函数(这里是半径的函数)是可积的, 在讨论这样的天体对外面一质点  $P$  的吸引时是可以看做质点的. 由于天体内部重力作用, 如果形成球状的天体, 而且等密度面为同心球, 则密度函数一般应为单调函数, 即愈接近中心的密度愈大, 这样的函数是可积的.

在太阳系内的大天体(太阳、大行星、大卫星)比较接近这种情况, 它们的形状和等密度面都是接近于球形, 因此在讨论它们的运动时, 一般都可以看成质点. 但对于讨论距离很近的天体运动时(例如讨论人造地球卫星在地球引力场内的运

动),位函数不能用(6)式,需要根据所要求的精度,增加改正项,作为形状摄动改正. 在第六章中将给出地球位函数的较准确公式.

#### § 4 天体力学中处理问题的方法

天体力学主要讨论的是天体的运动,由于影响天体运动的因素很多,需要根据所讨论天体的情况给予正确处理,才能逐步建立符合实际情况的运动理论. 否则,不是无从下手,就是要走很多弯路,甚至得到错误的结果.

1. 首先要分析影响所讨论天体运动的力,找出其中起主要作用的力,以及影响较大的摄动力. 例如讨论行星运动时,起主要作用的是太阳同所讨论那个行星之间的万有引力;其次是行星之间的万有引力,而行星之间的万有引力也有很大差别,一般首先考虑质量大距离近的行星同所讨论行星之间的万有引力. 又如讨论人造地球卫星的运动时,起主要作用的是地球作为质点(总质量集中于地心)对卫星的万有引力;其次是由于地球不是质点产生的影响(即形状摄动,也是万有引力). 但卫星在发射阶段时,火箭推力的作用更大;卫星在离地面五百公里以下运动时,大气阻力很大,当卫星在高空(一千公里以上)运动时,大气阻力很小,而太阳光压力和日月引力逐渐增大. 因此,必须根据天体的实际情况进行分析,才能准确可靠. 另外还要根据所要求的精确程度,决定哪些影响很小的力可以略去.

2. 确定了应该考虑的几种力后,就根据动力学原理,建立所讨论天体的运动方程(在天体力学中,一般是根据牛顿第二定律或分析动力学原理). 这些方程几乎都是常微分方程组,有时根据不同需要,还要把方程组变换成不同的形式.

3. 解运动方程. 首先要看方程组是否能全部积分, 如能全部积分, 则问题容易解决. 一般情况下是不能完全积出来的, 这就要根据需要的情况采用不同的方法来解. 如果需要天体的具体位置, 而且经历的时间间隔不长 (相对于天体轨道周期), 则直接用计算机从运动方程算出所需数据, 这种方法就是数值方法. 如果时间间隔较长, 用数值方法计算的结果误差太大, 可以用分析方法把运动方程的变量表为时间的近似分析表达式, 一般是级数形式, 用它们可以算出不同时刻的有关数据. 如果不是需要具体数据, 而是要了解天体运动轨道的某些性质, 则可直接从运动方程用定性方法讨论. 当然, 有些性质也可以从分析表达式讨论.

4. 实践, 认识, 再实践, 再认识, 逐步完善天体的运动理论. 天体力学的实践有两个方面内容: 一是把天体力学的理论 (主要是掌握天体的运动规律) 直接用于阶级斗争和生产斗争的实践活动, 例如定时间和季节、导航、大地测量、卫星通讯、对付敌人的间谍卫星和卫星式武器等; 二是测定天体位置 (包括测距、测定速度等) 的观测工作本身, 即科学实验.

天体力学中已有的各种理论和方法, 都是从实践中逐步归纳总结出来的, 并且多次经过实践检验, 不断深化和完善的. 万有引力定律出现以后, 到现在将近三百年, 经过长期的考验和改进, 天体力学已有一套较成熟的研究方法, 当然也还存在不少矛盾和未解决的问题. 在本书中, 主要介绍天体力学中比较成熟的, 而现在还在广泛应用的基本理论.

在研究某一天体的运动时, 首先把它看成一个质点, 而且先只讨论另一个起主要作用的天体 (也看成质点) 对它的引力. 例如讨论行星或彗星的运动时, 先讨论太阳对它的引力; 讨论某卫星的运动时, 先讨论它所在的行星的引力. 这样就

把所讨论的天体运动简化为一个二体问题, 得到的轨道为无

摄动轨道。这是讨论天体运动的第一次近似理论，尽管是近似的，但抓住了影响天体运动的主要因素，所得的结果也是基本的。第二步是讨论各种摄动因素对天体的无摄动轨道的影响。由于摄动因素的数量和每种因素的精确程度都是无限的，因而要根据实践要求确定摄动因素的取舍，然后再建立此天体的运动方程，并解出运动方程。解出的结果再用天体的观测值来检验，如偏差是不可容许的，则必须再进行改进（增加摄动因素或更精确考虑某些摄动因素），直到理论结果符合观测结果（或其他实践要求）为止。可是随着生产力的不断发展，观测技术在不断提高。故到一定的历史阶段，新的更精确的观测结果又会向天体的运动理论提出改进的要求；阶级斗争和生产斗争实践也会向天体力学提出新的任务。这样就促使天体的运动理论不断发展和完善。



## 第一章 二体问题

从行星运动的实际情况表明,太阳的吸引是起主要作用.现在首先抓住行星运动的这个主要原因,把讨论某一行星的运动问题,简化和抽象为讨论两个质点在万有引力作用下的一个动力学问题,即二体问题.这是行星和太阳系其它天体(包括人造天体)运动理论的第一次近似结果,也是进一步讨论太阳系天体更精确的运动理论的基础.任何天体力学工作者都必须熟练掌握这个内容.本章可分为三部份:从§1—§6主要讨论二体问题的基本理论和计算天体坐标的公式;§7—§8是介绍二体问题在星际航行中的一些应用;§9—§15是讲述椭圆运动的展开式,这是进一步精确研究天体运动中经常用到的内容.

### §1 二体问题的微分方程和积分

现在设  $P, S$  表示行星和太阳,都看成质点,质量分别记为  $m, M$ . 令  $P, S$  间的距离为  $r$ , 并规定  $\overrightarrow{SP} = \mathbf{r}$ . 根据万有引力定律,  $S$  和  $P$  之间的引力大小为  $GmM/r^2$ , 但它们所受的力的方向相反. 设  $\mathbf{F}$  为作用于  $P$  的力, 则  $\mathbf{F}$  沿  $PS$  方向, 即  $\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ . 同样, 作用于  $S$  的力为  $-\mathbf{F}$ . 再设  $\mathbf{a}, \mathbf{a}_0$  为  $P, S$  在万有引力作用下产生的加速度, 则根据牛顿第二定律可知

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad -\mathbf{F} = M\mathbf{a}_0.$$

由此可得

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{Gm}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.1)$$

但牛顿第二定律只适用于惯性坐标系, 故(1.1)式即为  $P$  和  $S$  在某惯性坐标系内的运动方程. 由于需要讨论行星  $P$  相对于太阳  $S$  的运动, 必须把坐标原点取为  $S$  点. 因  $S$  具有加速度  $\mathbf{a}_0$ , 即这样的坐标系为非惯性系, 故不能直接用牛顿第二定律列出  $P$  相对于  $S$  的运动方程. 可是, 如果设  $\mathbf{a}'$  为  $P$  相对于  $S$  的加速度, 从加速度的关系可得

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 = -G \frac{m+M}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.2)$$

(1.2) 式即为  $P$  相对于  $S$  的运动方程.

设以  $S$  为原点的直角坐标系为  $S-XYZ$ ,  $P$  点的坐标为  $(x, y, z)$ . 则有

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{a}' = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^D.$$

则(1.2)即为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{G(m+M)}{r^3} x = -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

其中

$$\mu = G(m+M), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.4)$$

(1.3) 式就是在直角坐标系中的二体问题的微分方程, 其中  $\mu$  为常数. (1.3) 式是一个六阶非线性常微分方程组, 如要完全解出, 必须找出包含有六个相互独立积分常数的积分或解. 下面就进行讨论.

在理论力学中可知, 行星是在有心力作用下运动, 故有关

1) 为符号简单起见, 对时间  $t$  的一、二次微商都用加点表示, 如  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \text{ 等.}$$

有心力的结果都能应用。

在有心力作用下的运动都是平面运动，很容易从运动方程(1.3)予以证实。从(1.3)式的后两式可得

$$y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0,$$

即

$$\frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = 0,$$

积分可得

$$y\dot{z} - z\dot{y} = A. \quad (1.5)$$

其中  $A$  为积分常数。同理可得另外两个积分为

$$z\dot{x} - x\dot{z} = B, \quad (1.6)$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C. \quad (1.7)$$

其中  $B, C$  都是积分常数。

(1.5)、(1.6)、(1.7)式就是运动方程(1.3)式的三个积分，包含了三个相互独立的积分常数  $A, B, C$ 。

用  $x, y, z$  分别乘(1.5)、(1.6)、(1.7)式相加，即得

$$Ax + By + Cz = 0. \quad (1.8)$$

这是一个通过原点(太阳)的平面方程，而  $(x, y, z)$  为行星  $P$  的坐标，这表明行星的运动轨道始终在通过太阳的一个平面上。

积分常数  $A, B, C$  在天体运动轨道中有实际意义。从(1.8)式知，若令

$$h = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad (1.9)$$

则轨道平面法线的方向余弦为

$$A/h, \quad B/h, \quad C/h. \quad (1.10)$$

如采用日心黄道坐标系，取坐标面  $XY$  为黄道面， $X$  轴指向春分点方向， $Z$  轴指向黄道北极方向。在天球坐标系图 2 中， $S$  为天球中心，大圆  $XY$  为黄道， $Y$  点的黄经为  $90^\circ$ ；大圆  $NAQ$  为行星轨道面在天球上的截线； $N$  为升交点（即行星沿  $NAQ$  方向运动）； $C'$  为  $NAQ$  的极（靠近  $Z$  的那个极）。

则图上的  $i$  是行星轨道对黄道的倾角  $Q = \angle XN$ , 是升交点黄经.  $SC'$  就是行星轨道平面的法线方向, 它的方向余弦 (对于此坐标系) 为

$$\cos C'X, \cos C'Y, \cos C'Z.$$

但从直角球面三角形  $C'XN$ ,  $C'YN$  容易求出

$$\cos C'X = \sin Q \sin i,$$

$$\cos C'Y = -\cos Q \sin i.$$

而  $C'Z = i$ , 即  $\cos C'Z = \cos i$ , 故同(1.10)式比较可知

$$A = h \sin Q \sin i, B = -h \cos Q \sin i, C = h \cos i. \quad (1.11)$$

其中  $Q, i$  的意义很清楚,  $h$  的意义后面再谈.

行星运动的速度  $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , 积分(1.5)、(1.6)、(1.7)式的左端的量实际上是向量  $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$  的三个分量. 因此, 上述三个积分表明, 行星绕太阳运动的动量矩  $m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$  为常量, 为动量矩守恒原理的体现. 故积分(1.5)、(1.6)、(1.7)式又叫做动量矩积分.

上面已讨论了行星轨道平面在黄道坐标系中的方位, 下面就讨论行星在轨道平面上的运动. 取轨道平面作为参考坐标系的  $XY$  平面 (原点不变), 则行星相对于太阳的运动方程(1.3)简化为

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}. \quad (1.12)$$

积分(1.5)、(1.6)、(1.7)式简化为一个 (相当于  $i=0, C=h$ )

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h. \quad (1.13)$$

显然(1.13)式就是(1.12)式的一个积分, 只是积分常数明确为  $h$ . (1.12)式是四阶方程组, 若要完全解出, 除(1.13)式外还

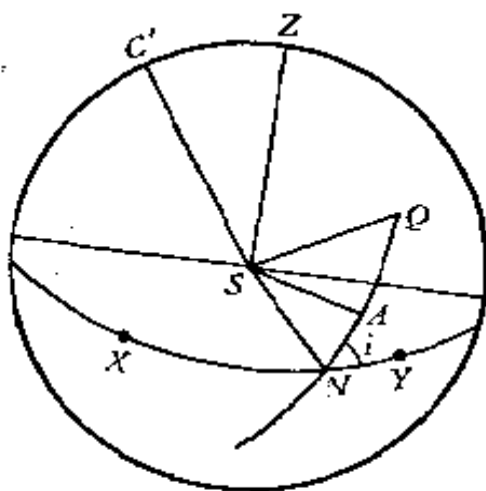


图 2

要求出包含另外相互独立的三个积分常数的积分。用极坐标讨论更方便,取

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (1.14)$$

则(1.12)式可变换为

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}, \quad (1.15)$$

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0; \quad (1.16)$$

(1.13)式变换为

$$r^2\dot{\theta} = h, \quad (1.17)$$

显然(1.17)式就是(1.16)式的积分,只是积分常数明确为 $h$ 。但 $r^2\dot{\theta}$ 就是行星向径所扫过的面积速度(在理论力学中有证明)的两倍,这就是 $h$ 的具体意义。这样也说明了积分(1.5)、(1.6)、(1.7)式为面积速度(两倍)在三个坐标面上的投影。故也可叫做面积积分。

现在就来解(1.15)、(1.17)式。它们是三阶常微分方程组,需要找出包含三个独立积分常数的积分或解。由于自变量为时间 $t$ ,而以前求出的三个积分都不显含 $t$ ,故以后要找出的积分或解中,至少要有有一个显含 $t$ ,才能把变量(坐标 $x, y, z$ 或 $r, \theta$ 和速度)解出表示成时间的函数。

在理论力学中讨论有心力的运动时,已解过这种方程组。令 $u = 1/r$ ,则(1.17)式成为

$$\dot{\theta} = hu^2,$$

并且

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u} \right) \dot{\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \cdot hu^2 = -h \frac{du}{d\theta},$$

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{d\theta} \left( \frac{du}{d\theta} \right) \dot{\theta} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2},$$

代入(1.15)式可得

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (1.18)$$

(1.18)式是 $u$ 对于自变量 $\theta$ 的一个二阶线性方程,它的通解就是

$$u = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \omega)], \quad (1.19)$$

或

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (1.20)$$

其中 $e, \omega$ 为新的积分常数,而且 $e \geq 0$ .

(1.20)式就是轨道方程,从解析几何学得知,它是以原点为焦点的圆锥曲线方程: $e$ 为偏心率; $h^2/\mu$ 为半通径,习惯上用 $p = a(1 - e^2)$ 表示,即

$$p = h^2/\mu \text{ 或 } h^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2). \quad (1.21)$$

到此为止,已经得到了包含五个独立积分常数 $h, i, Q,$ (即 $A, B, C$ ), $e, \omega$ 的积分和解:(1.5)、(1.6)、(1.7)、(1.20)式.其中 $\omega$ 的意义在后面再讲.从(1.21)式可知, $h$ 也可以用 $p$ 或 $a$ 来代替.从这五个积分已看出二体问题的某些结论:轨道在一个平面上,而且是以太阳(原点)为焦点的圆锥曲线;行星向径扫过的面积速度为常数( $h/2$ ).这里面已包含了开普勒第一和第二定律,但比开普勒定律更广泛,因为椭圆是圆锥曲线的一种特殊情况.

由于二体问题的微分方程为六阶,故还差一个包含新积分常数的积分或解.已经找出的积分和解都不显含时间 $t$ ,因此剩下的一个必须显含 $t$ .从(1.17)式可得

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2},$$

里面的  $r$  可以利用(1.19)式表为  $\theta$  的函数,因而可以积分,并显含  $t$ . 但是这个积分很复杂,不便于应用. 如用  $\dot{r}$  的关系式来积分,则要用到有些量的大小和符号关系,根据椭圆、双曲线和抛物线的不同情况,有不同的形式. 这个积分在 § 2 中再讲.

还有一些不同形式的积分,由于它们的积分常数都同前面已知的五个积分常数有函数关系,故不是独立的. 但是在很多地方要用到它们,在这里也介绍一下.

(1.3)式的后两式分别乘以  $B, C$  再相减得

$$C\dot{y} - B\dot{z} = \frac{\mu}{r^3}(Bz - Cy).$$

右端的  $B, C$  用(1.6)、(1.7)式代入得

$$\begin{aligned} C\dot{y} - B\dot{z} &= \frac{\mu}{r^3} [(zx - xz)z - (xy - yx)y] \\ &= \frac{\mu}{r^3} [(x^2 + y^2 + z^2)\dot{x} - (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})x] \\ &= \frac{\mu}{r^3} \{r^2\dot{x} - r\dot{r}x\} = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{r} \right). \end{aligned}$$

因此可以积分,即

$$\left. \begin{aligned} C\dot{y} - B\dot{z} &= \frac{\mu x}{r} - F_1, \\ B\dot{z} - C\dot{y} + \frac{\mu x}{r} &= F_1, \\ C\dot{x} - A\dot{z} + \frac{\mu y}{r} &= F_2, \\ A\dot{y} - B\dot{x} + \frac{\mu z}{r} &= F_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

其中  $F_1, F_2, F_3$  是积分常数,但不是独立的,可以用前面所得

的五个积分常数表示出来。至于具体的关系式，读者可自行找出。(1.22)式又叫做拉普拉斯积分。

另外，用极坐标表示速度  $v$  得

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2,$$

则 
$$\frac{dv^2}{dt} = 2\dot{r}\ddot{r} + 2r\dot{r}\ddot{\theta}^2 + 2r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}. \quad (1.23)$$

但以  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  分别乘 (1.15)、(1.16) 式再相加得

$$r\ddot{r} + r\dot{r}\ddot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{\mu}{r^2}\dot{r}.$$

代入上式得

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\dot{r}.$$

此式可积分为

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + L, \quad (1.24)$$

其中  $L$  为积分常数。以轨道上任意一点的  $v$  和  $r$  代入 (1.24) 式，所得的  $L$  应该是相同的值。现在取通径端点，则  $r = p$ ,  $\theta - \omega = 90^\circ$ ，相应的

$$\dot{\theta} = hu^2 = h/p^2, \quad (r\dot{\theta})^2 = r^2\dot{\theta}^2 = h^2/p^2 = \mu/p.$$

再从 (1.20) 式可得

$$\frac{dr}{d\theta} = pe, \quad \text{故} \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{he}{p},$$

$$\dot{r}^2 = h^2e^2/p^2 = \mu e^2/p.$$

代入 (1.24) 可得

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu e^2}{p} + \frac{\mu}{p} \right) = \frac{\mu}{p} + L,$$

则

$$L = \frac{\mu}{2} \frac{e^2 - 1}{p} = -\frac{\mu}{2a}.$$



因此 (1.24) 式成为

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (1.25)$$

上面已说明 (1.24) 式的积分常数不是独立的，而常用的是 (1.25) 式的形式，而且应用很广，叫做活力积分或活力公式。

## § 2 无摄动运动的轨道分类

上节已得到二体问题的基本结果，相对运动轨道为以原点为焦点的圆锥曲线，方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (1.26)$$

其中

$$p = a(1 - e^2) = h^2/\mu. \quad (1.27)$$

从解析几何可知，圆锥曲线可按照偏心率的大小来分类。上节已指明  $e \geq 0$ 。

当  $e < 1$  时，曲线为椭圆。由于  $p \geq 0$ ，故从 (1.27) 式可知， $a \geq 0$ ，此时  $a$  叫做椭圆的半长径。当  $e = 0$  时，曲线为圆，是椭圆的特例，此时  $a$  就是圆的半径。

当  $e = 1$  时，曲线为抛物线。而在一般情况下  $h$  为有限值，故  $p$  也是有限量，因此从 (1.27) 式可知，此时  $a$  应为无穷大。

当  $e > 1$  时，曲线为双曲线。从 (1.27) 式可知  $a$  应为负值。

由上可知，轨道曲线也可以按照  $a$  的大小来分类。如用速度大小  $v$  作标准，则力学意义更清楚。用活力公式 (1.25) 可知

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (1.28)$$

设行星在同太阳的距离为  $r$  处运动, 若轨道为圆, 则  $r = a$ , 相应的速度记为  $v_c$ , 则由 (1.28) 式可知

$$v_c^2 = \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{a}, \quad (1.29)$$

$v_c$  就叫做在距离  $r$  处的圆形轨道速度.

若轨道为抛物线时,  $a$  为无穷大, 此时的速度记为  $v_p$ , 则由 (1.28) 式知

$$v_p^2 = \frac{2\mu}{r} = 2v_c^2, \quad \text{即} \quad v_p = \sqrt{2}v_c, \quad (1.30)$$

$v_p$  就叫做在距离  $r$  处的抛物线速度. 由于沿抛物线轨道运动就不返回, 故  $v_p$  又叫做逃逸速度.

若轨道为椭圆,  $a > 0$ , 由 (1.28) 式知此时

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{1}{a} < \frac{2\mu}{r} = v_p^2;$$

若轨道为双曲线时,  $a < 0$ , 则此时

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{1}{a} > \frac{2\mu}{r} = v_p^2.$$

反过来也成立. 因此, 用在任一距离  $r$  处的  $v$  值也可以区分轨道类型. 当  $v < v_p$  时, 轨道为椭圆; 当  $v = v_p$  时, 轨道为抛物线;  $v > v_p$  时, 轨道为双曲线, 下面就分别这三种轨道类型来求出二体问题的最后一个积分.

1. 若行星轨道为椭圆, 是周期运动, (1.27) 式中的  $h$  可用运动周期  $T$  来表示. 因在整周期  $T$  时间内, 行星向径扫过的面积就是椭圆面积  $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ , 由此可得

$$h = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}.$$

代入 (1.27) 式得

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{G(m + M)}{4\pi^2}, \quad (1.31)$$

这是行星的椭圆轨道半长径同周期之间的关系。按照开普勒第三定律， $a^3/T^2$  对所有行星都是同一数值。但 (1.31) 左右端含有行星质量  $m$ ，各行星  $m$  值不相等。从观测表明，(1.31) 式是正确的，因而 (1.31) 式就是用万有引力定律得到的修正了的开普勒第三定律。由于行星质量  $m$  比太阳质量  $M$  小得多（小于 0.001），这样的偏差在当时的观测技术水平很难发现。

现在求出最后一个积分。由公式 (1.17) 和 (1.25) 得

$$r^2\dot{\theta} = h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \quad (1.32)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (1.33)$$

从这两式消去  $\dot{\theta}$  可得

$$\dot{r}^2 + \frac{\mu a(1 - e^2)}{r^2} = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

即

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu}{r^2 a} [a^2 e^2 - (a - r)^2]. \quad (1.34)$$

由于椭圆轨道是周期运动，用  $n$  表示平均角速度，即

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.35)$$

故 (1.31) 式可化为

$$n^2 a^3 = \mu. \quad (1.36)$$

代入 (1.34) 式消去其中的  $\mu$  得

$$\dot{r}^2 = \frac{n^2 a^2}{r^2} [a^2 e^2 - (a - r)^2],$$

即

$$n dt = \frac{r dr}{a \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}} \quad (1.37)$$

对于椭圆轨道有  $|a - r| \leq ae$ ，故可引入辅助量  $E$  为

$$\left. \begin{aligned} \text{或} \quad a - r &= ae \cos E, \\ r &= a(1 - e \cos E). \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

代人(1.37)式得

$$ndt = (1 - e \cos E)dE,$$

容易积分出来,即

$$E - e \sin E = nt + M_0,$$

或记为

$$= n(t - \tau). \quad (1.39)$$

这就是对应于椭圆轨道情况的最后一个积分,其中积分常数为 $M_0$ 或 $\tau$ .如用 $\tau$ ,意义很明确,当 $t = \tau$ 时,从(1.39)式知相应的 $E = 0$ ,而由(1.38)式知,此时 $r$ 为最小值,即行星在近日点.由此可知, $\tau$ 即为行星过近日点时刻.关于 $M_0$ 的意义以后再讲.

2. 若轨道为抛物线,则 $e = 1$ ,轨道方程成为

$$r = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \omega)}. \quad (1.40)$$

因 $\omega$ 为常数,故若令

$$f = \theta - \omega, \quad \text{则} \quad f = \theta, \quad (1.41)$$

(1.40)式即成为

$$r = \frac{p}{1 + \cos f}. \quad (1.42)$$

从(1.42)式可知,当 $f = 0$ 时, $r$ 为最小,即行星在近日点,相应的近日距离记为 $q$ (参看图3).则由(1.42)式可知

$$q = \frac{p}{2}$$

或

$$p = 2q.$$

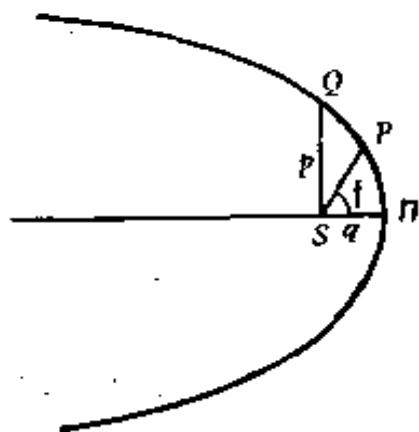


图 3

因而(1.42)式可改为

$$r = \frac{2q}{1 + \cos f} = q \sec^2 \frac{f}{2}. \quad (1.43)$$

相应的面积积分(1.32)式可化为

$$r^2 \dot{\theta} = r^2 \dot{f} = h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{2\mu q}, \quad (1.44)$$

以(1.43)式代入得

$$\sec^4 \frac{f}{2} df = \sqrt{2\mu} q^{-\frac{1}{2}} dt,$$

积分即得

$$2 \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = \sqrt{2\mu} q^{-\frac{1}{2}} (t - \tau). \quad (1.45)$$

这就是对应于抛物线轨道情况的最后一个积分，积分常数为  $\tau$ ，显然它也是行星过近日点的时刻。

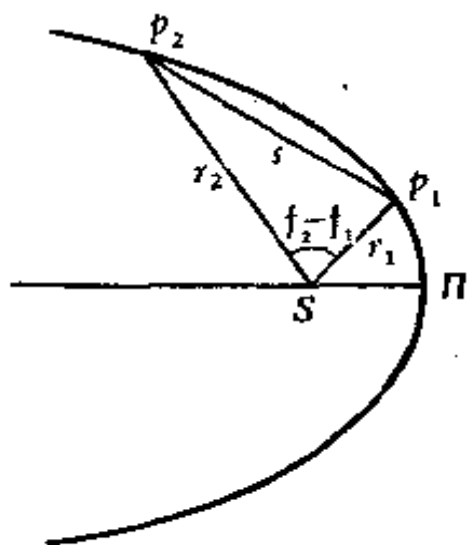


图 4

抛物线轨道存在一个关系式，在后面讲轨道计算时要用到，这里附带推出。

在图4中，S为太阳，位于焦点，Π为近日点位置。在抛物线轨道上，设  $P_1, P_2$  为时刻  $t = t_1, t_2$  时的行星位置，它们的极坐标相应为

$(r_1, f_1), (r_2, f_2)$ 。由(1.45)式可得

$$\sqrt{2\mu} q^{-\frac{1}{2}} (t_2 - \tau) = 2 \operatorname{tg} \frac{f_2}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f_2}{2},$$

$$\sqrt{2\mu} q^{-\frac{1}{2}} (t_1 - \tau) = 2 \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f_1}{2}.$$

二式相减可得

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\mu} q^{-\frac{1}{2}} (t_2 - t_1) &= 2 \operatorname{tg} \frac{f_2}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} \\
&+ \frac{2}{3} \left( \operatorname{tg}^3 \frac{f_2}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{f_1}{2} \right) \\
&= \frac{2}{3} \left( \operatorname{tg} \frac{f_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} \right) \left[ 3 \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{f_2}{2} \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \operatorname{tg} \frac{f_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} \right)^2 \right]. \tag{1.46}
\end{aligned}$$

设  $s$  为  $P_1, P_2$  之间的距离, 则由图 4 的三角形  $SP_1P_2$  可得下面关系:

$$\begin{aligned}
s^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(f_2 - f_1) \\
&= (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 \cos^2 \frac{f_2 - f_1}{2}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$2\sqrt{r_1r_2} \cos \frac{f_2 - f_1}{2} = \pm \sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}. \tag{1.47}$$

其中右端的正负号由  $f_2 - f_1$  的象限而定, 当  $f_2 - f_1$  在第一、二象限时取正号; 在三、四象限时取负号.

另外从 (1.43) 式可得

$$r_1 = q \sec^2 \frac{f_1}{2}, \quad r_2 = q \sec^2 \frac{f_2}{2}. \tag{1.48}$$

代入 (1.47) 式左端即得

$$2q \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{f_2}{2} \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} \right) = \pm \sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}. \tag{1.49}$$

又从 (1.48) 式直接可得

$$q \left( 2 + \operatorname{tg}^2 \frac{f_2}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{f_1}{2} \right) = r_1 + r_2. \tag{1.50}$$

(1.50) 式减 (1.49) 式得

$$\begin{aligned}
 & q \left( \operatorname{tg} \frac{f_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} \right)^2 \\
 &= (r_1 + r_2) \mp \sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)} \\
 &= \frac{1}{2} [(r_1 + r_2 + s) + (r_1 + r_2 - s) \\
 &\quad \mp 2\sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}] \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{r_1 + r_2 + s} \mp \sqrt{r_1 + r_2 - s})^2,
 \end{aligned}$$

即

$$\operatorname{tg} \frac{f_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2q}} \sqrt{r_1 + r_2 + s} \mp \sqrt{r_1 + r_2 - s}. \quad (1.51)$$

上面开方时只取正号, 可从图上看出.

以 (1.49)、(1.51) 式代入 (1.46) 式就可求出下面关系:

$$6\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}}. \quad (1.52)$$

这就是所要求的结果, 给出了任意二时刻行星在抛物线轨道上的向径、距离和时间的关系. (1.52) 式又叫做欧拉 (Euler) 方程.

3. 若轨道为双曲线,  $e > 1$ ,  $a < 0$ , 令  $a_1 = -a > 0$ , 叫做双曲线的半主径; 则相应的 (1.32), (1.33) 式化为

$$\left. \begin{aligned}
 r^2\dot{\theta} = h &= \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a_1(e^2 - 1)}, \\
 \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 &= \mu \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a_1} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

由此二式消去  $\dot{\theta}$  后得

$$a_1 v dt = \frac{r dr}{\sqrt{(a_1 + r)^2 - a_1^2 e^2}}, \quad (1.54)$$

其中

$$v = \sqrt{\mu a_1}^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.55)$$

对于双曲线轨道,有  $|a_1 + r| > a_1 e$ , 故可用双曲函数引入辅助量  $F$  为

$$\left. \begin{aligned} a_1 + r &= a_1 e \cosh F, \\ r &= a_1 (e \cosh F - 1). \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

代入 (1.54) 式即得

$$v dt = (e \cosh F - 1) dF,$$

积分得

$$v(t - \tau) = e \sinh F - F. \quad (1.57)$$

这就是对应于双曲线轨道情况的最后一个积分, 其中  $\tau$  为积分常数. 容易看出, 它也是行星经过近日点的时刻.

到此为止, 二体问题的微分方程完全解出. 在叙述过程中, 虽然是用行星和太阳代表两天体, 但所得结果完全适用于一般二体问题.

### §3 轨道根数

二体问题微分方程的解出, 得到了理论结果. 但是, 要把理论结果联系到实际问题, 还有一些过程, 下面四节就是讲述这些过程. 本节先讨论积分常数问题.

在运动方程的积分过程中, 积分常数只是数学上的一组任意常数. 但在具体讨论天体的运动情况时, 积分常数非常重要. 为什么在前面两节中一再强调要找出六个相互独立的积分常数呢? 除了数学上的意义外, 还因为每一个积分常数都代表天体运动中的一个基本量, 如果缺少一个, 就不能定出天体在具体时刻的位置和速度, 因而无法联系实际. 这点在后面会更清楚.

大多数积分常数的实际意义, 前面都分别讲过了, 这里再小结一下, 使概念更明确.

$\Omega, i$  两个积分常数是决定天体轨道平面方位的量. 若取



黄道面作为参考平面,在以太阳为中心的天球坐标系中,黄道面和轨道面在天球上的交线都是大圆.这两个大圆相交于两点.行星由南向北穿过黄道时所经过的那个交点,叫做升交点,图5中记为 $N$ .另外一点叫做降交点.若以春分点(图5中的 $\gamma$ 点)作黄经起算点(即 $X$ 轴所指向的点),则 $Q = \gamma N$ ,

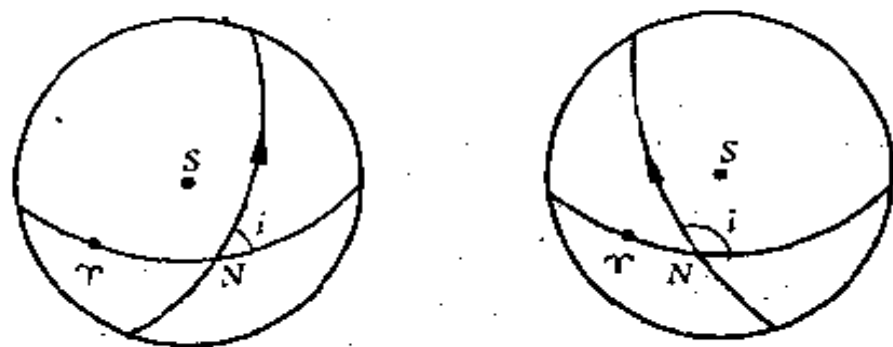


图 5

叫做升交点黄经,是从 $\gamma$ 开始,沿黄经增加的方向(即地球公转方向)计量.  $i$  叫做轨道倾角,即在升交点处,轨道正方向(运动方向)同黄道正方向(黄经增加方向)之间的交角; $i$  的值在 $0$ 和 $\pi$ 之间,图5中画出了 $i < \frac{\pi}{2}$ 和 $i > \frac{\pi}{2}$ 的情况,即顺转和逆转.如以赤道面作参考面,可同样得出 $Q, i$ 的定义.

积分常数 $a, e$ 表示天体轨道的大小和形状.  $e$ 是偏心率; $a$ 在椭圆轨道中是半长径;在双曲线轨道中为半主径,用 $a_1 = -a$ 表示;在抛物线轨道中,由于 $a$ 为无穷大,用半通径 $p$ 或 $q = p/2$ 代替.由于有关系

$$p = a(1 - e^2), \quad h = \sqrt{\mu p}, \quad n^2 a^3 = \mu.$$

因而用 $p, h, n$ 都可以代替 $a$ .

$\omega$ 的定义为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}.$$

从式中可看出,当  $\theta = \omega$  时,  $r$  最小,即行星在近日点. 由此可知,  $\omega$  为近日点方向的极角,它的大小要随极轴方向而定. 习惯上把极轴取为升交点方向,则  $\omega$  就是升交点同近日点方向之间的交角,规定从升交点沿行星运动方向计量,叫做近点角距.  $\omega$  的值决定行星近日点  $\Pi$  方向.

$\tau$  在三种类型的轨道中都是代表行星过近日点时刻. 在椭圆轨道中,常用  $M_0 = -n\tau$ , 或  $\varepsilon_0 = M_0 + Q + \omega$  来代替  $\tau$ . 关于  $M_0$  的意义后面再讲.  $\tau$  值确定后,就知道了行星于某时刻在轨道上的位置,成为讨论行星运动的起点.

上面已说明了积分常数是确定天体轨道的基本量,又叫做天体的轨道根数(也叫做轨道要素). 椭圆轨道的轨道根数为  $Q, i, a$  (或  $p, h, n$ ),  $e, \omega, M_0$  (或  $\tau, \varepsilon_0$ ); 抛物线轨道的轨道根数为  $Q, i, p$  (或  $q, h$ ),  $\omega, \tau$ ; 双曲线轨道的轨道根数为  $Q, i, a_1$  (或  $p, h$ ),  $e, \omega, \tau$ . 其中  $Q, i, \omega$  三个量是同春分点和黄道的位置有关,由于岁差章动等影响,故给出它们的数值时,要指明所对应的春分点和黄道的历元.

下面要讲述从给定的轨道根数来计算天体位置的方法. 但是怎样知道天体的轨道根数呢? 只能从实践中(天体的观测)求出来,这个内容将在第二章中讲述.

#### § 4 开普勒方程和它的解法

要从天体的轨道根数计算天体在任何时刻  $t$  时的位置,必须首先用到最后一个积分,因为它是唯一显含时间  $t$  的积分. 本节就是讲怎样从给定的时刻  $t$  计算辅助量  $E$  (椭圆),  $f$  (抛物线)和  $F$  (双曲线)的方法,并以椭圆轨道为主,因为这种情况应用最广.

1. 椭圆轨道的最后一个积分为 (1.39) 式,即

$$E - e \sin E = n(t - \tau). \quad (1.58)$$

下面先说明  $E$  的几何意义。

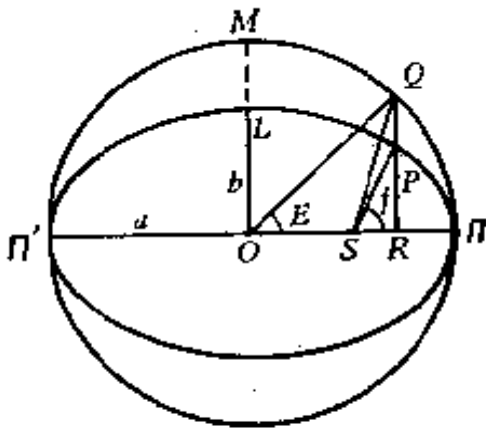


图 6

图 6 中的椭圆为行星轨道， $S$  为太阳，位于椭圆的焦点。  $O$  为椭圆的中心， $\Pi, \Pi'$  表示近日点和远日点。 设在任一时刻  $t$  时，行星在  $P$  点；在时刻  $\tau$  时，行星就在近日点  $\Pi$ 。  $O\Pi$  即为椭圆半长径  $a$ 。 以  $O$  为中心，以  $a$  为半径作圆，此圆叫做椭圆的外辅圆。 再从  $P$  点作垂线  $PR$ ，垂直于  $O\Pi$ ，并延长  $PR$  与外辅圆相交于  $Q$  点，联结  $OQ$ ，则  $\Pi O Q$  角就是时刻  $t$  时的  $E$ 。 下面证明这一点。

行星向径从近日点  $\Pi$  到  $P$  点所扫过的面积是扇形  $\Pi S P$ ，所经过的时间为  $(t - \tau)$ 。 而在整个周期  $T$  时间内，行星向径扫过的面积就是整个椭圆的面积。 由于面积速度为常数，故下面的关系成立：

行星向径从近日点  $\Pi$  到  $P$  点所扫过的面积是扇形  $\Pi S P$ ，所经过的时间为  $(t - \tau)$ 。 而在整个周期  $T$  时间内，行星向径扫过的面积就是整个椭圆的面积。 由于面积速度为常数，故下面的关系成立：

$$\frac{t - \tau}{T} = \frac{\Pi S P \text{ 面积}}{\text{椭圆面积}} \quad (1.59)$$

椭圆可看成外辅圆的投影，在投影过程中， $P$  是  $Q$  点的投影，故扇形  $\Pi S P$  是扇形  $\Pi S Q$  的投影，因此有关系：

$$\frac{\Pi S P \text{ 面积}}{\text{椭圆面积}} = \frac{\Pi S Q \text{ 面积}}{\text{外辅圆面积}}$$

与 (1.59) 式比较即得

$$\frac{t - \tau}{T} = \frac{\Pi S Q \text{ 面积}}{\text{外辅圆面积}} \quad (1.60)$$

而

$$\begin{aligned}
 HSQ \text{ 面积} &= \text{扇形 } HOQ \text{ 面积} - \text{三角形 } SOQ \text{ 面积} \\
 &= \frac{a^2}{2} E - \frac{1}{2} \overline{OS} \cdot \overline{QR} \\
 &= \frac{a^2}{2} E - \frac{1}{2} a^2 e \sin E.
 \end{aligned}$$

而  $OS = ae$ ,  $QR = a \sin E$ , 又外辅圆面积为  $\pi a^2$ ; 再用关系  $n = 2\pi/T$ , 则 (1.60) 式成为

$$\frac{n(t - \tau)}{2\pi} = \frac{\frac{a^2}{2} E - \frac{a^2}{2} e \sin E}{\pi a^2},$$

即 
$$n(t - \tau) = E - e \sin E.$$

这就是 (1.58) 式。这就证明了  $E$  就是图 6 中的角  $HOQ$ , 也就是给出了  $E$  的几何意义。由于在近日点  $H$  处的  $E = 0$ , 故  $E$  是由近日点起算的角度。当行星从近日点出发沿椭圆轨道运动时,  $E$  从 0 逐渐增加, 行星走到短轴端点时,  $E = \pi/2$ ; 再继续走到远日点  $H'$  时,  $E = \pi$ ; 再继续走下去, 则  $E$  再继续增加, 行星回到近日点,  $E$  增加到  $2\pi$ 。在天体力学中,  $E$  叫做偏近点角。

现定义

$$M = n(t - \tau). \quad (1.61)$$

显然当  $t = \tau$  时,  $M = 0$ , 即  $M$  也是从近日点起算的角度; 由于  $n$  为常数, 故  $t$  增加时,  $M$  是均匀地变化(增加)。  $t$  从  $\tau$  开始增加一个周期时,  $M$  则由 0 均匀地增加到  $2\pi$ 。因此把  $M$  叫做平近点角。显然, 当  $t = 0$  时,  $M = -n\tau = M_0$ 。因此  $M_0$  为  $t = 0$  时的平近点角, 这就是  $M_0$  的实际意义。(1.58) 式是开普勒首先从上述几何方法推出的, 故又叫做开普勒方程。

2. 下面就来讨论开普勒方程的解法。引入平近点角  $M$  后, (1.58) 式成为

$$E - e \sin E = n(t - \tau) = M. \quad (1.62)$$

解这个方程,就是要从已知的 $M$ 值,求出相应的 $E$ 值。(1.62)式为 $E$ 的超越方程,不便直接解出,要用各种近似方法,下面介绍三种.

(1) 迭代法. 如偏心率 $e$ 不大(例如行星或一些小行星),则 $E$ 同 $M$ 相差不多,(1.62)式可改写为

$$\left. \begin{aligned} E &= M + e \sin E, \\ \text{取 } E_1 &= M, \\ E_2 &= M + e \sin E_1, \\ E_3 &= M + e \sin E_2, \\ &\dots\dots\dots \\ E_i &= M + e \sin E_{i-1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

$i$  越大,算出的 $E_i$ 越准. 一直算到 $E_i = E_{i-1}$ 时(在所要求的精确度范围内)为止. 最后的 $E_i$ 即为(1.62)式的解. 用(1.63)式计算过程中, $E, M$ 都要用弧度作单位. 如用度作单位也可以,但偏心率 $e$ 要乘上一弧度的角度数的因子:  $57^\circ.29577591$ , 记为 $e^\circ$ , 此时

$$E = M + e^\circ \sin E. \quad (1.64)$$

若 $e$ 较大,则取 $M$ 作 $E_1$ 时,迭代次数太多,可用下面两种方法.

(2) 微分改正法. (1.62)式取微分可得

$$(1 - e \cos E) \Delta E = \Delta M,$$

或

$$\Delta E = \frac{\Delta M}{1 - e \cos E}. \quad (1.65)$$

则用任何方法得到 $E$ 的近似值 $E_1$ , 可得相应的

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1.$$

若 $M_1$ 不等于 $M$ , 则取 $\Delta M_1 = M - M_1$ , 用(1.65)式算出相应的

$$\Delta E_1 = \frac{\Delta M_1}{1 - e \cos E_1}$$

再取  $E_2 = E_1 + \Delta E_1$ , 代入 (1.62) 式计算出

$$M_2 = E_2 - e \sin E_2.$$

如  $M_2$  还不等于  $M$ , 再取  $\Delta M_2 = M - M_2$ , 再算出

$$\Delta E_2 = \frac{\Delta M_2}{1 - e \cos E_2}.$$

由此继续下去, 直到  $\Delta M = 0$  为止 (在所要求的精度内).

(3) 图解法. 当  $e$  较大时, 可用图解法求出  $E$  的近似值, 再用前面方法精确计算. 开普勒方程改写为

$$\frac{1}{e}(E - M) = \sin E.$$

其中  $M$  为已知量, 则相应的  $E$  为联立方程:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin E, \\ y &= \frac{1}{e}(E - M). \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

的解. 上面二式在  $(E, y)$  坐标面上绘出曲线, 则二曲线的交点的  $E$  值即为开普勒方程的解.

图 7 中,  $y = \sin E$  为正弦曲线, 与  $M, e$  无关, 可先绘在

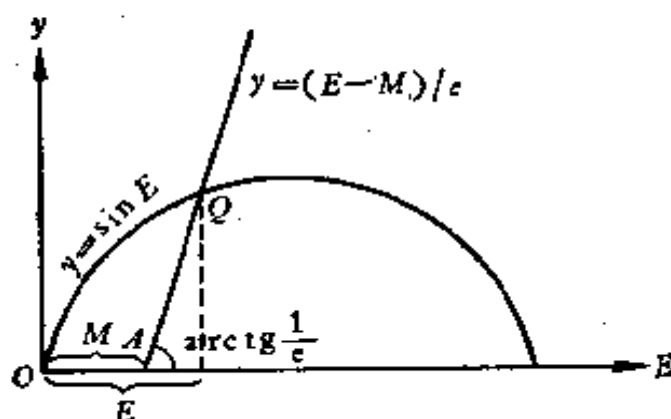


图 7

坐标纸上:  $y = (E - M)/e$  为一直线, 与  $E$  轴的交点为  $A$ , 则  $OA = M$  (因  $y = 0$  时,  $E = M$ ). 通过  $A$  点作直线, 与  $E$  轴的交角为  $\arctg \frac{1}{e}$ , 此直线就是  $y = (E - M)/e$ . 设  $Q$  为它同  $y = \sin E$  的交点, 则  $Q$  的横坐标就是相应的  $E$  值. 以上的  $E, M$  都是以弧度作单位.

3. 对于抛物线轨道, 最后的积分为 (1.45) 式, 即

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2}} q^{-\frac{1}{2}} (t - \tau), \quad (1.67)$$

这相当于抛物线轨道情况的开普勒方程. 对已给定的  $t$  值, (1.67) 式右端为已知量, 故 (1.67) 式就是  $\operatorname{tg} \frac{f}{2}$  的一个三次代数方程, 可以解出, 但比较复杂, 可用下面方法来解.

引入辅助量  $w$ , 令

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = 2\operatorname{ctg} 2w = \operatorname{ctg} w - \operatorname{tg} w, \quad (1.68)$$

则

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} &= (\operatorname{ctg} w - \operatorname{tg} w)^3 \\ &= \operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w - 3(\operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg} w). \end{aligned}$$

代入 (1.67) 式得

$$\operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w = \frac{3\sqrt{\mu}(t - \tau)}{\sqrt{2} q^{3/2}}. \quad (1.69)$$

再引入一个辅助量  $v$  为

$$\operatorname{ctg}^3 w = \operatorname{ctg} \frac{v}{2}, \quad (1.70)$$

则 (1.69) 式成为

$$\frac{3\sqrt{\mu}(t - \tau)}{\sqrt{2} q^{3/2}} = \operatorname{ctg} \frac{v}{2} - \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 2\operatorname{ctg} v. \quad (1.71)$$

因此，可从(1.71)式解出 $v$ ；代入(1.70)式求出 $\omega$ ，再代入(1.68)式即求出 $f$ ，于是问题解决。

4. 双曲线轨道相应的方程为

$$e \sin hF - F = v(t - \tau), \quad v = a_1^{-1/2} \sqrt{\mu}. \quad (1.72)$$

可用图解法根据 $t$ 求 $F$ 的近似值，即令

$$N = v(t - \tau). \quad (1.73)$$

相应的两曲线为

$$\left. \begin{aligned} y &= \sin hF, \\ y &= \frac{1}{e} (F + N). \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

二曲线交点的 $F$ 值就是所要求的结果。再由它用微分改正法求出精确值。

## §5 计算日心黄道直角坐标的方法

现在来讨论从已知的轨道根数计算天体坐标和速度的方法，本节先讲计算行星的日心黄道直角坐标 $(x, y, z)$ 和速度 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 的方法。

1. 椭圆轨道情况。轨道方程为

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (1.75)$$

令

$$f = \theta - \omega, \quad (1.76)$$

则(1.75)式为

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (1.77)$$

这样定义的辅助量 $f$ 的几何意义很明确。从(1.77)式知， $f = 0$ 时， $r$ 为最小，即 $f$ 为从近日点起算的角度。又从(1.76)



式知,  $f$  即为从近日点起算的极角(如图 8)。如建立直角坐标系  $S-\xi\eta$ ,  $\xi$  轴指向近日点  $\Pi$ ,  $\eta$  轴指向  $f = \pi/2$  的方向, 则任何时刻  $t$  的行星位置  $(\xi, \eta)$  就是

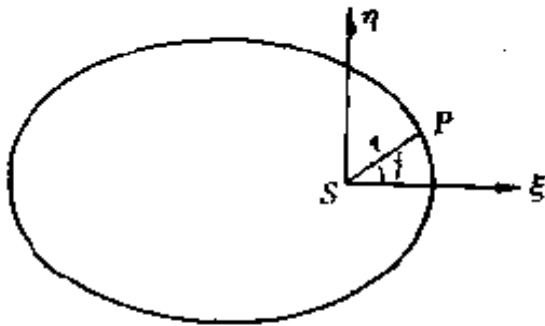


图 8

$$\begin{aligned}\xi &= r \cos f, \\ \eta &= r \sin f. \quad (1.78)\end{aligned}$$

$f$  在天体力学中用得很多, 叫做真近点角。

结合前面的讨论, 椭圆运动中一共有三个近点角: 平近点角  $M$ , 偏近点角  $E$  和真近点角  $f$ , 下面讨论它们之间的关系。

$M$  同  $E$  的关系就是开普勒方程 (1.62)。由于  $M$  是直接同时间联系, 故  $E$  要从  $M$  值算出来, 计算方法就是解开普勒方程, 已在 § 4 中讨论过了。下面主要讨论  $E$  同  $f$  之间的关系。

由 (1.77) 式可得

$$r \cos f = \frac{1}{e} [a(1 - e^2) - r].$$

其中的  $r$  可用关系  $r = a(1 - e \cos E)$  代入, 即

$$\begin{aligned}r \cos f &= \frac{1}{e} [a(1 - e^2) - a(1 - e \cos E)] \\ &= a(\cos E - e).\end{aligned} \quad (1.79)$$

因此

$$\begin{aligned}r \sin f &= \pm \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 f} \\ &= \pm \sqrt{a^2(1 - e \cos E)^2 - a^2(\cos E - e)^2} \\ &= \pm a \sqrt{1 - e^2} \sin E.\end{aligned}$$

但从  $E, f$  的定义可知, 当行星从近日点运动到远日点时,  $E, f$  都是从 0 增加到  $\pi$ ; 行星再从远日点回到近日点时,  $E, f$  都是从  $\pi$  增加到  $2\pi$ 。由此可知,  $\sin E$  同  $\sin f$  永远是同号, 故

上式的符号只应取正号,即

$$r \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (1.80)$$

(1.79)、(1.80)式给出了从  $E$  计算  $r, f$  的公式。再由 (1.78) 式即得  $\xi, \eta$  的计算公式。

有时不需要通过向径  $r$ , 直接要  $f$  同  $E$  之间的关系, 可再用关系  $r = a(1 - e \cos E)$  代入即得

$$\left. \begin{aligned} \cos f &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \\ \sin f &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

这是由  $E$  计算  $f$  的公式。从它们也可以解出由  $f$  计算  $E$  的公式, 即

$$\left. \begin{aligned} \cos E &= \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f}, \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f}. \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

(1.81) 式还可以进一步简化。由 (1.81) 式知

$$1 + \cos f = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E},$$

$$1 - \cos f = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{1 - e \cos E}.$$

二式相除可得

$$\operatorname{tg}^2 \frac{f}{2} = \frac{1 - \cos f}{1 + \cos f} = \frac{1 + e \cdot 1 - \cos E}{1 - e \cdot 1 + \cos E} = \frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2},$$

开方即得

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (1.83)$$

在开方过程中有正负号问题, 用  $E, f$  的定义可知 (1.83) 式右端应为正号。

2. 抛物线轨道情况。由它的最后一个积分 (1.45) 式知

$$2 \operatorname{tg} \frac{f}{2} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{f}{2} = \sqrt{2\mu q^{-3}}(t - \tau). \quad (1.84)$$

其中  $f$  也是真近点角，用此式可从给定的时刻  $t$  直接计算出  $f$ ，只是当  $t < \tau$  时，上式右端为负，故相应的  $f < 0$ 。因此在抛物线轨道中， $f$  的范围是  $-\pi < f < \pi$ 。

利用轨道方程

$$r = \frac{p}{1 + \cos f} = q \sec^2 \frac{f}{2}, \quad (1.85)$$

可由  $f$  计算出  $r$ ，因此直角坐标

$$\xi = r \cos f, \quad \eta = r \sin f,$$

立即可以算出。

3. 双曲线轨道情况。从给定的时刻  $t$  计算辅助量  $F$ （相当于椭圆运动中的偏近点角）的方法已在 § 4 中讲过了。利用关系式

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{a_1(e^2 - 1)}{1 + e \cos f}, \\ r &= a_1(e \cosh F - 1). \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

容易推出类似于椭圆运动的结果：

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos f = a_1(e - \cosh F), \\ \eta &= r \sin f = a_1 \sqrt{e^2 - 1} \sinh F. \end{aligned} \right\} \quad (1.87)$$

由此可计算  $(\xi, \eta)$  或  $(r, f)$ 。并可根据它们推出类似于 (1.83) 式的结果：

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} h \frac{F}{2}. \quad (1.88)$$

4. 上面对三种轨道情况给出了从给定的时刻  $t$  计算  $(\xi, \eta)$  或  $(r, f)$  的方法。现在就进一步讨论从它们计算日心黄道直角坐标  $(x, y, z)$  和速度  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  的公式。

图 9 为日心黄道直角坐标系。大圆  $XNY$  为黄道,  $X$  为春分点方向,  $X, Y, Z$  为三个坐标轴的方向。大圆  $N\Pi P$  为行星轨道面在天球上的投影,  $N$  为轨道升交点,  $\Pi$  为近日点方向,  $P$  为给定时刻  $t$  时的行星位置在天球上的投影。因此, 根据真近点角  $f$  和轨道根数  $Q, \omega, i$  的定义, 则有

$$XN = Q, \quad N\Pi = \omega,$$

$$NP = f, \quad \angle YN\Pi = i.$$

行星在时刻  $t$  时的坐标  $(x, y, z)$  即为向径  $r$  在坐标轴上的投影, 即

$$\begin{aligned} x &= r \cos PX, \\ y &= r \cos PY, \\ z &= r \cos PZ. \end{aligned} \quad (1.89)$$

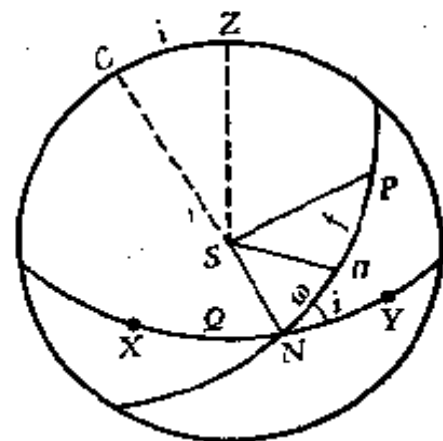


图 9

但从图 9 中的球面三角形

$PNX, PNY, PNZ$ , 立即可得(用球面三角中的余弦定律)

$$\left. \begin{aligned} \cos PX &= \cos Q \cos(\omega + f) - \sin Q \sin(\omega + f) \cos i, \\ \cos PY &= \sin Q \cos(\omega + f) + \cos Q \sin(\omega + f) \cos i, \\ \cos PZ &= \sin(\omega + f) \sin i. \end{aligned} \right\} (1.90)$$

代入(1.89)式即得

$$\left. \begin{aligned} x &= r [\cos Q \cos(\omega + f) - \sin Q \sin(\omega + f) \cos i], \\ y &= r [\sin Q \cos(\omega + f) + \cos Q \sin(\omega + f) \cos i], \\ z &= r \sin(\omega + f) \sin i. \end{aligned} \right\} (1.91)$$

这就是用  $(r, f)$  计算  $(x, y, z)$  的公式。它还可以整理为其它形式。把  $(\omega + f)$  的三角函数展开, 按  $r \cos f, r \sin f$  (即  $\xi, \eta$ ) 整理后可得

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1(r \cos f) + l_2(r \sin f) = l_1\xi + l_2\eta, \\ y &= m_1(r \cos f) + m_2(r \sin f) = m_1\xi + m_2\eta, \\ z &= n_1(r \cos f) + n_2(r \sin f) = n_1\xi + n_2\eta. \end{aligned} \right\} (1.92)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos Q \cos \omega - \sin Q \sin \omega \cos i, \\ m_1 &= \sin Q \cos \omega + \cos Q \sin \omega \cos i, \\ n_1 &= \sin \omega \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

$$\left. \begin{aligned} l_2 &= -\cos Q \sin \omega - \sin Q \cos \omega \cos i, \\ m_2 &= -\sin Q \sin \omega + \cos Q \cos \omega \cos i, \\ n_2 &= \cos \omega \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

对于椭圆轨道, (1.92) 式中的  $(\xi, \eta)$  可以用偏近点角  $E$  来表示, 即

$$\left. \begin{aligned} x &= l_1 a (\cos E - e) + l_2 a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ y &= m_1 a (\cos E - e) + m_2 a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ z &= n_1 a (\cos E - e) + n_2 a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned} \right\} \quad (1.95)$$

用 (1.95) 式可直接从  $E$  计算出  $(x, y, z)$ .

其实, 若设向量  $\xi = S\Pi$ , 而  $\eta$  为从  $S$  指向  $t = \frac{\pi}{2}$  的向量, 则  $(l_1, m_1, n_1)$  和  $(l_2, m_2, n_2)$  就是  $\xi$  和  $\eta$  在坐标系  $S-XYZ$  中的方向余弦; 如定义向量  $P = (l_1, m_1, n_1)$ ,  $Q = (l_2, m_2, n_2)$ , 则 (1.92) 式和 (1.95) 式可用向量公式表示:

$$r = \xi P + \eta Q, \quad (1.96)$$

或

$$r = a(\cos E - e)P + a\sqrt{1 - e^2} \sin E Q. \quad (1.97)$$

显然  $P, Q$  是  $\xi, \eta$  方向的单位向量, 只依赖于三个轨道根数  $Q, \omega, i$ .

用 (1.95) 或 (1.97) 式容易求出速度  $\dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  的公式, 由于式中只有  $E$  为时间的函数, 从开普勒方程可得

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = n,$$

即

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{an}{r}. \quad (1.98)$$

因此, (1.95) 两端对  $t$  微商可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{a^2 n}{r} l_1 \sin E + \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} l_2 \cos E, \\ \dot{y} &= -\frac{a^2 n}{r} m_1 \sin E + \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} m_2 \cos E, \\ \dot{z} &= -\frac{a^2 n}{r} n_1 \sin E + \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} n_2 \cos E. \end{aligned} \right\} (1.99)$$

或

$$\dot{\mathbf{r}} = \left( -\frac{a^2 n}{r} \sin E \right) \mathbf{P} + \left( \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r} \cos E \right) \mathbf{Q}. \quad (1.100)$$

上面两式就是计算椭圆运动中的速度的公式。对于双曲线轨道, 可以利用  $F$  对  $t$  的微商得出类似的结果。对于抛物线轨道就需要直接对  $(x, y, z)$  取微商。

但是得到了  $(x, y, z)$  及  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  还不能直接同观测值比较, 因天体的位置观测一般是地心的赤经和赤纬  $(\alpha, \delta)$ , 因此还要求出计算  $(\alpha, \delta)$  的公式, 这就是下节所讲的内容。

## § 6 计算星历表的公式

天体的视位置(包括距离)表叫做星历表, 用它们可以直接同观测值比较。

有时需要用行星的日心黄道球坐标  $(l, b)$ , 其中  $l$  为行星的日心黄经,  $b$  为日心黄纬。由于  $xy$  平面就是黄道面, 而且  $x$  轴是指向春分点, 也就是黄经的起算点。因此, 天体的日心黄道直角坐标  $(x, y, z)$  同  $(l, b)$  之间的关系就是同一坐标系的直角坐标同球坐标之间的关系:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos l \cos b, \\ y &= r \sin l \cos b, \\ z &= r \sin b. \end{aligned} \right\} (1.101)$$

由此可从  $(x, y, z)$  计算出  $(l, b)$ . 所对应的春分点和黄道历元应与  $(l, b)$  的相同.

现在来讲从  $(x, y, z)$  变到  $(\alpha, \delta)$  的公式. 需要把日心黄道坐标系变换为日心赤道坐标系, 然后再把坐标原点移到地心, 成为地心赤道坐标系.

设  $S-X'Y'Z'$  为日心赤道直角坐标系,  $X'$  轴也指向春分点. 故只要把  $X$  轴固定(与  $X'$  轴重合), 把  $YZ$  平面向南旋转  $\varepsilon$  角(黄赤交角), 则  $Y, Z$  轴就分别同  $Y', Z'$  轴重合(见图 10).

设  $(x', y', z')$  为行星的日心赤道直角坐标, 则根据坐标

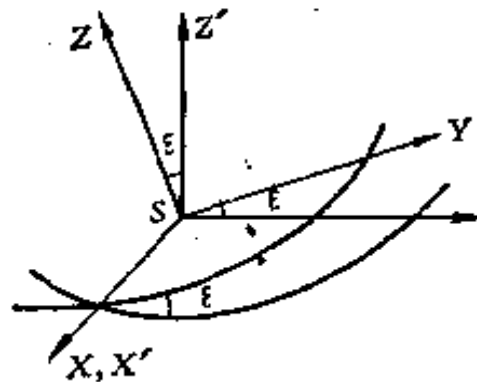


图 10

旋转的公式可得

$$\left. \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon, \\ z' &= y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (1.102)$$

(1.102) 式即为从  $(x, y, z)$  计算  $(x', y', z')$  的公式.

用 (1.92) 式代入得

$$\begin{aligned} x' &= l_1(r \cos f) + l_2(r \sin f), \\ y' &= (m_1 \cos \varepsilon - n_1 \sin \varepsilon)(r \cos f) + (m_2 \cos \varepsilon - n_2 \sin \varepsilon)(r \sin f), \\ z' &= (m_1 \sin \varepsilon + n_1 \cos \varepsilon)(r \cos f) + (m_2 \sin \varepsilon + n_2 \cos \varepsilon)(r \sin f), \end{aligned}$$

引入辅助量  $P_x, P_y, P_z$  和  $Q_x, Q_y, Q_z$ , 上式可整理成为

$$\left. \begin{aligned} x' &= P_x(r \cos f) + Q_x(r \sin f), \\ y' &= P_y(r \cos f) + Q_y(r \sin f), \\ z' &= P_z(r \cos f) + Q_z(r \sin f). \end{aligned} \right\} \quad (1.103)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} P_x &= l_1 = \cos Q \cos \omega - \sin Q \sin \omega \cos i, \\ Q_x &= l_2 = -\cos Q \sin \omega - \sin Q \cos \omega \cos i, \\ P_y &= m_1 \cos \varepsilon - n_1 \sin \varepsilon = (\sin Q \cos \omega \\ &\quad + \cos Q \sin \omega \cos i) \cos \varepsilon - \sin \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ Q_y &= m_2 \cos \varepsilon - n_2 \sin \varepsilon = (\cos Q \cos \omega \cos i \\ &\quad - \sin Q \sin \omega) \cos \varepsilon - \cos \omega \sin i \sin \varepsilon, \\ P_z &= m_1 \sin \varepsilon + n_1 \cos \varepsilon = (\sin Q \cos \omega \\ &\quad + \cos Q \sin \omega \cos i) \sin \varepsilon + \sin \omega \sin i \cos \varepsilon, \\ Q_z &= m_2 \sin \varepsilon + n_2 \cos \varepsilon = (\cos Q \cos \omega \cos i \\ &\quad - \sin Q \sin \omega) \sin \varepsilon + \cos \omega \sin i \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

显然  $(P_x, P_y, P_z), (Q_x, Q_y, Q_z)$  是向量  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  在日心赤道坐标系中的方向余弦。

再把坐标原点平移到地心  $E$ 。设  $(x'', y'', z'')$  为行星的地心赤道直角坐标, 若令  $(X', Y', Z')$  表示太阳的地心赤道直角坐标, 则有

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x' + X', \\ y'' &= y' + Y', \\ z'' &= z' + Z'. \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

其中  $(X', Y', Z')$  在天文年历中登载出它们的数值, 故可看作已知量。

知道了  $(x'', y'', z'')$  就可用同一系统的直角坐标和球坐标关系:



$$\left. \begin{aligned} x'' &= \rho \cos \alpha \cos \delta, \\ y'' &= \rho \sin \alpha \cos \delta, \\ z'' &= \rho \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

求出  $(\alpha, \delta)$  和行星到地心的距离  $\rho$ , 于是问题解决.

但是, 所得到的  $\rho, \alpha, \delta$  还不是视位置, 要注意下列几点:

1. 用 (1.106) 式求出的  $(\rho, \alpha, \delta)$  是地心位置, 而观测到的  $(\alpha, \delta)$  或  $\rho$  为地面 (观测地点) 位置, 需要作周日视差改正. 对较远的天体 (如大行星和一般小行星等), 只要对天体的观测值  $(\alpha, \delta)$  作周日视差改正就行了 (参看球面天文学书籍). 对于很近的天体 (如月球, 人造卫星等) 用视差改正不能解决问题, 误差太大, 故需要把坐标原点再平移到观测地点, 直角坐标  $(x'', y'', z'')$  作了相应的改正后, 再用 (1.106) 式计算  $(\rho, \alpha, \delta)$ .

2. 在计算过程中, 所用的春分点、黄道和赤道都要对应同一历元. 特别是轨道根数  $(Q, \omega, i)$ , 黄赤交角  $\epsilon$ , 太阳的地心赤道直角坐标  $(X', Y', Z')$ . 如不统一, 则需对某些量作岁差改正, 使得统一.

3. 以上所得的  $(\alpha, \delta)$  还只是某历元的平位置, 需要作岁差、章动、光行差改正后才能得到视位置 (参看球面天文学书籍).

## § 7 二体问题在人造地球卫星运动中的应用

如果把地球看做质点, 而且不考虑其它摄动因素, 则人造地球卫星的运动也是一个二体问题. 尽管这样讨论是非常近似的, 但还是能得到一些有用的结果. 这些结果也可以说是二体问题的应用. 现在就从二体问题出发讨论下面几个问

題。

1. 宇宙速度。从地面发射人造地球卫星，首先要解决速度大小问题，用前面的活力公式(1.25)得

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = GE \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

这里的  $E$  代表地球质量， $r$  为火箭(或卫星)到地心的距离。若在地面发射，则  $r = R$  (地球半径)。从(1.25)式知， $a$  越小，则  $v$  也越小(在  $a > 0$ ，即椭圆轨道情况中讨论)。但是如果发射人造卫星，则  $a$  的最小值是  $R$ ，因为若  $a < R$ ，则轨道要碰到地面。故在地面发射人造卫星的最小速度为  $v_1$ ，即

$$v_1^2 = GE \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{R} \right) = \frac{GE}{R},$$

或

$$v_1 = \sqrt{\frac{GE}{R}}, \quad (1.107)$$

这个速度就叫做第一宇宙速度。用地球赤道半径  $R = 6378$  公里， $GE = 398603$  公里<sup>3</sup>/秒<sup>2</sup>，代入得

$$v_1 = 7.912 \text{ 公里/秒}.$$

地面发射火箭能脱离地球引力场的最小速度，即抛物线轨道速度，叫做第二宇宙速度。若记为  $v_2$ ，则由§2的讨论可知

$$v_2 = \sqrt{2} v_1 = 11.19 \text{ 公里/秒}. \quad (1.108)$$

从地面发射火箭能脱离太阳引力场的最小速度，叫做第三宇宙速度。求这个速度需同时考虑地球和太阳对火箭的引力。

设火箭的运动方向和地球公转方向一致，因为这样可以充分利用地球的公转速度，使火箭的发射速度为最小。

显然，火箭要脱离太阳的引力场，必须具有相对于太阳的

抛物线速度  $V$ :

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{A}} = 42.4 \text{ 公里/秒}. \quad (1.109)$$

其中  $M$  为太阳质量,  $A$  为天文单位.

而地球的公转速度为  $V_0 = 30$  公里/秒, 故火箭相对于地球的最小速度为

$$v' = V - V_0 = 12.4 \text{ 公里/秒}.$$

但  $v'$  应该是火箭刚脱离地球引力场时的速度, 而在地面发射的速度应更大.

为此, 我们引入引力作用范围:

取

$$\rho_* = A \left( \frac{E}{M} \right)^{2/3} = 930000 \text{ 公里约 } 150R,$$

以地球为中心,  $\rho_*$  为半径的球面内空间便称为地球的引力作用范围, 当火箭飞出该范围后, 只考虑太阳的吸引.

这样,

$$v'^2 = GE \left( \frac{2}{\rho_*} - \frac{1}{a} \right). \quad (1.110)$$

设地面发射速度为  $v_3$ , 则

$$v_3^2 = GE \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right). \quad (1.111)$$

(1.111) 式减去 (1.110) 式可得

$$v_3^2 - v'^2 = GE \left( \frac{2}{R} - \frac{2}{\rho_*} \right) = \frac{2GE}{R} \left( 1 - \frac{R}{\rho_*} \right). \quad (1.112)$$

由于  $\rho_*$  比  $R$  大得多, 可略去  $\frac{R}{\rho_*}$  项, 故

$$v_3^2 - v'^2 \approx \frac{2GE}{R} = v_2^2,$$

于是

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v'^2} = \sqrt{11.19^2 + 12.4^2} \text{公里/秒} = 16.9 \text{公里/秒},$$
  
这就是第三宇宙速度。

2. 速度和轨道大小的关系。设人造卫星是在地面上高度为  $H$  处进入轨道, 即

$$r = R + H.$$

这里先讨论圆形轨道情况, 则速度  $v$  为

$$v^2 = \frac{GE}{r} = \frac{GE}{R + H}, \quad (1.113)$$

其中  $R$  为地球半径。由此可以看出:  $H$  越大, 相应的速度  $v$  越小。这样似乎产生一种印象: 发射轨道愈大的卫星, 所需要的速度愈小。这显然是不对的, 因为 (1.113) 式所给出的速度是卫星在轨道上运动的速度, 不是地面上的发射速度。设在地面上相应的发射速度为  $v_0$ , 飞行到高度为  $H$  处的速度为 (1.113) 式的  $v$ , 则由活力公式可得

$$v_0^2 = GE \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right).$$

相应的半长径  $a = R + H$ , 代入得

$$\begin{aligned} v_0^2 &= GE \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{R + H} \right) \\ &= \frac{2GE}{R} \left[ 1 - \frac{R}{2(R + H)} \right] = v_2^2 \left[ 1 - \frac{R}{2(R + H)} \right], \end{aligned}$$

其中  $v_2$  就是第二宇宙速度。

则

$$v_0 = v_2 \sqrt{1 - \frac{R}{2(R + H)}}. \quad (1.114)$$

由 (1.114) 式可看出,  $H$  越大, 相应的  $v_0$  也越大; 当  $H \rightarrow \infty$  时,  $v_0 \rightarrow v_2$ .

实际上的发射速度比  $v_0$  还要大些。因为火箭从地面上升到高度  $H$  时，还有大气阻力的减速作用；另外，由于转变方向（开始发射时是垂直上升，进入圆形轨道时应为水平方向），也使能量损耗。故实际上的发射速度约比(1.114)式增大 15% 左右。

由于卫星质量太小，故卫星公转周期  $T$  可用开普勒第三定律求出，即

$$\frac{(R + H)^3}{T^2} = \frac{GE}{4\pi^2} \quad (1.115)$$

3. 进入轨道时的向径和速度同卫星轨道根数之间的关系。在这里只讨论椭圆轨道情况。先讨论轨道平面上的几个轨道根数。

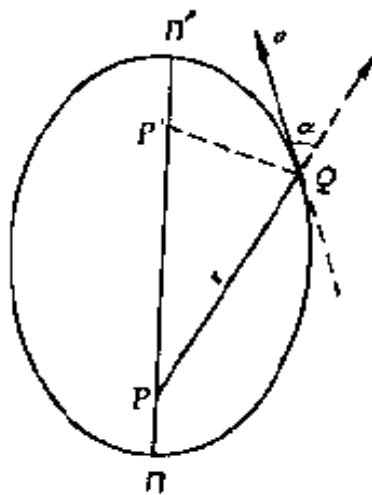


图 11

若卫星进入轨道时同地心的距离为  $r$ ，速度大小为  $v$ ，速度方向与向径  $r$  正方向的交角为  $\alpha$ （见图 11）。则  $r, v, \alpha$  为已知量。

首先从活力公式(1.25)知

$$v^2 = GE \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

可以解出椭圆轨道半长径  $a$ 。

由此可知，半长径  $a$  同速度的

方向无关。

另外，速度在垂直于向径方向的分量为

$$r\dot{\theta} = r\dot{\phi} = v \sin \alpha,$$

又由关系(1.32)得

$$r^2\dot{\theta} = h = \sqrt{GEp} = \sqrt{GEa(1 - e^2)},$$

即

$$rv \sin \alpha = \sqrt{GEp} = \sqrt{GEa(1 - e^2)}.$$

由此可解出

$$p = a(1 - e^2) = \frac{r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{GE}, \quad (1.116)$$

因此  $p$  或  $e$  就可以求出。

再由轨道方程

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (1.117)$$

可解出真近点角  $f$ 。这里的象限可以确定。因为从图11可以看出：当  $\alpha < 90^\circ$  时， $f$  只能在第一、二象限；当  $\alpha > 90^\circ$  时， $f$  只能在第三、四象限。故可以由  $\cos f$  确定  $f$  的象限。

根据所求出的  $f$  值，利用 (1.83) 式

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{f}{2} \quad (1.118)$$

可求出相应的偏近点角  $E$ 。再由开普勒方程

$$E - e \sin E = M \quad (1.119)$$

得出平近点角  $M$ 。又从  $M$  的定义

$$M = n(t - \tau) \quad (1.120)$$

就解出  $\tau$ 。其中平均角速度  $n$  为

$$n = \sqrt{GE} a^{-3/2}, \quad (1.121)$$

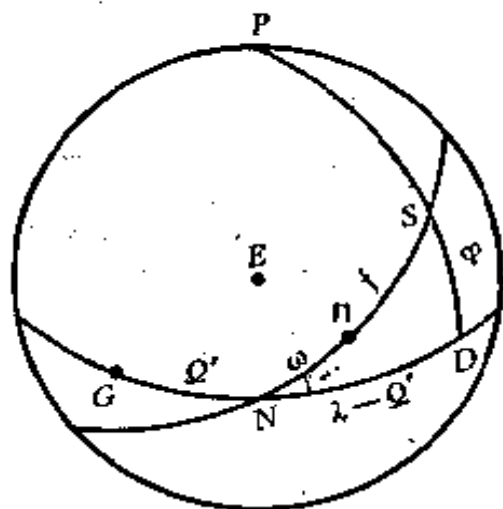


图 12

$t$  即发射时刻。

到此为止，轨道平面上的三个轨道根数  $a, e, \tau$  都已求出。

另外三个轨道根数同卫星轨道平面在参考坐标系中的方位有关。图 12 为地心赤道球面坐标系。大圆  $GND$  为赤道； $G$  是格林尼治子午圈同赤道的交点； $N$  为卫星轨道对赤道的升交点； $D$  为卫星进入轨道地点的子午圈同赤道的交点。大圆  $NIS$  为卫星轨道； $\Pi$  为轨道近地点； $S$  为卫星进入轨道时的位置。  $P$  为北极，大圆  $PSD$  为经过  $S$  点的子午圈。如果  $S$  点的地理经纬度为  $(\lambda, \varphi)$ ，则由图 12 可知： $GN = Q'$  (升交点的地理经度)， $N\Pi = \omega$ ； $\Pi S = f$ ， $ND = \lambda - Q'$ ， $SD = \varphi$ ； $\angle SND =$  轨道倾角  $i$ 。

轨道面和子午面的交角为  $Q$ ，这是容易求得的，于是在这里的已知量为  $\lambda, \varphi, Q$ 。可从直角球面三角形  $SND$  得到下列关系：

$$\left. \begin{aligned} \cos i &= \cos \varphi \sin Q \\ \sin(\omega + f) &= \frac{\sin \varphi}{\sin i} \\ \cos(\omega + f) &= \operatorname{ctg} Q \operatorname{ctg} i \\ \sin(\lambda - Q') &= \sin(\omega + f) \sin Q \\ \cos(\lambda - Q') &= \frac{\cos(\omega + f)}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (1.122)$$

由这些式子可以解出  $i, \omega + f, \lambda - Q'$ 。由于  $f$  已在 (1.117) 式求出，因此可得另外三个轨道根数  $i, Q', \omega$ 。如果升交点经度是由春分点  $\Upsilon$  起算，设为  $Q$ ，则  $Q = Q' + S_0$ 。其中  $S_0$  为进入轨道时刻的格林尼治恒星时，可从天文年历中查出。

人造卫星的轨道根数是相对于地心赤道坐标系，也就是上述的  $a, e, i, Q, \omega, \tau$ 。利用它们计算人造卫星的星历表

时，只要算出地心赤道直角坐标  $(x, y, z)$ ，计算公式就是 (1.95) 式。但要平移坐标原点到观测地点，再算出  $(\alpha, \delta)$  和卫星到观测地点的距离  $\rho$ 。

## § 8 向大行星发射人造天体的问题

用二体问题可以讨论行星际航行轨道设计的一些近似方案。这里只介绍其中的一种，即双切轨道方案，这种轨道又叫做霍曼 (Hohman) 轨道。

先讨论向外行星发射火箭的情况。由于是讨论近似方案，可把行星轨道都认为是圆形，而且都在黄道面上。

以火星为例，设  $r_*$  为火星轨道半径，用天文单位作为长度单位。则由地球到火星的双切轨道（同地球和火星的轨道都相切）的半长径  $a_*$  为（见图 13）：

$$a_* = \frac{1}{2}(1 + r_*)。$$

显然  $a_* > 1$ ，故地球轨道上  $E$  点是火箭轨道的近日点，火星轨道上的  $B$  点为远日点。因此，火箭在  $E$  点时的速度  $V_*$  为

$$V_*^2 = GM \left( 2 - \frac{1}{a_*} \right)。$$

但地球在  $E$  点的公转速度（圆形轨道）为  $V_0$ ：

$$V_0^2 = GM，$$

其中  $M$  为太阳的质量。由于  $a_* > 1$ ，故得  $V_* > V_0$ 。

令

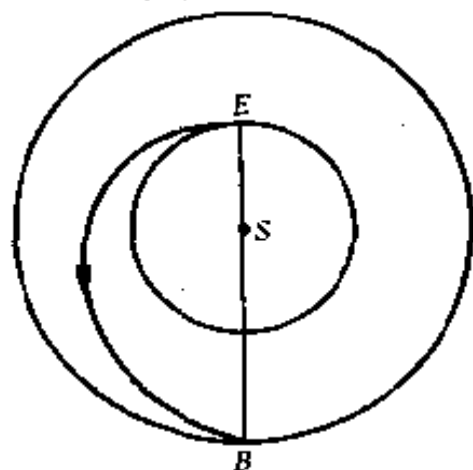


图 13



$$v' = V_{\text{火}} - V_0,$$

则  $v'$  为火箭在  $B$  点相对于地球的速度, 而且是出了地球引力范围后的速度. 同讨论第三宇宙速度情况一样, 相应的地面发射速度  $v_{\text{火}}$  为

$$v_{\text{火}}^2 = v'^2 + v_2^2,$$

其中  $v_2$  为第二宇宙速度, 由此可求出  $v_{\text{火}}$ .

对于其他外行星, 有同样的结果, 只是相应的  $r_{\text{火}}$  改为其它行星的轨道半径  $r_{\text{外}}$  就行了, 相应的  $a_{\text{火}}, V_{\text{火}}$  改记为  $a_{\text{外}}, V_{\text{外}}$ .

对于内行星, 双切轨道的半长径  $a_{\text{内}}$  仍为

$$a_{\text{内}} = \frac{1}{2}(1 + r_{\text{内}});$$

但由于  $r_{\text{内}} < 1$ , 故  $a_{\text{内}} < 1$ , 因而相应的

$$V_{\text{内}} = GM \left( 2 - \frac{1}{a_{\text{内}}} \right) < V_0.$$

此时取  $v' = V_0 - V_{\text{内}}$ , 则相应的地面发射速度  $v_{\text{内}}$  仍为

$$v_{\text{内}}^2 = v'^2 + v_1^2.$$

显然发射速度  $v_{\text{外}}, v_{\text{内}}$  都小于第三宇宙速度, 具体数值可由各行星的轨道半径值计算出来. 采用这种轨道的优点是发射速度小, 因而燃料省. 但是, 火箭在行星际空间的飞行时间长, 各种摄动因素的作用大. 例如用这种轨道飞往火星要 260 天, 到木星要 2 年 267 天. 在近年来发射的行星际火箭, 发射速度比上面所讲的略大些, 而且为了修正各摄动因素引起的偏差, 在上面装有制动火箭.

## § 9 椭圆运动的级数展开方法概况

二体问题是天体运动理论的基础. 前面已从二体问题的基本理论得出了很多具体的结果, 利用它们可以从天体的轨

道根数计算天体在任何时刻  $t$  时的位置和速度。但在以后的摄动理论中,不仅经常要用到这些结果,而且还要对时间  $t$  进行积分。因此需要把含时间  $t$  的量统一成某一个变量的函数,而这个变量又为  $t$  的显函数,这样才有可能求积。由于大多数天体的轨道都接近于椭圆,故主要讨论椭圆轨道情况。

在椭圆运动中,同时间  $t$  直接有关的量为三个近点角  $M$ ,  $E$ ,  $f$  以及向径  $r$ 。它们之间的关系为

$$E - e \sin E = M = n(t - \tau),$$

$$r = a(1 - e \cos E),$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f},$$

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

如果直接用时间  $t$  作自变量,由于  $M$  为时间  $t$  的线性函数,只需要把  $E$ ,  $f$ ,  $r$  的所有函数表为  $M$  的函数就能积分。但是从上面式子可知,它们之间的函数关系都是超越函数,一般情况下,  $E$ ,  $f$ ,  $r$  的函数无法表为  $M$  的已知函数,因而只有用级数展开方法。有时可以用偏近点角  $E$  作自变量,这样就需要把  $M$ ,  $f$ ,  $r$  的函数展为  $E$  的级数。由于运动中的有关量都是  $E$ ,  $M$ ,  $f$  的周期函数,并且大多数情况中的偏心率  $e$  都很小,故经常展开成  $M$ , 或  $E$  (有时也展为  $f$ ) 的三角级数以及  $e$  的幂级数。下面主要介绍三种常用的展开方法。

1. 调和分析方法。就是把  $E$ ,  $f$ ,  $r$  的函数展开成  $M$  的三角级数。展开式的系数要用到一种特殊函数——白塞耳函数,故又叫做白塞耳函数展开方法 (§ 10, § 11)。

2. 超几何级数展开方法。有时不直接用调和分析方法,而把三角函数改为虚变量的指数函数,再展为这种指数函数的幂级数;然后再把幂级数化为三角函数。展开式的系数一

般可用超几何级数来表示，在展开为  $E$  或  $f$  的级数时经常用到 (§ 12)。

3. 幂级数方法，就是直接把有关量展为时间或偏心率  $e$  的幂级数 (§ 13—§ 15)。

## § 10 白塞耳函数和它的性质

本节先介绍白塞耳函数的定义和性质，下节再谈它的应用。由于天体力学中只是把白塞耳函数作为工具，关于它的来源在此就不讲了。

1. 取函数  $U$  为

$$U = \exp \left[ \frac{x}{2} (Z - Z^{-1}) \right] = \exp \left( \frac{x}{2} Z \right) \exp \left( -\frac{x}{2} Z^{-1} \right). \quad (1.123)$$

它是变量  $x$ ,  $Z$  的指数函数，其中符号  $\exp(A)$  表示指数函数：

$$\exp(A) = e^A,$$

$e$  为自然对数的底。由于在天体力学中常以  $e$  表示偏心率，为了避免混淆，故采用此符号。

规定  $x$  为实变数，由于指数函数可以展为幂级数，即

$$\left. \begin{aligned} \exp \left( \frac{x}{2} Z \right) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \frac{x}{2} Z \right)^p, \\ \exp \left( -\frac{x}{2} Z^{-1} \right) &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \left( -\frac{x}{2} Z^{-1} \right)^q, \end{aligned} \right\} \quad (1.124)$$

代入 (1.123) 式得

$$U = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{p! q!} \left( \frac{x}{2} \right)^{p+q} Z^{p-q}. \quad (1.125)$$

现在按照  $Z$  的指数进行整理，令  $n = p - q$ ,

则  $p = q + n$ , 代入上式得

$$U = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(n+q)!q!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q} \right] Z^n. \quad (1.126)$$

定义函数:

$$J_n(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(n+q)!q!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}, \quad (1.127)$$

则  $U$  可表为

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) Z^n \\ &= J_0(x) + J_1(x)Z + J_2(x)Z^2 + \dots \\ &\quad + J_{-1}(x)Z^{-1} + J_{-2}(x)Z^{-2} + \dots, \end{aligned} \quad (1.128)$$

由 (1.127) 式定义的函数  $J_n(x)$  就叫做  $n$  级第一类白塞耳函数. 它是  $x$  的函数, 其中  $n$  为整数,  $x$  为实数. 容易得到下面的一些性质.

2. 在 (1.123) 式中, 如把  $Z \rightarrow -Z^{-1}$ , 则  $U$  不变; 而在 (1.128) 式中, 把  $Z \rightarrow -Z^{-1}$  后, 变为

$$\begin{aligned} U &= J_0(x) - J_1(x)Z^{-1} + J_2(x)Z^{-2} + \dots \\ &\quad + (-1)^n J_n(x)Z^{-n} + \dots \\ &\quad - J_{-1}(x)Z + J_{-2}(x)Z^2 + \dots \\ &\quad (-1)^n J_{-n}(x)Z^n + \dots \end{aligned} \quad (1.129)$$

由于  $Z$  可以取任意值, 故 (1.128), (1.129) 式对  $Z$  是恒等式. 比较 (1.128), (1.129) 式中  $Z$  的同次幂系数可得

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (1.130)$$

这就是  $J_n(x)$  的一个性质.

3. 从 (1.127) 式直接可得

$$\begin{aligned} J_n(-x) &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(n+q)!q!} \left(-\frac{x}{2}\right)^{n+2q} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned} \quad (1.131)$$

同 (1.130) 式一起可得

$$\left. \begin{aligned} J_{-n}(x) &= J_n(-x) = (-1)^n J_n(x), \\ J_{-n}(-x) &= J_n(x), \end{aligned} \right\} \quad (1.132)$$

这是  $J_n(x)$  的又一个性质。

4. 现在推出  $J_n(x)$  的循环公式。

由于

$$U = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) Z^n = \exp \left[ \frac{x}{2} (Z - Z^{-1}) \right],$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Z} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(x) Z^{n-1} = \frac{x}{2} (1 + Z^{-2}) U \\ &= \frac{x}{2} (1 + Z^{-2}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) Z^n. \end{aligned}$$

比较  $Z^{n-1}$  的系数可得

$$n J_n(x) = \frac{x}{2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)],$$

即

$$J_n(x) = \frac{x}{2n} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]. \quad (1.133)$$

(1.133) 式就是循环公式, 给出了连续三个白塞耳函数之间的关系。因此只要知道任意两个连续的  $J_n(x)$ , 例如  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ , 则所有的  $J_n(x)$  都可用 (1.133) 式逐步求出。

5. 在椭圆运动展开式中, 有时要用到白塞耳函数的微商, 现在就来讨论。由 (1.123), (1.128) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{dJ_n(x)}{dx} Z^n = \frac{1}{2} (Z - Z^{-1}) U \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} J_n(x) Z^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} J_n(x) Z^{n-1}. \end{aligned}$$

比较  $Z^n$  的系数可得

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

改用记号

$$J'_n(x) = \frac{dJ_n(x)}{dx}, \quad J''_n(x) = \frac{d^2J_n(x)}{dx^2},$$

则上式为

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \quad (1.134)$$

由此可得

$$\begin{aligned} J''_n(x) &= \frac{1}{2} [J'_{n-1}(x) - J'_{n+1}(x)] \\ &= \frac{1}{4} [J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)] \\ &= -J_n(x) + \frac{1}{4} [J_{n-2}(x) + 2J_n(x) + J_{n+2}(x)]. \end{aligned} \quad (1.135)$$

但由 (1.133) 式可得

$$\begin{aligned} J_{n-2}(x) + J_n(x) &= \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1}(x), \\ J_n(x) + J_{n+2}(x) &= \frac{2(n+1)}{x} J_{n+1}(x). \end{aligned}$$

代入 (1.135) 式可得

$$\begin{aligned} J''_n(x) &= -J_n(x) + \frac{1}{2x} [(n-1)J_{n-1}(x) + (n+1)J_{n+1}(x)] \\ &= -J_n(x) + \frac{n}{2x} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \\ &\quad - \frac{1}{2x} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \end{aligned}$$

再利用 (1.133), (1.134) 式可求出

$$J_n''(x) = -J_n(x) + \frac{n^2}{x^2} J_n(x) - \frac{1}{x} J_n'(x),$$

即

$$J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0. \quad (1.136)$$

(1.136) 式表明,  $J_n(x)$  为二阶微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (1.137)$$

的解. 这个方程就叫做白塞耳方程.

从 (1.136) 式可知,  $J_n(x)$  的二次微商可用  $J_n'(x)$ ,  $J_n(x)$  来表示. 因此,  $J_n(x)$  的高次微商都可化为  $J_n'(x)$  和  $J_n(x)$  的函数.

6. 前面是用级数定义的白塞耳函数, 而在天体力学中, 有时要用到定积分形式的白塞耳函数. 若令

$$i = \sqrt{-1}, \quad Z = \exp(\sqrt{-1} \theta),$$

则

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{2i} [\exp(\sqrt{-1} \theta) - \exp(-\sqrt{-1} \theta)] \\ &= \frac{1}{2i} (Z - Z^{-1}). \end{aligned}$$

代入  $U$  的式子中得

$$U = \exp(ix \sin \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) \exp(im\theta). \quad (1.138)$$

两端乘上  $\exp(-in\theta)$ , 再对  $\theta$  积分得

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \exp(ix \sin \theta - in\theta) d\theta \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) \int_0^{2\pi} \exp[i(m-n)\theta] d\theta, \end{aligned}$$

利用关系 ( $p$  为整数):

$$\int_0^{2\pi} \exp(ip\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos p\theta + i \sin p\theta) d\theta$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{若 } p \neq 0, \\ 2\pi & \text{若 } p = 0. \end{cases}$$

因此上式右端只剩下  $m = n$  的那项, 等于  $2\pi$ , 即得

$$\int_0^{2\pi} \exp(ix \sin \theta - in\theta) d\theta = 2\pi J_n(x).$$

上式左端的积分可分为两个, 即  $\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}$ , 后面一个用变换  $\theta \rightarrow 2\pi - \theta$  得

$$2\pi J_n(x) = \int_0^{\pi} \exp(ix \sin \theta - in\theta) d\theta + \exp(-2ni\pi)$$

$$\times \int_0^{\pi} \exp(in\theta - ix \sin \theta) d\theta. \quad (1.139)$$

但

$$\exp(-2ni\pi) = \cos(2n\pi) - i \sin(2n\pi) = 1,$$

$$\cos(n\theta - x \sin \theta) = \frac{1}{2} [\exp(in\theta - ix \sin \theta)$$

$$+ \exp(ix \sin \theta - in\theta)],$$

故 (1.139) 式成为

$$2\pi J_n(x) = 2 \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta,$$

或

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta. \quad (1.140)$$

这就是所要的结果.

## § 11 用白塞耳函数进行椭圆运动的展开

椭圆运动中的坐标, 向径以及其它的很多量都是  $M$  的周



期函数。从高等数学可知,只要这些函数满足一定的条件(狄氏条件),就可以展开为 $M$ 的三角级数。这里用到的函数都是符合展开条件的,故只提出结果,不再详细讨论。

设 $f(M)$ 为 $M$ 的周期函数,周期为 $2\pi$ ,并且满足展开成三角级数的条件,则可表为

$$f(M) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nM + B_n \sin nM), \quad (1.141)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \cos nM dM, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \sin nM dM. \end{aligned} \right\} \quad (1.142)$$

若 $f(M)$ 为偶函数,即 $f(-M) = f(M)$ ,则

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(M) \cos nM dM, \quad B_n = 0; \quad (1.143)$$

若 $f(M)$ 为奇函数,即 $f(-M) = -f(M)$ ,则

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(M) \sin nM dM, \quad (1.144)$$

下面就利用这些关系来进行展开。

1. 展开 $\cos kE$ 为 $M$ 的三角级数(其中 $k$ 为正整数)。由开普勒方程

$$E - e \sin E = M \quad (1.145)$$

可知,当 $M$ 增加 $2\pi$ 时, $E$ 也增加 $2\pi$ 。因此, $\cos kE$ 也是 $M$ 的周期函数,而且周期也是 $2\pi$ ,并是 $M$ 的偶函数。由(1.141), (1.143)式可得

$$\cos kE = \frac{1}{2} A_{k,0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{k,n} \cos nM, \quad (1.146)$$

$$\begin{aligned}
 A_{k,n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos kE \cos nM dM \\
 &= \frac{2}{\pi n} \left[ \cos kE \sin nM \right] \Big|_0^\pi + \frac{2k}{\pi n} \int_0^\pi \sin kE \sin nM dE.
 \end{aligned}$$

第一项为 0, 第二项中的  $M$  用 1.145 式代入得

$$\begin{aligned}
 A_{k,n} &= \frac{2k}{\pi n} \int_0^\pi \sin kE \sin (nE - ne \sin E) dE \\
 &= \frac{k}{\pi n} \int_0^\pi \cos [(n-k)E - ne \sin E] dE \\
 &\quad - \frac{k}{\pi n} \int_0^\pi \cos [(n+k)E - ne \sin E] dE.
 \end{aligned}$$

因此, 利用公式 (1.140) 式可得

$$A_{k,n} = \frac{k}{n} [J_{n-k}(ne) - J_{n+k}(ne)]. \quad (1.147)$$

而

$$A_{k,0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos kE dM,$$

用 (1.145) 式代入得

$$\begin{aligned}
 A_{k,0} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos kE (1 - e \cos E) dE \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos kE dE - \frac{e}{\pi} \int_0^\pi [\cos(k+1)E \\
 &\quad + \cos(k-1)E] dE \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{若 } k > 1, \\ -e & \text{若 } k = 1. \end{cases}
 \end{aligned} \quad (1.148)$$

故综合 (1.147), (1.148) 式可得:

当  $k > 1$  时,

$$\cos kE = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n} [J_{n-k}(ne) - J_{n+k}(ne)] \cos nM, \quad (1.149)$$

而

$$\begin{aligned}\cos E &= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)| \cos nM \\ &= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J'_n(ne) \cos nM \\ &= -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \frac{d}{de} J_n(ne) \cos nM. \quad (1.150)\end{aligned}$$

2. 展开  $\sin kE$  为  $M$  的三角级数. 因  $\sin kE$  为  $M$  的奇函数, 则有

$$\sin kE = \sum_{n=1}^{\infty} B_{k,n} \sin nM, \quad (1.151)$$

其中

$$\begin{aligned}B_{k,n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kE \sin nM dM \\ &= \frac{k}{\pi n} \int_0^{\pi} |\cos(kE + nM) + \cos(nM - kE)| dE \\ &= \frac{k}{n} [J_{n+k}(ne) + J_{n-k}(ne)].\end{aligned}$$

当  $k=1$  时, 利用关系 (1.133) 得

$$B_{1,n} = \frac{1}{n} [J_{n+1}(ne) + J_{n-1}(ne)] = \frac{2}{ne} J_n(ne),$$

因此可得:  $k > 1$  时,

$$\sin kE = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n} [J_{n+k}(ne) + J_{n-k}(ne)] \sin nM, \quad (1.152)$$

而

$$\sin E = \frac{2}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM. \quad (1.153)$$

3. 展开  $E$ ,  $a/r$ ,  $r/a$  为  $M$  的三角级数. 根据开普勒方

程和 (1.153) 式即得

$$E = M + e \sin E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM. \quad (1.154)$$

利用 (1.150) 式又可得

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= (1 - e \cos E) = 1 + \frac{e^2}{2} \\ &\quad - 2e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{d}{de} J_n(ne) \cos nM. \quad (1.155) \end{aligned}$$

又从开普勒方程知

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E},$$

故直接由 (1.154) 式可得

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e \cos E} = \frac{dE}{dM} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos nM. \quad (1.156)$$

4. 展开  $\xi = r \cos f$ ,  $\eta = r \sin f$  以及  $\cos f$ ,  $\sin f$  为  $M$  的三角级数. 由 (1.79), (1.80) 和 (1.150), (1.153) 式直接可得

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos f = a(\cos E - e) \\ &= -\frac{3ae}{2} + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{d}{de} J_n(ne) \cos nM, \\ \eta &= r \sin f = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \\ &= \frac{2a\sqrt{1 - e^2}}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM. \end{aligned} \right\} \quad (1.157)$$

又由关系

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

可知

$$e \cos f = -1 + \frac{a}{r} (1 - e^2).$$

用(1.156)式代入得

$$\begin{aligned} e \cos f &= -1 + (1 - e^2) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos nM \right] \\ &= -e^2 + 2(1 - e^2) \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos nM, \end{aligned}$$

因此,

$$\cos f = -e + \frac{2(1 - e^2)}{e} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos nM. \quad (1.158)$$

再由关系

$$M = E - e \sin E, \quad r = a(1 - e \cos E),$$

可知

$$\frac{dM}{dE} = (1 - e \cos E) = \frac{r}{a},$$

$$\frac{dr}{dE} = ae \sin E;$$

因此

$$\begin{aligned} r \sin f &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \frac{dr}{dE} \\ &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \frac{dr}{dM} \frac{dM}{dE} = \frac{r \sqrt{1 - e^2}}{ae} \frac{dr}{dM}, \end{aligned}$$

即

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ae} \frac{dr}{dM} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \frac{d}{dM} \left( \frac{r}{a} \right).$$

用(1.155)式代入可得

$$\sin f = 2\sqrt{1 - e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d}{de} J_n(ne) \sin nM. \quad (1.159)$$

5. 展开加速度分量  $\xi/r^3$ ,  $\eta/r^3$  为  $M$  的三角级数。由平面二体问题的运动方程知

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\mu \frac{\xi}{r^3}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{\mu\eta}{r^3}, \quad (1.160)$$

但

$$M = n(t - \tau) = \sqrt{\mu a^{-3}}(t - \tau),$$

因此

$$dM = \sqrt{\mu a^{-3}} dt.$$

于是

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu a^{-3} \frac{d^2\xi}{dM^2}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu a^{-3} \frac{d^2\eta}{dM^2}.$$

代入 (1.160) 式得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{r^3} &= -a^{-3} \frac{d^2\xi}{dM^2} = -\frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dM^2} \left( \frac{\xi}{a} \right), \\ \frac{\eta}{r^3} &= -\frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dM^2} \left( \frac{\eta}{a} \right). \end{aligned} \right\} (1.161)$$

再用 (1.157) 式代入即得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{r^3} &= \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{de} J_n(ne) \cos nM, \\ \frac{\eta}{r^3} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{a^2 e} \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(ne) \sin nM. \end{aligned} \right\} (1.162)$$

6. 展开  $r^2/a^2$  为  $M$  的三角级数。因为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dM} \left( \frac{r^2}{a^2} \right) &= \frac{2r}{a^2} \frac{dr}{dM} = \frac{2r}{a^2} \frac{dr}{dE} \frac{dE}{dM} \\ &= \frac{2r}{a^2} (ae \sin E) \cdot \frac{a}{r} = 2e \sin E, \end{aligned}$$

用 (1.153) 式代入知

$$\frac{d}{dM} \left( \frac{r^2}{a^2} \right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \sin nM,$$

对  $M$  积分可得

$$\frac{r^2}{a^2} = C - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_n(nc) \cos nM. \quad (1.163)$$

其中  $C$  为积分常数, 与  $M$  无关. 另外

$$\frac{r^2}{a^2} = (1 - e \cos E)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \cos E + \frac{e^2}{2} \cos 2E,$$

如用 (1.149), (1.150) 式代入, 可看出其中不含  $M$  的项为

$$1 + \frac{e^2}{2} - 2e \left( -\frac{e}{2} \right) = 1 + \frac{3}{2} e^2,$$

这就是积分常数  $C$ , 因而 (1.163) 式为

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3e^2}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_n(nc) \cos nM. \quad (1.164)$$

以上是用白塞耳函数展开椭圆运动中的各种量, 还有很多其他量也可以用这种方法展开, 不再一一列举.

## § 12 超几何级数和它的应用

展开为  $E$  或  $f$  的三角级数时要用到超几何级数, 主要用到它的定义和符号. 故对它本身不详细介绍. 下面形式的级数就叫超几何级数:

$$\begin{aligned} F(a, b, c, x) = & 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b(b+1)}{c(c+1)} x^2 \\ & + \frac{a(a+1)(a+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} x^3 \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (1.165)$$

其中  $a, b, c, x$  为任意实数. 容易看出, 只要  $c$  不是零或负整数时, 而且  $|x| < 1$ , 则级数为收敛. 若  $a, b$  中任一个为零或

负整数时,级数只有有限项.

为简单起见,定义符号

$$C_i^k = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-i+1)}{i!}, \quad (1.166)$$

其中  $i$  为正整数,  $k$  为任意实数. 则 (1.165) 式可改写为

$$F(a, b, c, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{-a} C_n^{-b} \times \frac{n!}{c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)} x^n. \quad (1.167)$$

当  $a, b, c$  都不是零或负整数时,上式为收敛的无穷级数. 下面就利用超几何级数进行展开.

1. 展开  $\left(\frac{r}{a}\right)^p \cos qf, \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin qf$  为  $E$  的三角级数 ( $q$  为正

整数,  $p$  为任意整数). 先讨论  $r, f$  同  $E$  的关系.

把三角函数化为指数函数,令

$$\begin{aligned} \xi &= \exp(if) = \cos f + i \sin f, \\ \eta &= \exp(iE) = \cos E + i \sin E, \end{aligned} \quad (1.168)$$

则

$$\begin{aligned} \xi^k &= \exp(ikf) = \cos kf + i \sin kf, \\ \xi^{-k} &= \exp(-ikf) = \cos kf - i \sin kf, \\ \eta^k &= \exp(ikE) = \cos kE + i \sin kE, \\ \eta^{-k} &= \exp(-ikE) = \cos kE - i \sin kE. \end{aligned}$$

因此

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{itg} \frac{E}{2} &= \frac{i \sin \frac{E}{2}}{\cos \frac{E}{2}} = \frac{\eta^{1/2} - \eta^{-1/2}}{\eta^{1/2} + \eta^{-1/2}} = \frac{\eta - 1}{\eta + 1}; \\ \operatorname{itg} \frac{f}{2} &= \frac{\xi - 1}{\xi + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.169)$$

同理

另外,若令  $e = \sin \varphi$ ,



$$\beta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

则由三角函数关系知

$$e = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

并可解出

$$\beta = \frac{1}{e} (1 - \sqrt{1 - e^2}) = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

(1.170)

但  $E, f$  有关系 (1.83), 即

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

用 (1.169), (1.170) 式代入得

$$\frac{\xi - 1}{\xi + 1} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \frac{\eta - 1}{\eta + 1},$$

由此可解出

$$\xi = \frac{\eta - \beta}{1 - \beta\eta} = \frac{\eta(1 - \beta\eta^{-1})}{1 - \beta\eta}, \quad (1.171)$$

$$\eta = \frac{\xi + \beta}{1 + \beta\xi} = \frac{\xi(1 + \beta\xi^{-1})}{1 + \beta\xi}. \quad (1.172)$$

这就是  $E, f$  之间的指数函数关系. 另外,

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= (1 - e \cos E) = 1 - \frac{2\beta}{1 + \beta^2} \cos E \\ &= 1 - \frac{\beta}{1 + \beta^2} (\eta + \eta^{-1}) = \frac{(1 - \beta\eta)(1 - \beta\eta^{-1})}{1 + \beta^2}, \end{aligned} \quad (1.173)$$

$$\frac{r}{a} = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f} = \frac{(1 - \beta^2)^2}{1 + \beta^2} \frac{1}{(1 + \beta\xi)(1 + \beta\xi^{-1})}. \quad (1.174)$$

因  $\left(\frac{r}{a}\right)^p \cos qf, \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin qf$  分别为  $\left(\frac{r}{a}\right)^p \xi^q$  的实数和虚

数部分, 故只要展开  $\left(\frac{r}{a}\right)^p \xi^q$  就行了. 由 (1.171), (1.173)

式可知

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p \xi^a = (1 + \beta^2)^{-r} \eta^a (1 - \beta\eta)^{p-a} (1 - \beta\eta^{-1})^{p+a}. \quad (1.175)$$

利用二项式公式可得

$$(1 - \beta\eta)^{p-a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n^{p-a} \beta^n \eta^n,$$

$$(1 - \beta\eta^{-1})^{p+a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n^{p+a} \beta^n \eta^{-n}.$$

因此

$$\begin{aligned} (1 - \beta\eta)^{p-a} (1 - \beta\eta^{-1})^{p+a} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{p-a} C_k^{p+a} \beta^{2k} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \eta^n (C_n^{p-a} \beta^n + C_{n+1}^{p-a} C_1^{p+a} \beta^{n+2} + \dots) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \eta^{-m} (C_m^{p+a} \beta^m + C_{m+1}^{p+a} C_1^{p-a} \beta^{m+2} + \dots) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{p-a} C_k^{p+a} \beta^{2k} \end{aligned} \quad (1.176)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta\eta)^n \left[ C_n^{p-a} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{n+k}^{p-a} C_k^{p+a} \beta^{2k} \right] \quad (1.177)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (-\beta\eta^{-1})^m \left[ C_m^{p+a} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{m+k}^{p+a} C_k^{p-a} \beta^{2k} \right], \quad (1.178)$$

式中求和符号  $\sum_{n=1}^{\infty}$  等表示从  $n=1$  开始, 不一定取到  $n=\infty$ ,

可能只有有限项. 上式的三个部分分别讨论, 先讨论 (1.177) 式. 由关系

$$\begin{aligned} C_{n+k}^s &= [s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1) \\ &\quad \times (s-n)(s-n-1)\cdots(s-n-k+1)] / (n+k)! \\ &= \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{(s-n)(s-n-1)\cdots(s-n-k+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \\ & = C_n^{p-q} C_k^{q-n} \frac{k!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \end{aligned}$$

则 (1.177) 式的方括号中的量可写为

$$C_n^{p-q} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{p+q} C_k^{q-n} \frac{k!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \beta^{2k} \right].$$

同 (1.167) 式比较可知, 上式即为

$$C_n^{p-q} F(-p-q, -p+q+n, n+1, \beta^2).$$

为简单起见, 定义符号

$$G_n(p, q) = F(-p-q, -p+q+n, n+1, \beta^2), \quad (1.179)$$

则 (1.177) 式可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\beta\eta)^n G_n(p, q) C_n^{p-q}. \quad (1.180)$$

同理, (1.178) 式可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\beta\eta^{-1})^n G_n(p, -q) C_n^{p+q}. \quad (1.181)$$

在 (1.177) 式中, 令  $n=0$ , 即为 (1.176) 式. 故 (1.176) 式就是

$$G_0(p, q). \quad (1.182)$$

由 (1.180), (1.181), (1.182) 式可得

$$\begin{aligned} (1-\beta\eta)^{p-q} (1-\beta\eta^{-1})^{p+q} &= G_0(p, q) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{p-q} \\ &\times G_n(p, q) (-\beta\eta)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{p+q} G_n(p, -q) (-\beta\eta^{-1})^n. \end{aligned} \quad (1.183)$$

代入 (1.175) 式后知

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p \xi^q = (1+\beta^2)^{-p} G_0(p, q) \eta^q$$

$$\begin{aligned}
& + (1 + \beta^2)^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n C_n^{p-q} G_n(p, q) \eta^{q+n} \\
& + (1 + \beta^2)^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n C_n^{p+q} G_n(p, -q) \eta^{q-n}.
\end{aligned} \tag{1.184}$$

故分别取实数和虚数部分得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^p \cos qf & = A_0 \cos qE + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(q+n)E \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(q-n)E,
\end{aligned} \tag{1.185}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^p \sin qf & = A_0 \sin qE + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(q+n)E \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(q-n)E.
\end{aligned} \tag{1.186}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
A_0 & = (1 + \beta^2)^{-p} G_0(p, q), \\
A_n & = (1 + \beta^2)^{-p} (-\beta)^n C_n^{p-q} G_n(p, q), \\
B_n & = (1 + \beta^2)^{-p} (-\beta)^n C_n^{p+q} G_n(p, -q).
\end{aligned} \right\} \tag{1.187}$$

这就是所要的展开式。下面从它们推出一些特殊的结果。

2. 展开  $\left(\frac{r}{a}\right)^p \cos pf$ ,  $\left(\frac{r}{a}\right)^p \sin pf$  为  $E$  的三角级数。这是上面的特例, 即  $q = p$  的情况。

当  $q = p$  时,  $p - q = 0$ , 因而  $C_n^{p-q} = 0$ , 故由 (1.187) 式知  $A_n = 0$ 。

又由

$$\begin{aligned}
G_0(p, p) & = F(-2p, 0, 1, \beta^2) = 1, \text{ 即 } A_0 = (1 + \beta^2)^{-p}; \\
G_n(p, -p) & = F(0, -2p + n, n + 1, \beta^2) = 1, \text{ 即} \\
B_n & = (1 + \beta^2)^{-p} (-\beta)^n C_n^{2p};
\end{aligned}$$

因此从 (1.185) — (1.187) 式可得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^p \cos pf &= (1 + \beta^2)^{-p} \left[ \cos pE \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n C_n^{2p} \cos (p - n)E \right], \\ \left(\frac{r}{a}\right)^p \sin pf &= (1 + \beta^2)^{-p} \left[ \sin pE \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n C_n^{2p} \sin (p - n)E \right]. \end{aligned} \right\} (1.188)$$

当  $p$  为正整数时, (1.188) 式为有限项, 到  $n = 2p$  为止.

3. 展开  $\left(\frac{r}{a}\right)^p$  为  $E$  的三角级数. 这是 (1.185) 式中  $q = 0$

的情况. 由 (1.187) 式知,  $q = 0$  时有

$$\left. \begin{aligned} A_n &= B_n = (1 + \beta^2)^{-p} (-\beta)^n C_n^{2p} G_n(p, 0) \\ &= (1 + \beta^2)^{-p} (-\beta)^n C_n^{2p} F(-p, \\ &\quad -p + n, n + 1, \beta^2), \\ \text{记为 } A'_n; \\ A_0 &= (1 + \beta^2)^{-p} G_0(p, 0) = (1 + \beta^2)^{-p} \\ &\quad \times F(-p, -p, 1, \beta^2), \end{aligned} \right\} (1.189)$$

记为  $A'_0$ .

则

$$\left(\frac{r}{a}\right)^p = A'_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \cos nE. \quad (1.190)$$

当  $p$  为正整数时, 上式为有限项, 到  $n = p$  为止.

当  $p = -1$  时, 由 (1.189) 式知, 相应的

$$\begin{aligned} A'_0 &= (1 + \beta^2) F(1, 1, 1, \beta^2) = (1 + \beta^2) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{2k}\right) \\ &= \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}; \end{aligned}$$

由于  $C_n^{-1} = (-1)^n$ , 则

$$\begin{aligned} A_n' &= (1 + \beta^2)\beta^n F(1, n+1, n+1, \beta^2) \\ &= (1 + \beta^2)\beta^n \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{2k}\right) = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \beta^n. \end{aligned}$$

因此可得

$$\frac{a}{r} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \cos nE\right).$$

如用  $e, \beta$  的关系(1.170)式代入得

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\right)^n \cos nE\right], \quad (1.191)$$

4. 展开  $\cos qf, \sin qf$  为  $E$  的三角级数, 这是在(1.185) — (1.187) 式中, 令  $p = 0$  的情况. 展开式可写为

$$\left. \begin{aligned} \cos qf &= A_0'' \cos qE + \sum_{n=1}^{\infty} A_n'' \cos(q+n)E \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_n'' \cos(q-n)E, \\ \sin qf &= A_0'' \sin qE + \sum_{n=1}^{\infty} A_n'' \sin(q+n)E \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B_n'' \sin(q-n)E. \end{aligned} \right\} \quad (1.192)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_0'' &= G_0(0, q) = F(-q, q, 1, \beta^2), \\ A_n'' &= (-\beta)^n C_n^{-q} G_n(0, q), \\ B_n'' &= (-\beta)^n C_n^q G_n(0, -q). \end{aligned} \right\} \quad (1.193)$$

当  $q = 1$  时, 由于  $C_n^{-1} = (-1)^n$ ,  $C_1^1 = 1$ ; 若  $n > 1$ , 则  $C_n^1 = 0$ . 故相应的

$$\begin{aligned} A_0'' &= F(-1, 1, 1, \beta^2) = 1 - \beta^2, \\ A_n'' &= \beta^n F(-1, n+1, n+1, \beta^2) = (1 - \beta^2)\beta^n, \end{aligned}$$

$$B_1'' = -\beta G_1(0, -1) = -\beta F(1, 0, 2, \beta^2) = -\beta,$$

$$B_n'' = 0. \quad (n > 1)$$

于是可得

$$\left. \begin{aligned} \cos f &= -\beta + (1 - \beta^2) \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} \cos nE, \\ \sin f &= (1 - \beta^2) \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} \sin nE. \end{aligned} \right\} (1.194)$$

5. 展开  $E$  的函数为  $f$  的三角级数. 前面讨论的很多结果, 可以用来展开  $E$  的函数为  $f$  的三角级数. 因为由(1.171), (1.172) 式可知

$$\eta = \frac{\xi(1 + \beta\xi^{-1})}{1 + \beta\xi}, \quad \xi = \frac{\eta(1 - \beta\eta^{-1})}{1 - \beta\eta}.$$

故当  $\xi \rightarrow \eta$ ,  $\eta \rightarrow \xi$  时, 只要把  $\beta \rightarrow -\beta$  就行了. 因此, 如已知  $F(\xi)$  展为  $\eta$  的级数, 则  $F(\eta)$  展为  $\xi$  的级数就可以求出, 只要把前面级数中的  $\beta \rightarrow -\beta$  就行了. 利用这个性质, 就可以把很多  $E$  的函数直接展为  $f$  的三角级数. 例如, 利用(1.192) 式直接可得

$$\left. \begin{aligned} \cos qE &= A_0'' \cos qf + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(q+n)f \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(q-n)f, \\ \sin qE &= A_0'' \sin qf + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(q+n)f \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(q-n)f. \end{aligned} \right\} (1.195)$$

其中  $D_n, E_n$  就是(1.193) 式中的  $A_n'', B_n''$ , 只是把其中的  $\beta \rightarrow -\beta$ , 即

$$D_n = (-1)^n A_n'', \quad E_n = (-1)^n B_n''. \quad (1.196)$$

同样, 从(1.194) 式直接可得

$$\left. \begin{aligned} \cos E &= \beta + (1 - \beta^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \beta^{n-1} \cos nf, \\ \sin E &= (1 - \beta^2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \beta^{n-1} \sin nf. \end{aligned} \right\} (1.197)$$

6.  $f$  展为  $E$ ,  $E$  展为  $f$  的三角级数. 利用 (1.171) 式知

$$\xi = \frac{\eta(1 - \beta\eta^{-1})}{1 - \beta\eta}.$$

根据  $\xi, \eta$  的定义 (1.144) 式, 则上式两端取自然对数可得

$$if = iE + \log(1 - \beta\eta^{-1}) - \log(1 - \beta\eta).$$

由于  $\beta < e < 1, |\eta| = 1$ , 故上面的对数函数可以展开为幂级数, 即为

$$\begin{aligned} if &= iE - \beta\eta^{-1} - \frac{1}{2} \beta^2 \eta^{-2} - \frac{1}{3} \beta^3 \eta^{-3} + \dots \\ &\quad + \beta\eta + \frac{1}{2} \beta^2 \eta^2 + \frac{1}{3} \beta^3 \eta^3 + \dots \\ &= iE + \beta(\eta - \eta^{-1}) + \frac{\beta^2}{2} (\eta^2 - \eta^{-2}) \\ &\quad + \frac{\beta^3}{3} (\eta^3 - \eta^{-3}) + \dots \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} f &= E + 2\beta \sin E + \frac{2\beta^2}{2} \sin 2E + \frac{2\beta^3}{3} \sin 3E + \dots \\ &= E + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE, \end{aligned} \quad (1.198)$$

同样

$$E = f + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n} \sin nf. \quad (1.199)$$



(1.198), (1.199) 式是很重要的结果, 虽然不用超几何级数, 仍附于此.

### § 13 直角坐标展为时间的幂级数

在时间间隔不长时, 可以把直角坐标展为时间的幂级数. 由二体问题的运动方程 (1.3) 知

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3}. \quad (1.200)$$

为简单起见, 令

$$\tau = \sqrt{\mu} t, \quad (1.201)$$

则 (1.200) 式成为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}. \quad (1.202)$$

设在  $\tau = 0$  时, 坐标和向径记为  $(x, y, z)$  和  $r$ ; 而在时刻  $\tau$  时, 记为  $(x', y', z')$  和  $r'$ . 当  $\tau$  不太大时, 可用幂级数展开, 即

$$x' = x + \tau \frac{dx}{d\tau} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\tau^3}{3!} \frac{d^3x}{d\tau^3} + \frac{\tau^4}{4!} \frac{d^4x}{d\tau^4} + \dots, \quad (1.203)$$

$y, z$  的式子相同. 其中  $x$  的各级微商都是对应于  $\tau = 0$  的值. 利用 (1.202) 式, 可以把二阶和高阶微商化为一阶和没有微商的项. 但转化过程中要出现  $r$  的微商, 先推出有关的式子. 由于

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

则

$$r \frac{dr}{d\tau} = x \frac{dx}{d\tau} + y \frac{dy}{d\tau} + z \frac{dz}{d\tau}. \quad (1.204)$$

故  $dr/d\tau$  可用  $x, y, z$  的一次微商来表示. 时间改为  $\tau$  后, 活力公式成为

$$v^2 = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}. \quad (1.205)$$

则 (1.204) 式再对  $\tau$  求一次微商得

$$r \frac{d^2r}{d\tau^2} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = v^2 + x \frac{d^2x}{d\tau^2} + y \frac{d^2y}{d\tau^2} + z \frac{d^2z}{d\tau^2}.$$

再用 (1.202) 式代入得

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{1}{r} \left[ v^2 - \frac{1}{r} - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \right]. \quad (1.206)$$

又由 (1.205) 式可知

$$\frac{dv^2}{d\tau} = -\frac{2}{r^2} \frac{dr}{d\tau}. \quad (1.207)$$

利用 (1.202) — (1.207) 式, 可求出高阶微商的表达式:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = \frac{3x}{r^4} \frac{dr}{d\tau} - \frac{1}{r^3} \frac{dx}{d\tau},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4x}{d\tau^4} &= -\frac{12x}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{3x}{r^4} \frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{6}{r^4} \frac{dr}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} - \frac{1}{r^3} \frac{d^2x}{d\tau^2} \\ &= \left[ -\frac{2}{r^6} - \frac{15}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{3v^2}{r^5} \right] x + \left( \frac{6}{r^4} \frac{dr}{d\tau} \right) \frac{dx}{d\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5x}{d\tau^5} &= \left[ \frac{30}{r^7} \frac{dr}{d\tau} + \frac{105}{r^6} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^3 - \frac{45}{r^6} \frac{dr}{d\tau} v^2 \right] x \\ &\quad + \left[ \frac{9}{r^5} v^2 - \frac{8}{r^6} - \frac{45}{r^5} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau}, \end{aligned}$$

$$\frac{d^6x}{d\tau^6} = \left[ -\frac{22}{r^9} + \frac{66}{r^8} v^2 - \frac{45}{r^7} v^4 - \frac{420}{r^8} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{945}{r^7} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^4 \right] x$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{630}{r^7} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 v^2 \Big] x + \left[ \frac{150}{r^7} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) \right. \\
& \left. + \frac{420}{r^6} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^3 - \frac{180}{r^6} v^2 \frac{dr}{d\tau} \right] \frac{dx}{d\tau}, \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

代入(1.203)式后按  $x$  和  $dx/d\tau$  整理得

$$\left. \begin{aligned}
& x' = Fx + G \frac{dx}{d\tau}, \\
& \text{同理} \quad y' = Fy + G \frac{dy}{d\tau}, \\
& z' = Fz + G \frac{dz}{d\tau}.
\end{aligned} \right\} \quad (1.208)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
F &= 1 - \frac{\tau^2}{2r^3} + \frac{\tau^3}{2r^4} \frac{dr}{d\tau} + \frac{\tau^4}{24} \left[ -\frac{2}{r^6} \right. \\
& \left. - \frac{15}{r^5} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{3v^2}{r^5} \right] + \frac{\tau^5}{120} \left[ \frac{30}{r^7} \frac{dr}{d\tau} \right. \\
& \left. + \frac{105}{r^6} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^3 - \frac{45}{r^6} v^2 \frac{dr}{d\tau} \right] + \frac{\tau^6}{720} \\
& \times \left[ -\frac{22}{r^9} + \frac{66}{r^8} v^2 - \frac{45}{r^7} v^4 - \frac{420}{r^6} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right. \\
& \left. - \frac{945}{r^7} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^4 + \frac{630}{r^7} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 v^2 \right] + \dots \\
G &= \tau - \frac{\tau^3}{6r^3} + \frac{\tau^4}{4r^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) + \frac{\tau^5}{120} \left[ \frac{9}{r^5} v^2 - \frac{8}{r^6} \right. \\
& \left. - \frac{45}{r^5} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right] + \frac{\tau^6}{720} \left[ \frac{150}{r^7} \frac{dr}{d\tau} \right. \\
& \left. + \frac{420}{r^6} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^3 - \frac{180}{r^6} v^2 \frac{dr}{d\tau} \right] + \dots
\end{aligned} \right\} \quad (1.209)$$

如有三个时刻  $t_1, t_2, t_3$  的坐标为  $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ .  
若以  $t_1$  为时间起算点, 令

$$\tau_2 = \sqrt{\mu}(t_2 - t_1), \quad \tau_3 = \sqrt{\mu}(t_3 - t_1), \quad (1.210)$$

则当  $\tau_3, \tau_1$  较小时,  $t_1, t_3$  时刻的坐标可以用  $t_2$  时刻的坐标  $(x_2, y_2, z_2)$  和速度

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_2, \left(\frac{dy}{d\tau}\right)_2, \left(\frac{dz}{d\tau}\right)_2$$

表示出来, 即

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= F_1 x_2 + G_1 \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_2, & x_3 &= F_3 x_2 + G_3 \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_2, \\ y_1 &= F_1 y_2 + G_1 \left(\frac{dy}{d\tau}\right)_2, & y_3 &= F_3 y_2 + G_3 \left(\frac{dy}{d\tau}\right)_2, \\ z_1 &= F_1 z_2 + G_1 \left(\frac{dz}{d\tau}\right)_2; & z_3 &= F_3 z_2 + G_3 \left(\frac{dz}{d\tau}\right)_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.211)$$

其中  $F_1, G_1$  为 (1.209) 式中令  $\tau = -\tau_3$  的结果;  $F_3, G_3$  为令  $\tau = \tau_1$  所得的结果. 里面的  $dr/d\tau, v$  等都是对应于  $t = t_2$  时的值.

## § 14 拉格朗日级数和它的应用

在椭圆运动的各种展开式中, 有时要用到直接展开为偏心率  $e$  的幂级数, 系数为平近点角  $M$  的三角多项式. 这样的展开式是以开普勒方程作基础, 需要用到拉格朗日 (Lagrange) 级数. 下面对这种级数简单介绍一下.

设  $y$  为  $x$  的函数, 关系为

$$y = x + \alpha \phi(y). \quad (1.212)$$

其中  $0 < \alpha < 1$ , 为系数;  $\phi(y)$  为  $y$  的解析函数. 下面把  $y$  的任一解析函数  $F(y)$  展开成  $\alpha$  的幂级数, 系数为  $x$  的函数.

先用马克劳林 (Maclaurin) 级数展开  $F(y)$  为  $\alpha$  的幂级数得

$$F(y) = (F)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}\right)_0. \quad (1.213)$$

式中的  $F$  和它的偏微商外面的足码“0”表示令  $\alpha = 0$ .

为简单起见,用  $A$  表示对  $\alpha$  求偏微商的运算符号,即

$$AF = \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad A^n F = \frac{\partial^n F}{\partial \alpha^n}. \quad (1.214)$$

则(1.213)式成为

$$F(y) = (F)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (A^n F)_0. \quad (1.215)$$

再用  $D$  表示对  $x$  求偏微商的符号,即

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Dy = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad D^n F = \frac{\partial^n F}{\partial x^n}, \dots \quad (1.216)$$

由于  $y$  是  $\alpha, x$  的函数,故由(1.212)式可得

$$Ay = \phi(y) + \alpha A\phi(y) = \phi(y) + \alpha \frac{d\phi}{dy} Ay, \quad (1.217)$$

$$Dy = 1 + \alpha D\phi(y) = 1 + \alpha \frac{d\phi}{dy} Dy. \quad (1.218)$$

用  $\phi(y)$  乘(1.218)式再同(1.217)式相减可得

$$(Ay - \phi Dy) \left( 1 - \alpha \frac{d\phi}{dy} \right) = 0.$$

这两个因子中至少有一个等于 0, 若

$$1 - \alpha \frac{d\phi}{dy} = 0,$$

则  $\alpha\phi = y + \text{常数}$ , 即  $\phi$  成为  $y$  的线性函数, 失去一般性. 故若不讨论  $\phi$  是  $y$  的线性函数时, 只有

$$Ay - \phi Dy = 0,$$

即

$$Ay = \phi Dy. \quad (1.219)$$

(1.219)式就给出了两种运算符号  $A$  和  $D$  的关系, 于是可得

$$AF(y) = \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{dF}{dy} Ay = \phi \frac{dF}{dy} Dy,$$

$$DF(y) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dy} Dy.$$

则由此二式比较得到下面关系:

$$AF = \phi DF. \quad (1.220)$$

由此可推出

$$A^2F = A(\phi DF) = A\phi \cdot DF + \phi A(DF).$$

但因  $\alpha$  与  $x$  无关, 两个运算符号  $A, D$  也相互独立, 因而可以变换次序, 即

$$A(DF) = D(AF).$$

故利用 (1.220) 式可把上式化为

$$\begin{aligned} A^2F &= \phi D\phi \cdot DF + \phi \cdot D(AF) \\ &= D\phi \cdot \phi DF + \phi \cdot D(\phi DF) \\ &= D(\phi \cdot \phi DF) = D(\phi^2 DF). \end{aligned}$$

用数学归纳法可证明

$$A^n F = D^{n-1}(\phi^n DF). \quad (1.221)$$

而当  $\alpha = 0$  时, 由 (1.212) 式知,  $y = x$ , 因此

$$\begin{aligned} [F(y)]_0 &= F(x), \quad [\phi(y)]_0 = \phi(x), \\ [A^n F]_0 &= [D^{n-1}(\phi^n DF)]_0 = D^{n-1}[\phi^n(x)DF'(x)], \end{aligned}$$

代入 (1.215) 式后得

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} D^{n-1}[\phi^n(x)DF(x)] \\ &= F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[ \phi^n(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right]. \quad (1.222) \end{aligned}$$

(1.222) 式就叫做拉格朗日级数. 关于它的收敛范围将在下节讲.

现在就利用拉格朗日级数对椭圆运动进行展开, 由开普勒方程知

$$E = M + e \sin E. \quad (1.223)$$

它同 (1.212) 式的形式相同, 即  $y = E, x = M, \alpha = e$ ; 故可

以利用拉格朗日级数把  $E$  的函数展开为  $e$  的幂级数, 系数为  $M$  的函数.

1. 展开  $E$  为  $e$  的幂级数. 此时  $F(E) = E$ ,  $\phi(E) = \sin E$ , 以及

$$F(x) = M, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial M} = 1.$$

故由 (1.222) 式可得

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} (\sin^n M). \quad (1.224)$$

此式由于经常用到, 现推出展开到  $e^6$  的具体结果如下:

$$\begin{aligned} E = & M + e \sin M + \frac{e^2}{2!} \sin 2M \\ & + \frac{e^3}{3!} (3^2 \sin 3M - 3 \sin M) \\ & + \frac{e^4}{4!} (4^3 \sin 4M - 4 \times 2^3 \sin 2M) \\ & + \frac{e^5}{5!} \left( 5^4 \sin 5M - 5 \times 3^4 \sin 3M + \frac{5 \times 4}{2} \sin M \right) \\ & + \frac{e^6}{6!} \left( 6^5 \sin 6M - 6 \times 4^3 \sin 4M + \frac{6 \times 5}{2} \right. \\ & \left. \times 2^5 \sin 2M \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.225)$$

2. 展开  $\cos E$ ,  $\sin E$  为  $e$  的幂级数. 当  $F(E) = \cos E$  时, 则有

$$\begin{aligned} \cos E = & \cos M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left( \sin^n M \frac{d \cos M}{dM} \right) \\ = & \cos M - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left( \sin^{n+1} M \right). \end{aligned} \quad (1.226)$$

当  $F(E) = \sin E$  时有

$$\begin{aligned} \sin E &= \sin M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} \left( \sin^n M \frac{d \sin M}{dM} \right) \\ &= \sin M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!} \frac{\partial^n}{\partial M^n} (\sin^{n+1} M). \end{aligned} \quad (1.227)$$

3. 展开  $r/a$  为  $e$  的幂级数. 由于

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E,$$

故以 (1.226) 式代入, 整理出到  $e^6$  的项得

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial M^{n-1}} (\sin^{n+1} M) \\ &= 1 - e \cos M - \frac{e^2}{2} (\cos 2M - 1) \\ &\quad - \frac{e^3}{2^2 \times 2!} (3 \cos 3M - 3 \cos M) \\ &\quad - \frac{e^4}{2^3 \times 3!} (4^2 \cos 4M - 4 \times 2^2 \cos 2M) \\ &\quad - \frac{e^5}{2^4 \times 4!} \left( 5^3 \cos 5M - 5 \times 3^3 \cos 3M + \frac{5 \times 4}{2} \cos M \right) \\ &\quad - \frac{e^6}{2^5 \times 5!} \left( 6^4 \cos 6M - 6 \times 4^4 \cos 4M + \frac{6 \times 5}{2} \right. \\ &\quad \left. \times 2^4 \cos 2M \right) - \dots \end{aligned} \quad (1.228)$$

以上是几个展开式的例子, 其他很多  $E$  的函数都可以用拉格朗日级数展开为  $e$  的幂级数.

## § 15 拉格朗日级数的收敛范围, 偏心率的极限

现在就来讨论拉格朗日级数的收敛范围. 由于这种级数



比较特殊, 所得的结论又是天体力学中常用的, 故虽然较难, 也应该讨论清楚. 在讨论时需要把有关量看成复变量, 并要用一些复变函数中的哥西积分和留数理论知识, 这在任何一本复变函数书中都可查到.

设复变量  $y$  由下式确定, 即

$$y = x + \alpha\phi(y). \quad (1.229)$$

其中  $\phi(y)$  为  $y$  的解析函数,  $x, \alpha$  为复数. 先把结论叙述如下:

定理: 由 (1.229) 式得到的拉格朗日级数

$$F(y) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[ \phi^n(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right]$$

的收敛条件为

$$\left| \frac{\alpha\phi(y)}{y-x} \right| < 1. \quad (1.230)$$

要证明这个定理, 要先证明下面的三个预备定理.

预备定理 1. 若  $\phi(z)$  为某一个单连通域内的半纯函数, 并在此域的边界  $C$  上为解析; 并设  $\phi(z)$  在此域内有  $k$  个零点, 它们的级分别为  $r_1, r_2, \dots, r_k$ ; 设还有  $l$  个极点, 它们的级分别为  $s_1, s_2, \dots, s_l$ . 令  $\Delta\Phi$  表示  $\phi(z)$  的幅角  $\Phi$  在  $z$  沿边界  $C$  的正方向转一周时的增量, 则有

$$\sum_{p=1}^k r_p - \sum_{q=1}^l s_q = \frac{\Delta\Phi}{2\pi}. \quad (1.231)$$

证: 由留数(或叫残数)理论可知, 若  $f(z)$  为  $C$  上及其内部的解析函数, 则有关系:

$$\sum_{p=1}^k r_p f(a_p) - \sum_{q=1}^l s_q f(b_q) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz. \quad (1.232)$$

其中  $\phi'(z)$  即  $\phi(z)$  对  $z$  的微商,  $a_p, b_p$  即为  $\phi(z)$  在  $C$  内部

的零点和极点.

当  $f(z) \equiv 1$  时, (1.232) 式简化为

$$\sum_{p=1}^k r_p - \sum_{q=1}^l s_q = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \Delta \log \phi(z). \quad (1.233)$$

其中  $\Delta \log \phi(z)$  表示  $z$  沿  $C$  正方向转一圈时, 对数函数  $\log \phi(z)$  的增量. 若用  $R, \Phi$  表示复变量  $\phi(z)$  的模和幅角, 则

$$\phi(z) = R \exp(i\Phi),$$

即

$$\log \phi(z) = \log R + i\Phi.$$

但  $C$  为闭曲线, 故  $\Delta \log R = 0$ , 因此有

$$\Delta \log \phi(z) = i\Delta\Phi.$$

代入 (1.233) 式即得 (1.231) 式, 故预备定理 1 成立.

预备定理 2. 若  $f(z), \phi(z)$  为  $C$  上和  $C$  内部的解析函数, 并且  $f(z)$  在  $C$  上不等于 0, 以及在  $C$  上有

$$\left| \frac{\phi(z)}{f(z)} \right| < 1, \quad (1.234)$$

则  $f(z)$  和  $f(z) + \phi(z)$  在  $C$  内部有同样多的零点 ( $n$  级的零点算  $n$  个零点).

证: 用符号

$$w = 1 + \frac{\phi(z)}{f(z)} = \frac{f(z) + \phi(z)}{f(z)}.$$

由于在  $C$  上有关系 (1.234), 故当  $z$  沿  $C$  正方向转一周时,  $w$  应在  $+1$  点附近变化, 不会绕原点旋转. 因此, 当  $z$  沿  $C$  正方向转一周时,  $w$  的幅角增量为 0, 也就是  $f(z)$  和  $f(z) + \phi(z)$  的幅角增量相等. 又由于  $\phi(z)$  和  $f(z)$  在  $C$  内都是解析函数, 故它们在  $C$  内都没有极点. 于是从预备定理 1 可知,  $f(z) + \phi(z)$  和  $f(z)$  在  $C$  内的零点数目相同 ( $n$  级零点算  $n$  个

零点),故此预备定理得到证明.

预备定理 3. 设  $f(z)$  在域  $|z| < r$  内为解析函数,并当  $z = 0$  时  $f(z) \neq 0$ , 则存在一个正实数  $\rho$ , 使得  $|w| \leq \rho$  时, 函数  $\phi(z, w) = z - wf(z)$  (看成  $z$  的函数) 在圆  $|z| = r' < r$  的内部只有一个零点(是  $w$  的函数), 并且这个零点在域  $|w| \leq \rho$  中是  $w$  的解析函数.

证: 由于  $f(z)$  在  $|z| < r$  为解析, 故当  $|z| = r' < r$  时, 可以找出一个正实数  $\rho$ , 使得  $|w| \leq \rho$  时有

$$|\phi(z, w) - \phi(z, 0)| = |wf(z)| < r',$$

因此在圆  $|z| = r'$  上有

$$\left| \frac{\phi(z, w) - \phi(z, 0)}{\phi(z, 0)} \right| = \left| \frac{wf(z)}{z} \right| < 1. \quad (1.235)$$

由于函数  $z, f(z)$  在圆  $|z| = r'$  上或内部都是解析函数,符合预备定理 2 的条件. 故从预备定理 2 可知,  $\phi(z, w)$  和  $\phi(z, 0)$  在圆  $|z| = r'$  内部有同样多的零点. 但函数  $\phi(z, 0) = z$ ; 在  $|z| = r'$  内只有一个一级零点 ( $z = 0$ ); 故  $\phi(z, w)$  在  $|z| = r'$  内也只有一个一级零点, 设为  $\xi$ . 由于它们都是解析函数,因而没有极点, 故在 (1.232) 式中令  $f(z) = z, \phi(z) = \phi(z, w)$ , 可得

$$\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{\frac{\partial}{\partial z} \phi(z, w)}{\phi(z, w)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{1 - wf'(z)}{z - wf(z)} dz. \quad (1.236)$$

其中积分线  $C$  为圆周  $|z| = r'$ . 由于积分号内的函数是  $w$  的解析函数, 故  $\xi$  也在  $|w| \leq \rho$  内为  $w$  的解析函数, 即此预备定理成立.

下面就利用这个预备定理来讨论拉格朗日级数的收敛性问题. 若  $F(z)$  在  $|z| < r$  内为解析函数, 由 (1.232) 式直接可得

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) \frac{1 - wf'(z)}{z - wf(z)} dz. \quad (1.237)$$

因为  $\xi$  为  $\psi(z, w) = z - wf(z) = 0$  的解(零点), 故仍可记为  $z$ , 由 (1.237) 式可知

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) \frac{1 - wf'(z)}{z - wf(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) [1 - wf'(z)] \frac{1}{z} \left[ 1 - \frac{wf(z)}{z} \right]^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) [1 - wf'(z)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n f^n(z)}{z^{n+1}} dz. \end{aligned}$$

由于 (1.235) 式成立, 故上面级数为绝对收敛; 否则为发散. 上式按  $w$  的幂次整理得

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} F(z) \frac{d}{dz} \left[ \frac{f^n(z)}{z^n} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z} dz - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} \int_C \frac{d}{dz} \left[ F(z) \frac{f^n(z)}{z^n} \right] dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} \int_C F'(z) \frac{f^n(z)}{z^n} dz. \quad (1.238) \end{aligned}$$

由于  $F(z)$  为  $C$  内部的解析函数, 故由哥西积分知: (1.238) 式第一项即为  $F(0)$ ; 第二项积分后等于 0; 第三项的被积函数有一个  $n$  级极点  $z = 0$ , 它在  $C$  的内部(原点), 根据留数计算公式可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F'(z) \frac{f^n(z)}{z^n} dz = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [F'(z)f^n(z)] \right\}_{z=0}.$$

代入 (1.238) 式后得

$$F(z) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [F'(z)f^n(z)] \right\}_{z=0}. \quad (1.239)$$

(1.239) 式同拉格朗日级数还有些差别, 但只要把坐标原点平移, 新原点的坐标是  $x$ , 则相应的

$$\phi(z, w) = z - x - w f(z - x) = z - x - w \phi(z), \quad (1.240)$$

则同前面的讨论完全一样, 只是 (1.239) 式改为

$$\begin{aligned} F(z) &= F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [F'(z) \phi^n(z)] \right\}_{z=x} \\ &= F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [F'(x) \phi^n(x)]. \end{aligned} \quad (1.241)$$

(1.241) 式就是常用的拉格朗日级数形式.  $z$  为 (1.240) 式的解, 即

$$z = x + w \phi(z).$$

(1.241) 式的收敛范围成为

$$\left| \frac{w \phi(z)}{z - x} \right| < 1, \quad (1.242)$$

这就是 (1.230) 式, 只是  $\alpha = w$ ,  $y = z$ . 于是本节初叙述的定理得证.

应用到开普勒方程情况:  $z = E$ ,  $w = e$ ,  $x = M$ ,  $\phi(z) = \sin E$ . 故收敛范围变成

$$\left| \frac{e \sin E}{E - M} \right| < 1. \quad (1.243)$$

其中  $E$  是要在复数域中讨论;  $M$ ,  $e$  可以是实数, 并假定  $e > 0$ . 用  $\rho, \varphi$  表示复数  $E - M$  的模和幅角, 则

$$E - M = \rho \exp(i\varphi),$$

即

$$E = M + \rho \exp(i\varphi). \quad (1.244)$$

故 (1.243) 式成为

$$\frac{e}{\rho} |\sin [M + \rho \exp(i\varphi)]| < 1,$$

或

$$e < \frac{\rho}{|\sin [M + \rho \exp(i\varphi)]|}. \quad (1.245)$$

此式给出了偏心率的限制条件。设  $f(\rho)$  为 (1.245) 式分母的极大值(对  $M, \varphi$  而言), 则只要

$$e < \frac{\rho}{f(\rho)}, \quad (1.246)$$

(1.245) 式就必然满足, 于是拉格朗日级数就收敛。下面先求出  $f(\rho)$ 。由于

$$\begin{aligned} & |\sin [M + \rho \exp(i\varphi)]|^2 \\ &= \sin [M + \rho \exp(i\varphi)] \sin [M + \rho \exp(-i\varphi)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2(i\rho \sin \varphi) - \cos 2(M + \rho \cos \varphi)] \\ &= \cos^2(i\rho \sin \varphi) - \cos^2(M + \rho \cos \varphi) \\ &= \cosh^2(\rho \sin \varphi) - \cos^2(M + \rho \cos \varphi). \end{aligned} \quad (1.247)$$

现在来求 (1.247) 式的极大值(对  $M, \varphi$  而言)。它是两个正数之差, 故只要第一项取极大, 后一项取极小, 相应的差值必然是极大值。而双曲线余弦函数是单调增加函数, 故第一项的极大值就是  $\cosh^2 \rho$ , 相应的  $\varphi$  使  $\sin \varphi = 1$ , 此时  $\cos \varphi = 0$ 。第二项就变成  $\cos^2 M$ , 它的极小值为 0。因此 (1.247) 式的极大值是  $\cosh^2 \rho$ , 即得

$$f(\rho) = \cosh \rho = \frac{1}{2} [\exp(\rho) + \exp(-\rho)]. \quad (1.248)$$

于是 (1.246) 式成为

$$e < \frac{\rho}{\cosh \rho}. \quad (1.249)$$

也就是说, 只要  $e$  满足 (1.249) 式, (1.245) 式就成立。

如果当  $\rho = \rho_1$  时, (1.249) 式右端是极大值, 记为  $e_1$ , 则

$$e_1 = \frac{\rho_1}{\cosh \rho_1} = \frac{2\rho_1}{\exp(\rho_1) + \exp(-\rho_1)}. \quad (1.250)$$

是符合 (1.245) 式条件的偏心率  $e$  的上限。下面就来求出  $e_1$  的值, 先对函数

$$R(\rho) = \frac{\rho}{\cosh \rho} = \frac{2\rho}{\exp(\rho) + \exp(-\rho)}$$

求极大值。上式对  $\rho$  取微商可得

$$R'(\rho) = \frac{dR}{d\rho} = 2 \frac{M(\rho)}{[\exp(\rho) + \exp(-\rho)]^2}$$

而

$$M(\rho) = (1 - \rho)\exp(\rho) + (1 + \rho)\exp(-\rho). \quad (1.251)$$

$\rho_1$  应为  $M(\rho) = 0$  的根。但因  $\rho > 0$ , 而

$$M'(\rho) = -\rho[\exp(\rho) + \exp(-\rho)] < 0,$$

故  $M(\rho)$  是  $\rho$  的单调减少函数, 于是  $M(\rho) = 0$  只可能有一个根, 就是  $\rho_1$ 。又由于

$$M(1) = 2\exp(-1) > 0,$$

$$M(2) = 3\exp(-2) - \exp(+2) < 0,$$

则  $\rho_1$  在 1 与 2 之间, 用数值方法可以解出 (1.251) 式得

$$\rho_1 = 1.19967864 \dots$$

但是, 这样求出的  $\rho_1$  可能是极大或极小, 要用二次微商  $R''(\rho)$  的符号判断。容易求出

$$R''(\rho) = 2\{M'(\rho)[\exp(\rho) + \exp(-\rho)] - 2M(\rho) \times [\exp(\rho) - \exp(-\rho)]\} / \{[\exp(\rho) + \exp(-\rho)]^3\}.$$

因  $M(\rho_1) = 0$ ,  $M'(\rho_1) < 0$ , 故  $R''(\rho_1) < 0$ 。因此,  $R(\rho_1)$  为极大值, 以  $\rho_1$  的值代入 (1.250) 式得

$$e_1 = \frac{\rho_1}{\cosh \rho_1} = 0.66274342 \dots$$

这个值叫做偏心率的拉普拉斯极限。只要  $e < e_1$ , 则用拉格朗日级数展开成偏心率  $e$  的级数就收敛。太阳系中大行星, 天然卫星和绝大多数小行星都是符合这个条件。只有彗星和少量小行星以及人造卫星不符合。但是当  $e$  较大时, 例如达到 0.5 左右, 则展开式已收敛得很慢, 这还是今后要继续研究的问题。

## 第二章 轨道计算

第一章已介绍了二体问题的基本理论，以及从天体轨道根数计算天体理论位置的方法，但是天体的轨道根数是怎样得到呢？它们只能从天体的实际观测值来求出。只有这个问题解决了，二体问题才算真正解决。从天体的实际观测值求出轨道根数，这个内容叫做轨道计算。由于二体问题本身就是天体运动的近似理论，故所得的轨道根数又叫做初轨（初步的轨道）。轨道计算在天体力学中占有重要的地位，是天体力学理论联系实际的重要环节。

在轨道计算中的各种方法，都是经过长期的实践过程中建立起来的。本章主要介绍现在常用的三种方法：用三个位置观测计算椭圆轨道的高斯(Gauss)方法和拉普拉斯(Laplace)方法，以及计算抛物线轨道的奥耳白尔(olbers)方法。

从第一章§ 1, § 2, § 5 中的基本公式可看出：如果知道了天体在某时刻  $t$  时的日心直角坐标  $(x, y, z)$  和速度  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ，或知道天体在两个时刻  $t_1, t_2$  时的日心直角坐标  $(x_1, y_1, z_1)$  和  $(x_2, y_2, z_2)$ ，则可求出天体的六个轨道根数（具体办法后面还要讲）。因此，轨道计算的基本原理，就是设法从天体的六个观测值求出：①天体在某时刻的  $(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ；②天体在某两个时刻的  $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ 。本章讲的拉普拉斯方法是用天体在三个时刻  $t_i$  时的位置观测值  $(\alpha_i, \delta_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 求出①；高斯方法和奥耳白尔方法则是用这样的位置观测值求出②。

如果得到的观测值不是位置，例如是距离或速度，则计算



原理仍相同，只是更简单些。

书末附有小行星椭圆轨道和彗星抛物线轨道的计算实例。

## § 1 天体观测资料的处理

这里只讨论天体的位置观测。由天文方法得到天体的位置  $(\alpha, \delta)$  是视位置，而且是以观测站为中心，故需要把它们化为同一历元的平位置后才能进行轨道计算。

1. 周日视差的改正。由于观测值  $(\alpha, \delta)$  是以地面观测站为中心；而太阳的直角坐标  $(X, Y, Z)$  是以地心为中心，坐标原点需要统一。如已知天体到地心的近似距离为  $\rho$ ，则可用周日视差公式：

$$\left. \begin{aligned} p_\alpha &= \frac{1}{15} \frac{Rp_\odot}{\rho} \cos \phi' \sin (s - \alpha) \sec \delta \\ p_\delta &= \frac{Rp_\odot}{\rho} \{ \sin \phi' \cos \delta - \cos \phi' \sin \delta \cos (s - \alpha) \} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

就可得到地心观测值  $\alpha + p_\alpha, \delta + p_\delta$ 。如  $\rho$  不知道，则可以把太阳的地心坐标  $(X, Y, Z)$  作改正：

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= -Rp_\odot \sin 1'' \cos \phi' \cos s, \\ \Delta Y &= -Rp_\odot \sin 1'' \cos \phi' \sin s, \\ \Delta Z &= -Rp_\odot \sin 1'' \sin \phi'. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

则得到以观测站为中心的太阳坐标  $(X + \Delta X, Y + \Delta Y, Z + \Delta Z)$ 。其中  $R$  为观测站的地心距（以地球赤道半径为单位）； $p_\odot$  为太阳地平视差值； $\phi'$  为观测站的地心纬度； $s$  为观测站的地方恒星时。(2.1)式可从球面天文学书上查出，(2.2)式即为观测站的地心向径  $R$  在地心赤道坐标系中的分量（以天文单位为长度单位）的反号。

2. 改为平位置. 先把视位置  $(\alpha, \delta)$  改算为年初平位置  $(\alpha_0, \delta_0)$ , 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha - [(A + A')a + (B + B')b + Cc \\ &\quad + Dd + E + J_\alpha \operatorname{tg}^2 \delta], \\ \delta_0 &= \delta - [(A + A')a' + (B + B')b' \\ &\quad + Cc' + Dd' + J_\delta \operatorname{tg} \delta]. \end{aligned} \right\} (2.3)$$

其中  $(A + A'), (B + B'), C, D, E$  叫做白塞耳日数, 可由天文年历直接查出;  $a, b, \dots, d'$  叫做恒星常数, 用下面公式计算, 即

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{15} \left( \frac{m}{n} + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \right), & a' &= \cos \alpha, \\ b &= \frac{1}{15} \cos \alpha \operatorname{tg} \delta, & b' &= -\sin \alpha, \\ c &= \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta, & c' &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta, \\ d &= \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta, & d' &= \cos \alpha \sin \delta. \end{aligned} \right\} (2.4)$$

里面的  $\varepsilon$  为黄赤交角,  $m, n$  为岁差常数, 即

$$\left. \begin{aligned} m &= 46''.0850 + 0''.000279t, \\ n &= 20''.0468 - 0''.000085t, \end{aligned} \right\} (2.5)$$

$t$  为从 1900.0 年起算的年数.

$J_\alpha, J_\delta$  为岁差等的二阶项订正值, 可以从天文年历中查出; 但  $|\delta| < 60^\circ$  时, 可以不用这一项.

用(2.3)式得到的是年初平位置; 如果几个观测值是在不同年份得到的, 则需要改正岁差, 使它们对应同一年初. 设  $(\alpha, \delta), (\alpha_0, \delta_0)$  是对应于  $t$  和  $t_0$  年的位置, 则岁差改正公式为

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + (m + n \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \delta_1)(t - t_0), \\ \delta &= \delta_0 + n \cos \alpha_1 (t - t_0). \end{aligned} \right\} (2.6)$$

其中  $m, n$  即为(2.5)式所给的值,  $\alpha_1, \delta_1$  是对应于时刻  $(t +$

$t_0)/2$  时的位置。在一般情况下,可近似地取:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{1}{2} (m + n \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0)(t - t_0), \\ \delta_1 &= \delta_0 + \frac{1}{2} n \cos \alpha_0 (t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

如果  $\delta$  接近于  $90^\circ$ , 或  $t - t_0$  很大,则需要作高次项订正,或用准确的岁差计算公式(参看《球面天文学》)进行改正。

3. 行星光行差的改正。由于光线从天体射到地球需要经过一段时间  $\Delta t$ , 故地球上在  $t$  时看到天体的位置,实际上是  $t - \Delta t$  时的位置。因为光线走一个天文单位所需的时间为

$$498.72 = 0^{\circ}005772,$$

故得

$$\Delta t = 0^{\circ}005772 \rho, \quad (2.8)$$

其中  $\rho$  为天体的地心距,用天文单位作长度单位。通常在轨道计算的第二次近似时,再作行星光行差的改正。

## § 2 高斯方法的基本方程

高斯在十九世纪初为计算小行星轨道提出一种轨道计算的方法,以后又经过很多人的改进,才发展成下面的形式。

取日心赤道直角坐标系  $S-XYZ$ 。因为二体问题的轨道是在通过日心的平面上,设轨道平面方程为

$$Ax + By + Cz = 0. \quad (2.9)$$

天体在三个时刻的坐标  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 都应满足这个方程,故有

$$\left. \begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

由于轨道平面是存在的,故  $A, B, C$  不可能都等于零,即得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.11)$$

(2.11) 式按不同的行展开可得三个方程:

$$\left. \begin{aligned} x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) \\ + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) &= 0, \\ y_1(x_2z_3 - x_3z_2) - y_2(x_1z_3 - x_3z_1) \\ + y_3(x_1z_2 - x_2z_1) &= 0, \\ z_1(x_2y_3 - x_3y_2) - z_2(x_1y_3 - x_3y_1) \\ + z_3(x_1y_2 - x_2y_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

(2.12) 式括弧中的量可用三角形面积的投影来表示。因向量  $r_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $r_3(x_3, y_3, z_3)$  的向量积为

$$r_2 \times r_3 = (y_2z_3 - y_3z_2, z_2x_3 - z_3x_2, x_2y_3 - x_3y_2),$$

因此,有

$$\begin{aligned} y_2z_3 - y_3z_2 &= [r_2, r_3] \cos(n, X), \\ z_2x_3 - z_3x_2 &= [r_2, r_3] \cos(n, Y), \\ x_2y_3 - x_3y_2 &= [r_2, r_3] \cos(n, Z). \end{aligned}$$

其中  $[r_2, r_3]$  即为  $|r_2 \times r_3|$ , 也就是向径  $r_2, r_3$  组成的三角形面积的两倍;  $(n, X)$  表示轨道面法线同  $X$  轴的交角。用  $r_1 \times r_3, r_1 \times r_2$  可得其余的各项, 故(2.12)式可化为

$$\left. \begin{aligned} [r_2, r_3]x_1 - [r_1, r_3]x_2 + [r_1, r_2]x_3 &= 0, \\ [r_2, r_3]y_1 - [r_1, r_3]y_2 + [r_1, r_2]y_3 &= 0, \\ [r_2, r_3]z_1 - [r_1, r_3]z_2 + [r_1, r_2]z_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

(2.13) 式各项除以  $[r_1, r_3]$ , 可得

$$\left. \begin{aligned} n_1x_1 - x_2 + n_3x_3 &= 0, \\ n_1y_1 - y_2 + n_3y_3 &= 0, \\ n_1z_1 - z_2 + n_3z_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

其中

$$n_1 = \frac{[r_{12}, r_3]}{[r_1, r_3]}, \quad n_2 = \frac{[r_{13}, r_2]}{[r_1, r_3]} \quad (2.15)$$

因  $n_1, n_2$  可用另外方法求出(见后面讲述), 故(2.14)式为三个独立的方程.

利用公式(1.105)和(1.106)知, 若  $(\alpha_i, \delta_i)$  和  $\rho_i$  表示天体在  $t_i$  时的观测位置和地心距, 则有关系:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i \cos \alpha_i \cos \delta_i &= x_i + X_i, \\ \rho_i \sin \alpha_i \cos \delta_i &= y_i + Y_i, \\ \rho_i \sin \delta_i &= z_i + Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

其中  $(X_i, Y_i, Z_i)$  为  $t_i$  时太阳的地心赤道直角坐标, 再用记号

$$a_i = \cos \alpha_i \cos \delta_i, \quad b_i = \sin \alpha_i \cos \delta_i, \quad c_i = \sin \delta_i, \quad (2.17)$$

则(2.16)可简写为

$$x_i = a_i \rho_i - X_i, \quad y_i = b_i \rho_i - Y_i, \quad z_i = c_i \rho_i - Z_i. \quad (2.18)$$

代入(2.14)式, 按  $\rho_i$  整理可得

$$\left. \begin{aligned} a_1 n_1 \rho_1 - a_2 \rho_2 + a_3 n_3 \rho_3 &= n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3, \\ b_1 n_1 \rho_1 - b_2 \rho_2 + b_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3, \\ c_1 n_1 \rho_1 - c_2 \rho_2 + c_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

其中  $n_1, n_2$  和  $\rho_i$  为未知量, 消去  $n_1 \rho_1, n_3 \rho_3$  可得

$$-D\rho_2 = d, \quad (2.20)$$

其中

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} a_1 & n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3 & a_3 \\ b_1 & n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3 & b_3 \\ c_1 & n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= n_1 \begin{vmatrix} a_1 & X_1 & a_3 \\ b_1 & Y_1 & b_3 \\ c_1 & Z_1 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & X_2 & a_3 \\ b_1 & Y_2 & b_3 \\ c_1 & Z_2 & c_3 \end{vmatrix} + n_3 \begin{vmatrix} a_1 & X_3 & a_3 \\ b_1 & Y_3 & b_3 \\ c_1 & Z_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= n_1 d_1 - d_2 + n_3 d_3, \end{aligned} \quad (2.21)$$

以及

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad d_i = \begin{vmatrix} a_1 & X_i & a_3 \\ b_1 & Y_i & b_3 \\ c_1 & Z_i & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

这里的  $D, d_i$  都是已知量。在实际计算时,用直接消去  $n_1 \rho_1, n_3 \rho_3$  的方法,要比用行列式更简单。但用行列式时,意义较明确,便于讨论。因为  $(a_i, b_i, c_i)$  是  $\rho_i$  ( $t_i$  时天体对地心的位置向量)的方向余弦,故  $D$  是三个单位向量  $\rho_1/|\rho_1|, \rho_2/|\rho_2|, \rho_3/|\rho_3|$  所组成的四面体体积的六倍。当这三个向量在一个平面上时,即天体的三个观测位置在天球上同一个大圆上时,  $D = 0$ 。(2.19) 式就无法解出  $\rho_i$ , 这是高斯方法的缺点。(2.19) 式或(2.20) 式就叫高斯方法的基本方程。

如果用其它方法能求出  $n_1, n_3$ , 则从(2.20) 式就可以解出  $\rho_2$ , 再由(2.19) 式可解出  $\rho_1, \rho_3$ , 以  $\rho_i$  代入(2.18) 式就得到  $(x_i, y_i, z_i)$ , 问题就基本上解决了。但是  $n_1, n_3$  不能一下求出精确值,要用逐次迭代法来解。下面先求出  $n_1, n_3$  的表达式。

由于  $n_1, n_3$  是轨道平面上的量,用轨道面上的坐标系就可以讨论。设  $(x, y)$  为天体在轨道面上的直角坐标,如用

$$\tau = \sqrt{\mu} t \quad (2.23)$$

表示时间变量,则由二体问题运动方程可得

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}. \quad (2.24)$$

根据第一章§ 13 的讨论,用(1.211) 式可知

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= F_1 x_2 + G_1 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)_2, & y_1 &= F_1 y_2 + G_1 \left( \frac{dy}{d\tau} \right)_2, \\ x_3 &= F_3 x_2 + G_3 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)_2, & y_3 &= F_3 y_2 + G_3 \left( \frac{dy}{d\tau} \right)_2. \end{aligned} \right\} (2.25)$$

其中  $F_1, G_1, F_3, G_3$  可用(1.209) 式得:

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^3}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots, \\
 F_2 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{2} \frac{\tau_1^3}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots, \\
 G_1 &= -\tau_3 + \frac{\tau_3^3}{6r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_3^4}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots, \\
 G_2 &= \tau_1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^3}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^4}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots.
 \end{aligned} \right\} (2.26)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= \sqrt{\mu} (t_3 - t_2), & \tau_2 &= \sqrt{\mu} (t_3 - t_1), \\
 \tau_3 &= \sqrt{\mu} (t_2 - t_1).
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

由(2.25)式可得

$$[r_{12}, r_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -G_1 \left[ x_2 \left( \frac{dy}{d\tau} \right)_2 - y_2 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)_2 \right],$$

右端括弧内的量是  $t_2$  时的面积速度的两倍, 在时间变量取为  $\tau$  时, 面积常数  $h = \sqrt{p}$ , 故上式为

$$\left. \begin{aligned}
 [r_{12}, r_2] &= -G_1 \sqrt{p}, \\
 \text{同理 } [r_{23}, r_3] &= x_2 y_3 - x_3 y_2 = -G_3 \sqrt{p}, \\
 [r_{13}, r_3] &= x_1 y_3 - x_3 y_1 = (F_1 G_3 - F_3 G_1) \sqrt{p}.
 \end{aligned} \right\} (2.28)$$

又由(2.27)式知

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_3, \quad (2.29)$$

故用(2.26)式代入(2.28)式可化为

$$\left. \begin{aligned}
 [r_{12}, r_2] &= \tau_3 \sqrt{p} \left[ 1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_3^3}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right], \\
 [r_{23}, r_3] &= \tau_1 \sqrt{p} \left[ 1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^3}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right], \\
 [r_{13}, r_3] &= \tau_2 \sqrt{p} \left[ 1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2}{r_2^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\tau_2^2 (\tau_1 - \tau_3)}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right].
 \end{aligned} \right\} (2.30)$$

代入 (2.15) 式, 把  $\tau_i$  看成小量可展开为

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{[r_2, r_3]}{[r_1, r_3]} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3(\tau_1 + \tau_2)}{r_2^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\tau_3(\tau_3^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_1^2)}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right], \\ n_3 &= \frac{[r_1, r_2]}{[r_1, r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{r_2^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\tau_1(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right]. \end{aligned} \right\} (2.31)$$

这就是只展到  $\tau^3$  的近似表达式, 在里面又出现了未知量  $r_2$  和  $\left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2$ , 故不能直接求出  $n_1, n_3$ , 要用逐次逼近法来解决.

在第一次近似时, 先只用 (2.31) 式中的前两项, 即取

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{1}{6} \frac{\tau_1\tau_3 \left( 1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} \right)}{r_2^3}, \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} + \frac{1}{6} \frac{\tau_1\tau_3 \left( 1 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \right)}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} (2.32)$$

为方便起见, 用符号

$$\left. \begin{aligned} n_1^0 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}, & n_3^0 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}, \\ \nu_1 &= \frac{1}{6} \tau_1\tau_3(1 + n_1^0), & \nu_3 &= \frac{1}{6} \tau_1\tau_3(1 + n_3^0). \end{aligned} \right\} (2.33)$$

则 (2.32) 式成为

$$n_1 = n_1^0 + \frac{\nu_1}{r_2^3}, \quad n_3 = n_3^0 + \frac{\nu_3}{r_2^3}. \quad (2.34)$$

其中  $n_1^0, n_3^0, \nu_1, \nu_3$  都是已知量. 代入 (2.20) 式得

$$-D\rho_1 = n_1^0 d_1 - d_2 + n_3^0 d_3 + \frac{\nu_1 d_1 + \nu_3 d_3}{r_2^3},$$



或

$$\rho_2 = k_0 - \frac{l_0}{r_2^3}, \quad (2.35)$$

其中用符号

$$k_0 = -\frac{n_1^0 d_1 - d_2 + n_3^0 d_3}{D}, \quad l_0 = \frac{\nu_1 d_1 + \nu_3 d_3}{D}. \quad (2.36)$$

也就是把基本方程化为(2.35)式, 里面  $\rho_2$ ,  $r_2$  都是未知量,  $k_0$ ,  $l_0$  是已知量. 若能再找到一个  $\rho_2$  和  $r_2$  之间的关系式, 就可解出  $\rho_2$  的第一次近似值. 下面用简单的几何方法找出  $r_2$ ,  $\rho_2$  间的另一个关系.

从  $t_2$  时的太阳  $S$ , 地球  $E_2$  和天体  $P_2$  所组成的三角形(见图 14), 即得下面的关系:

$$r_2^2 = R_2^2 + 2\rho_2 R_2 \cos\theta_2 + \rho_2^2, \quad (2.37)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_2^2 &= X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2, \\ R_2 \cos\theta_2 &= -(a_2 X_2 + b_2 Y_2 + c_2 Z_2), \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

都是已知量. 因此(2.37)式就是所要求的关系式.

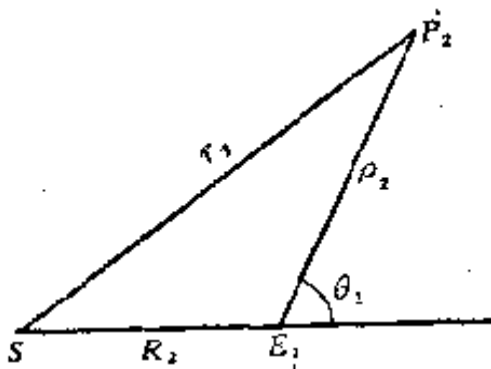


图 14

由(2.35), (2.37)式可解出  $\rho_2$  和  $r_2$ , 最好用迭代法来解. 先取  $r_2$  的一个近似值(如对小行星, 可先取  $r_2 = 3$ ), 代入(2.35)式可算出  $\rho_2$ ; 再用这个  $\rho_2$  值代入(2.37)式算出新的  $r_2$  值, 又把这个  $r_2$  值代入(2.35)

式再算出新的  $\rho_2$  值. 如此继续下去, 直到连续两次得到的  $\rho_2$  值相等(在容许的误差范围之内)为止. 这样就解出了  $r_2$ ,  $\rho_2$ . 关于这个方程组(2.35), (2.37)式的讨论, 例如, 它们有几组解,

哪一组是真的解，以及它们的性质分析等，在这里不详细讲了。如要了解可参阅有关的书籍<sup>1)</sup>。用得到的  $r_i$  代入 (2.32) 式得出  $n_1, n_3$  的近似值，再用它们代入 (2.19) 式可解出  $\rho_1, \rho_3$ ，把得到的  $\rho_i$  代入 (2.18) 式就解出  $(x_i, y_i, z_i)$  的第一次近似值相应的  $r_1, r_3$  也可算出了。

从  $\rho_i$  的第一次近似值可以作行星光行差改正，即由 (2.8) 式： $\Delta t_i = 0^{\circ}005772 \rho_i$ 。相应的观测时刻  $t_i$  应改为

$$t_i^{\circ} = t_i - 0^{\circ}005772 \rho_i. \quad (2.39)$$

其中  $\rho_i$  应以天文单位为长度单位。

### § 3 扇形和三角形面积之比，第二次近似

以上只得到  $x_i, y_i, z_i$  的第一次近似值。如要进一步精确，需要把  $n_1, n_3$  的展开式多取几项再来计算。但是这样做非常繁。高斯采用扇形和三角形面积之比  $\bar{y}_i$  后，简化了计算。

用  $(r_i, r_j)$  表示由向径  $r_i$  和  $r_j$  以及它们之间的弧所组成的扇形面积的两倍， $[r_i, r_j]$  是相应的三角形面积的两倍，定义符号：

$$\bar{y}_1 = \frac{(r_{22}, r_3)}{[r_{22}, r_3]}, \quad \bar{y}_2 = \frac{(r_{12}, r_3)}{[r_{12}, r_3]}, \quad \bar{y}_3 = \frac{(r_{12}, r_2)}{[r_{12}, r_2]}; \quad (2.40)$$

$$\text{则 } n_1 = \frac{[r_{22}, r_3]}{[r_{12}, r_3]} = \frac{(r_{22}, r_3)}{(r_{12}, r_3)} \cdot \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}, \quad n_3 = \frac{(r_{12}, r_2)}{(r_{12}, r_3)} \cdot \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}. \quad (2.41)$$

但  $(r_i, r_j)$  即为天体的向径从  $t_i$  到  $t_j$  所扫过的面积的两倍；由开普勒第二定律知，应同所经过的时间成正比。而面积速度

1) 参看 Дубяго 著：Определение орбит。

的两倍是  $h = \sqrt{\mu p}$ , 因此得

$$\left. \begin{aligned} (r_1, r_2) &= h(t_2 - t_1) = \sqrt{p} \tau_{12}, \\ (r_2, r_3) &= \sqrt{p} \tau_{23}, \\ (r_1, r_3) &= \sqrt{p} \tau_{13}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

因此, (2.41) 式成为

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = n_1^0 \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}, \quad n_3 = n_3^0 \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}. \quad (2.43)$$

其中  $\tau_i$  已作了光行差修正, 故只要知道了  $\bar{y}_i$ , 则  $n_1, n_3$  就可以求出来. 下面就讲述从  $(x_i, y_i, z_i)$  求  $\bar{y}_i$  的式子. 设  $r, r'$  为任意二时刻  $t, t'$  时的向径,  $f, f'$  为相应的真近点角. 则由此二向径组成的三角形面积两倍为  $rr' \sin(f' - f)$ . 于是有

$$\bar{y} = \frac{(r, r')}{[r, r']} = \frac{\sqrt{p} \tau}{rr' \sin(f' - f)}. \quad (2.44)$$

其中

$$\tau = \sqrt{\mu}(t' - t),$$

若定义

$$f' - f = 2v, \quad (2.45)$$

则

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{p} \tau}{rr' \sin 2v}. \quad (2.46)$$

根据椭圆运动公式知

$$r \sin f = a\sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

即

$$r \sin \frac{f}{2} \cos \frac{f}{2} = a\sqrt{1 - e^2} \sin \frac{E}{2} \cos \frac{E}{2}. \quad (2.47)$$

又有关系

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (2.48)$$

(2.47) (2.48) 两式相乘, 可得

$$r \sin^2 \frac{f}{2} = a(1+e) \sin^2 \frac{E}{2},$$

即

$$\sqrt{r} \sin \frac{f}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}. \quad (2.49)$$

其中利用了  $f$  与  $E$  的象限关系, 故开方后应取正号. 以 (2.49) 式代入 (2.47) 式可得

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r} \cos \frac{f}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}, \\ \text{同样} \quad \sqrt{r'} \sin \frac{f'}{2} &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E'}{2}, \\ \sqrt{r'} \cos \frac{f'}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E'}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

另外又由开普勒方程可得

$$E' - E - e(\sin E' - \sin E) = \tau a^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.51)$$

下面就从 (2.46), (2.49), (2.50), (2.51) 式中消去某些量, 得出所需式子. 为简单起见, 引用下面辅助量:

$$f - f' = 2v, \quad E' - E = 2g, \quad E' + E = 2G. \quad (2.52)$$

由 (2.49), (2.50) 式可推出

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{rr'} \cos v &= a \cos g - ae \cos G, \\ \sqrt{rr'} \sin v &= \sqrt{ap} \sin g. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

又由关系

$$r = a(1 - e \cos E)$$

可得

$$r + r' = 2a - 2ae \cos g \cos G, \quad (2.54)$$

从(2.53)式第一式同(2.54)式消去 $G$ 可得

$$r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos \nu \cos g = 2a(1 - \cos^2 g) = 2a \sin^2 g, \quad (2.55)$$

(2.51)式可写为

$$2g - 2e \sin g \cos G = \tau a^{-\frac{3}{2}}, \quad (2.56)$$

同(2.53)式中第一式消去 $G$ 可得

$$2g - \sin 2g + \frac{2\sqrt{rr'}}{a} \sin g \cos \nu = \frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.57)$$

再把(2.53)式的第二式中的 $\sqrt{p}$ 代入(2.46)式得

$$\bar{y} = \frac{\tau}{2\sqrt{a} \sqrt{rr'} \cos \nu \sin g}. \quad (2.58)$$

现在归结为从(2.55), (2.57), (2.58)式中解出三个未知量 $a, g, \bar{y}$ . 先在这三式中消去 $a$ 得

$$\left. \begin{aligned} r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos \nu \left(1 - 2 \sin^2 \frac{g}{2}\right) &= \frac{\tau^2}{2\bar{y}^2 rr' \cos^2 \nu}, \\ 8(\bar{y}^3 - \bar{y}^2) [\sqrt{rr'} \cos \nu \sin g]^3 &= (2g - \sin 2g) \tau^2. \end{aligned} \right\} (2.59)$$

为清楚起见,定义

$$m = \frac{\tau^2}{(2\sqrt{rr'} \cos \nu)^3}, \quad l = \frac{r + r'}{4\sqrt{rr'} \cos \nu} - \frac{1}{2}. \quad (2.60)$$

则(2.59)式成为

$$\bar{y}^2 = \frac{m}{l + \sin^2 \frac{g}{2}}, \quad \bar{y}^3 - \bar{y}^2 = \frac{m(2g - \sin 2g)}{\sin^3 g}. \quad (2.61)$$

其中 $l, m$ 是已知量,故只要在(2.61)式中消去 $g$ ,即得 $\bar{y}$ 的方程.但(2.61)式是 $g$ 的超越方程,不容易直接解,现采用下面方法进行.定义

$$\bar{x} = \sin^2 \frac{1}{2} g. \quad (2.62)$$

因  $r$  是小量, 故  $g = (E' - E)/2$  也是小量,  $\bar{x}$  就是二阶小量. 再定义,

$$x = \frac{2g - \sin^2 g}{\sin^3 g}. \quad (2.63)$$

则  $\bar{x}$ ,  $x$  都是  $g$  的函数, 现求出它们之间的关系. 由 (2.62), (2.63) 式可知,

$$\frac{d\bar{x}}{dg} = \frac{1}{2} \sin g, \quad \frac{dx}{dg} = \frac{4 - 3x \cos g}{\sin g},$$

即

$$\frac{dx}{d\bar{x}} = \frac{8 - 6x \cos g}{\sin^2 g} = \frac{4 - (3 - 6\bar{x})x}{2(\bar{x} - \bar{x}^2)}. \quad (2.64)$$

(2.64) 式是  $x$  对  $\bar{x}$  的一阶线性常微分方程, 可以积分, 但太繁. 由于  $\bar{x}$  为小量, 故可用级数解. 从 (2.63) 式可看出, 当  $\bar{x} = 0$ , 即  $g = 0$  时,  $x = 4/3$ . 因此可以令

$$x = \frac{4}{3} (1 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + a_3 \bar{x}^3 + \dots),$$

代入 (2.64) 式, 两端乘以  $2(\bar{x} - \bar{x}^2)$  后, 比较两端  $\bar{x}$  的同次幂系数可得

$$a_1 = \frac{6}{5}, \quad a_2 = \frac{8}{7} a_1, \quad a_3 = \frac{10}{9} a_2, \dots,$$

因此可得

$$x = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{6}{5} \bar{x} + \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \bar{x}^2 + \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \bar{x}^3 + \dots \right), \quad (2.65)$$

再表为

$$x = \frac{4}{3} \left/ \left[ 1 - \frac{6}{5} (\bar{x} - \xi) \right] \right.;$$

则

$$1 - \frac{6}{5}(\bar{x} - \xi) = \frac{4}{3} \frac{1}{x} = 1 - \frac{6}{5}\bar{x} + \frac{12}{175}\bar{x}^2 + \frac{312}{7875}\bar{x}^3 + \dots,$$

即

$$\xi = \frac{2}{35}\bar{x}^2 + \frac{312}{1575}\bar{x}^3 + \dots \quad (2.66)$$

由此可知  $\xi$  为四阶小量. 利用它们把 (2.61) 式化为

$$\bar{y}^2 = \frac{m}{l + \bar{x}} \quad \text{即 } \bar{x} = \frac{m}{\bar{y}^2} - l, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}^3 - \bar{y}^2 &= mx = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(\bar{x} - \xi)} = \frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6} - \bar{x} + \xi} \\ &= \frac{\frac{10}{9}m}{\frac{5}{6} + \xi + l - m/\bar{y}^2}. \end{aligned}$$

再定义辅助量

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + l + \xi}, \quad (2.68)$$

故上式化为

$$\bar{y}^3 - \bar{y}^2 = \frac{\frac{10}{9}h}{1 - \frac{h}{\bar{y}^2}},$$

即

$$\bar{y}^3 - \bar{y}^2 - h\bar{y} - \frac{1}{9}h = 0. \quad (2.69)$$

在这个三次方程中, 可从  $h$  的值解出  $\bar{y}$ ; 通常情况是

$2v < 180^\circ$ , 从  $l, m$  的定义可看出,  $l > 0, m > 0$ ; 由于  $\xi$  为微小量, 故  $h > 0$ . 因此 (2.69) 式只有一个正根. 有些书上造出了从  $h$  求  $\bar{y}$  的表<sup>1)</sup>. 可用下述方法来解. 根据已知直角坐标  $(x, y, z), (x', y', z')$  可算出  $r, r'$ . 并用关系

$$\begin{aligned} & rr' \cos(f' - f) = rr' \cos 2v = xx' + yy' + zz', \\ \text{令} & \\ \text{则} & \left. \begin{aligned} K^2 &= 2(rr' + xx' + yy' + zz') = 4rr' \cos^2 v, \\ K &= 2\sqrt{rr'} \cos v. \end{aligned} \right\} \quad (2.70) \end{aligned}$$

于是

$$m = \frac{r^2}{K^3}, \quad l = \frac{1}{2} \left( \frac{r+r'}{K} - 1 \right), \quad (2.71)$$

$$h = \frac{r^2 K^{-3}}{\frac{r+r'}{2K} + \frac{1}{3} + \xi}. \quad (2.72)$$

由于  $\xi$  是很小的量, 故先令  $\xi = 0$ , 由 (2.72) 式算出  $h$  值, 查表得到  $\bar{y}$  值. 再把所得的  $\bar{y}$  值代入 (2.67) 式得到  $\bar{x}$ , 再代入 (2.66) 式求出  $\xi$  值, 再代入 (2.72) 式求出新的  $h$  值, 再查表求出新的  $\bar{y}$  值. 在一般情况下, 这样循环一次就够了. 但查表对于用电子计算机计算很不方便, 可以用下面方法从  $h$  值算  $\bar{y}$ .

由 (2.69) 式可得

$$h = \frac{(\bar{y} - 1)\bar{y}^2}{\bar{y} + \frac{1}{9}} = \frac{z(1+z)^2}{z + \frac{10}{9}}.$$

其中

$$z = \bar{y} - 1.$$

上式又可写为

$$\frac{z(1+z)^2}{1 + \frac{9}{10}z} = \frac{10}{9}h, \quad (2.73)$$

1) 参看 Дубяго 著: Определение Орбит, 附表 XIX.



但

$$(1+z)^2 = \left(1 + \frac{9}{10}z\right)\left(1 + \frac{11}{10}z\right) + \frac{1}{100}z^2,$$

代入(2.73)式得

$$z\left(1 + \frac{11}{10}z\right) + \frac{1}{100} \frac{z^3}{1 + \frac{9}{10}z} = \frac{10}{9}h.$$

在一般情况下,  $z$  很小, 上式右端第二项可以略去, 因此上式可化为

$$z\left(1 + \frac{11}{10}z\right) = \frac{10}{9}h.$$

即

$$\bar{y} - 1 = z = \frac{\frac{10}{9}h}{1 + \frac{11}{10}z} = \frac{\frac{10}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h},$$
$$\frac{10}{9}h$$
$$\frac{1 + \frac{11}{9}h}{1 + \frac{11}{9}h}$$
$$\frac{1 + \frac{11}{9}h}{1 + \dots} \quad (2.74)$$

此式叫做韩申 (Hansen) 连分数, 便于用计算机进行计算。

以上是计算  $\bar{y}$  的方法, 可根据不同的  $(r_1, r_k)$  算出相应的  $\bar{y}_k$ . 根据(2.43)式有

$$n_1 = n_1^0 \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = n_1^0 + n_1^0 \left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} - 1\right),$$
$$n_3 = n_3^0 + n_3^0 \left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3} - 1\right). \quad (2.75)$$

如果令

$$\nu_1 = n_1^0 r_2^3 \left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} - 1\right), \quad \nu_3 = n_3^0 r_1^3 \left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3} - 1\right), \quad (2.76)$$

则

$$n_1 = n_1^0 + \frac{v_1}{r_2^3}, \quad n_2 = n_2^0 + \frac{v_2}{r_1^3} \quad (2.77)$$

此式就同  $n_1, n_2$  的第一次近似值 (2.34) 式的形式完全一样, 只是  $v_1, v_2$  的值是由 (2.76) 确定. 用 (2.76) 式的  $v_1, v_2$  代入 (2.36) 所得的  $t_0$ , 以及改正行星光行差后的  $n_1^0, n_2^0$  值所得的 (2.35) 式, 同 (2.37) 式解出的  $\rho_2, r_2$  值就叫做第二次近似值. 以所得的  $r_2$  代入 (2.77) 得到的  $n_1, n_2$ , 代入 (2.19) 式, 解出  $\rho_1, \rho_2$  也是第二次近似值. 如果  $\rho_i$  与第一次近似值相差较多, 则行星光行差要重新修正. 由所得的  $\rho_i$ , 算出  $(x_i, y_i, z_i)$ , 再重新算出  $\bar{y}_i$ . 如此循环下去, 直到连续得到的两次  $n_1, n_2$  的值之差, 符合所要求的精确度为止. 对小行星来说, 如观测时间间隔较小, 只要第二次或第三次近似就够了.

#### § 4 求轨道根数, 高斯方法的公式总结

根据最后得到的  $n_1, n_2$  解出的  $x_i, y_i, z_i$  和  $r_i, \rho_i$  容易算出轨道根数. 实际上只要用  $t_1, t_2$  时的  $(x, y, z)$  就行了. 为计算方便起见, 还引入一些辅助量. 定义

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1^2} = \frac{r_1 r_2 \cos(f_2 - f_1)}{r_1^2} \\ &= \frac{r_2 \cos(f_2 - f_1)}{r_1}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_2 - \sigma x_1, & y_0 &= y_2 - \sigma y_1, \\ z_0 &= z_2 - \sigma z_1, & r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

即

$$\begin{aligned} r_0^2 &= (x_2 - \sigma x_1)^2 + (y_2 - \sigma y_1)^2 + (z_2 - \sigma z_1)^2 \\ &= r_2^2 - 2\sigma(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + \sigma^2 r_1^2 \\ &= r_2^2 - 2\sigma^2 r_1^2 + \sigma^2 r_1^2 = r_2^2 - \sigma^2 r_1^2 = r_2^2 \sin^2(f_2 - f_1). \end{aligned}$$

则

$$r_0 = r_3 \sin(f_3 - f_1), \quad r_1 r_0 = r_1 r_3 \sin(f_3 - f_1). \quad (2.80)$$

因此可从

$$\bar{y}_2 = \frac{\tau_2 \sqrt{p}}{r_1 r_3 \sin(f_3 - f_1)} = \frac{\tau_2 \sqrt{p}}{r_1 r_0},$$

求出

$$p = \frac{r_1^2 r_0^2}{\tau_2^2} \bar{y}_2^2. \quad (2.81)$$

又由椭圆轨道方程可求出

$$q_1 = e \cos f_1 = \frac{p}{r_1} - 1, \quad q_3 = e \cos f_3 = \frac{p}{r_3} - 1. \quad (2.82)$$

而

$$\begin{aligned} q_3 &= e \cos f_3 = e \cos(f_1 + f_3 - f_1) \\ &= e \cos f_1 \cos(f_3 - f_1) - e \sin f_1 \sin(f_3 - f_1), \end{aligned}$$

可得

$$e \sin f_1 = \frac{q_1 \cos(f_3 - f_1) - q_3}{\sin(f_3 - f_1)}. \quad (2.83)$$

因此可从(2.82)、(2.83)式解出  $e, f_1$ , 并可得  $f_3 = f_3 - f_1 + f_1$ , 然后求出

$$a = \frac{p}{1 - e^2}. \quad (2.84)$$

又根据公式

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{E_1}{2} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{f_1}{2}, \\ \operatorname{tg} \frac{E_3}{2} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{f_3}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

算出偏近点角  $E_1, E_3$ , 再由开普勒方程算出相应的平近点角

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1, \quad M_3 = E_3 - e \sin E_3. \quad (2.86)$$

因此对于任一历元  $t_0$  时的平近点角  $M_0$  为

$$\begin{aligned} M_0 &= M_1 + n(t_0 - t_1^0) \\ &= M_3 + n(t_0 - t_3^0), \end{aligned} \quad (2.87)$$

其中  $n$  为平均角速度, 可用下式算出, 即

$$n = \frac{M_3 - M_1}{t_3^0 - t_1^0}. \quad (2.88)$$

到此为止, 已求出了三个轨道根数:  $a, e, M_0$ .

至于求另三个轨道根数  $Q, \omega, i$ , 可用公式 (1.103) 求得

$$\begin{aligned} x_1 &= P_x r_1 \cos f_1 + Q_x r_1 \sin f_1, \\ x_3 &= p_x r_3 \cos f_3 + Q_3 r_3 \sin f_3, \end{aligned}$$

$y, z$  相似, 可解出

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{x_1 r_3 \sin f_3 - x_3 r_1 \sin f_1}{r_1 r_3 \sin (f_3 - f_1)}, \\ Q_x &= \frac{x_3 r_1 \cos f_1 - x_1 r_3 \cos f_3}{r_1 r_3 \sin (f_3 - f_1)}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

但在一般情况下,  $f_3 - f_1$  是小角, 用上式计算时要影响精确度, 可利用 (2.79) 式定义的  $x_0, y_0, z_0, r_0$  来计算. (2.89) 式分子上的  $f_3$  取为  $f_1 + (f_3 - f_1)$  后, 可推出

$$\left. \begin{aligned} P_x &= x_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - \left[ x_3 - \frac{x_1 r_3 \cos (f_3 - f_1)}{r_1} \right] \\ &\quad \times \frac{\sin f_1}{r_3 \sin (f_3 - f_1)}, \\ Q_x &= x_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + \left[ x_3 - \frac{x_1 r_3 \cos (f_3 - f_1)}{r_1} \right] \\ &\quad \times \frac{\cos f_1}{r_3 \sin (f_3 - f_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

用 (2.78) — (2.80) 式的记号代入 (2.90) 式, 可整理为下列形式:

$$\left. \begin{aligned}
 P_x &= x_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - x_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\
 Q_x &= x_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + x_0 \frac{\cos f_1}{r_0}, \\
 P_y &= y_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - y_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\
 Q_y &= y_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + y_0 \frac{\cos f_1}{r_0}, \\
 P_z &= z_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - z_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\
 Q_z &= z_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + z_0 \frac{\cos f_1}{r_0}.
 \end{aligned} \right\} (2.91)$$

再根据  $P_x, Q_x, \dots, Q_z$  的定义 (1.104), 可得关系:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin i \sin \omega &= P_x \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\
 \sin i \cos \omega &= Q_x \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon, \\
 \sin Q &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\
 \cos Q &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega, \\
 \cos i &= -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \csc Q,
 \end{aligned} \right\} (2.92)$$

从它们可求出另外三个根数  $Q, \omega, i$ .

到此为止, 六个轨道根数都已求出. 下面把全部计算公式总结如下, 并给出每一步的验算公式.

1. 原始数据. 要根据三个时刻的平位置  $(\alpha_i, \delta_i)$  和太阳的地心赤道直角坐标  $(X_i, Y_i, Z_i)$  计算轨道. 这些叫做原始数据, 即

$$\left. \begin{aligned}
 t_1, \alpha_1, \delta_1, X_1, Y_1, Z_1; \\
 t_2, \alpha_2, \delta_2, X_2, Y_2, Z_2; \\
 t_3, \alpha_3, \delta_3, X_3, Y_3, Z_3.
 \end{aligned} \right\} (I)$$

其中  $(\alpha_i, \delta_i), (X_i, Y_i, Z_i)$  都是对应于同一春分点和赤道的平位置, 而且已作视差改正 [可用公式 (2.2) 改正  $(X_i, Y_i,$

2.) 1.

2. 求辅助量.

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \cos \alpha_i \cos \delta_i, \\ b_i &= \sin \alpha_i \cos \delta_i, \\ c_i &= \sin \delta_i. \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3) \quad (\text{II})$$

验算式为

$$\begin{aligned} a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 &= 1, \\ a_i - c_i \sin \alpha_i &= \cos(\alpha_i + \delta_i), \\ b_i + c_i \cos \alpha_i &= \sin(\alpha_i + \delta_i). \end{aligned}$$

再计算

$$\left. \begin{aligned} 2R_i \cos \theta_i &= -2(a_i X_i + b_i Y_i + c_i Z_i), \\ R_i^2 &= X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

验算式为

$$\begin{aligned} (X_i - a_i)^2 + (Y_i - b_i)^2 + (Z_i - c_i)^2 \\ = R_i^2 + 2R_i \cos \theta_i + 1. \end{aligned}$$

再列出基本方程:

$$\left. \begin{aligned} a_1 n_1 \rho_1 - a_2 \rho_2 + a_3 n_3 \rho_3 &= n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3, \\ b_1 n_1 \rho_1 - b_2 \rho_2 + b_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3, \\ c_1 n_1 \rho_1 - c_2 \rho_2 + c_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV})$$

消去  $n_1 \rho_1$ ,  $n_3 \rho_3$  可得

$$-D \rho_2 = n_1 d_1 - d_2 + n_3 d_3.$$

3. 第一次近似. 求

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sqrt{\mu} (t_3 - t_2), \quad \tau_2 = \sqrt{\mu} (t_3 - t_1), \\ \tau_3 &= \sqrt{\mu} (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

如果是计算小行星或彗星的轨道, 可略去它自己的质量, 此时

$$\sqrt{\mu} = K (\text{高斯常数}) = 0.01720210,$$

即

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= K(t_3 - t_2), & \tau_2 &= K(t_3 - t_1), \\ \tau_3 &= K(t_2 - t_1); \\ n_1^0 &= \frac{\tau_1}{\tau_2}, & n_3^0 &= \frac{\tau_3}{\tau_2}; \\ \nu_1 &= \frac{1}{6}\tau_1\tau_3(1 + n_1^0), & \nu_3 &= \frac{1}{6}\tau_1\tau_3(1 + n_3^0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

验算式为

$$n_1^0 + n_3^0 = 1, \quad \nu_1 + \nu_3 = \frac{1}{2}\tau_1\tau_3.$$

再计算

$$k_0 = \frac{n_1^0 d_1 - d_2 + n_3^0 d_3}{-D}, \quad l_0 = \frac{d_1 \nu_1 + d_3 \nu_3}{D}. \quad (\text{VI})$$

列出方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= k_0 - \frac{l_0}{r_2^3}, \\ r_2^2 &= R_2^2 + 2R_2\rho_2 \cos \theta_2 + \rho_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

用迭代法解出  $r_2, \rho_2$ . 可先取  $r_2$  的一个近似值代入第一式求出  $\rho_2$ , 再代入第二式算出新的  $r_2$ , 再代入第一式算出新的  $\rho_2$ . 如次迭代下去, 直到连续两次得到的  $r_2$  (或  $\rho_2$ ) 之差, 在所要求的精度范围内为止. 用最后得到的  $r_2, \rho_2$  计算

$$n_1 = n_1^0 + \frac{\nu_1}{r_2^3}, \quad (\text{VIII})$$

$$n_3 = n_3^0 + \frac{\nu_3}{r_2^3}.$$

用这里的  $n_1, n_3$  值代入 (IV), 可解出  $\rho_1, \rho_3$ . 再计算

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= R_1^2 + 2R_1\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_1^2, \\ r_3^2 &= R_3^2 + 2R_3\rho_3 \cos \theta_3 + \rho_3^2, \\ x_i &= a_i\rho_i - X_i, \\ y_i &= b_i\rho_i - Y_i, \\ z_i &= c_i\rho_i - Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX})$$

验算式为

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = r_i^2, \quad x_2 = n_1 x_1 + n_3 x_3,$$

$$y_2 = n_1 y_1 + n_3 y_3, \quad z_2 = n_1 z_1 + n_3 z_3.$$

根据所得的  $\rho_i$  来修正行星光行差:

$$t_i^{\circ} = t_i - A \rho_i, \quad A = 0.005772.$$

然后用  $t_i^{\circ}$  重新计算  $\tau_i, n_1^{\circ}, n_3^{\circ}$ .

4. 求  $\bar{y}_i$ , 改进第一次近似的结果. 先计算

$$\left. \begin{aligned} K_1^2 &= 2(r_2 r_3 + x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3), \\ K_2^2 &= 2(r_1 r_3 + x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3), \\ K_3^2 &= 2(r_1 r_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \end{aligned} \right\} \quad (\text{X})$$

则

$$h_1 = \frac{\tau_1^2 / K_1^3}{\frac{r_2 + r_3}{2K_1} + \frac{1}{3}}, \quad h_2 = \frac{\tau_2^2 / K_2^3}{\frac{r_1 + r_3}{2K_2} + \frac{1}{3}},$$

$$h_3 = \frac{\tau_3^2 / K_3^3}{\frac{r_1 + r_2}{2K_3} + \frac{1}{3}}.$$

用所得的  $h_i$  查表或用下面连分数:

$$\bar{y}_i = 1 + \frac{10}{11} \frac{\frac{\frac{11}{9} h_i}{1 + \frac{11}{9} h_i}}{1 + \frac{\frac{11}{9} h_i}{1 + \frac{11}{9} h_i}} \frac{1 + \frac{11}{9} h_i}{1 + \frac{11}{9} h_i} \frac{1 + \frac{11}{9} h_i}{1 + \dots}, \quad (\text{XI})$$

得到  $\bar{y}_i$ . 如果  $\tau_i$  较大, 还要作改正. 用所得的  $\bar{y}_i$  算出

$$\bar{x}_i = \frac{m_i}{\bar{y}_i} - l_i,$$

其中



$$\left. \begin{aligned} m_i &= \frac{r_i^2}{K_i^3}, & l_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_2 + r_3}{K_1} - 1 \right), \\ l_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_3}{K_2} - 1 \right), & l_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2}{K_3} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \text{(XII)}$$

根据所得的  $\bar{x}_i$  算出

$$\xi_i = \frac{2}{35} \bar{x}_i^2 + \frac{52}{1575} \bar{x}_i^3,$$

再算出新的

$$h_i = \frac{m_i}{\frac{5}{6} + l_i + \xi_i}.$$

用这个  $h_i$  再重新查表或用连分数 (XI) 算出  $\bar{y}_i$ . 于是可算出

$$n_1 = n_1^0 \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}, \quad n_3 = n_3^0 \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_3}. \quad \text{(XIII)}$$

代入基本方程 (IV), 解出  $\rho_i$ ; 再用 (IX) 式算出  $(x_i, y_i, z_i)$ . 这样的结果是第二次近似值. 一般情况下, 第二次近似值已够了. 如  $r_i$  较大 (接近于 1), 再要用第二次近似值  $(x_i, y_i, z_i)$  重算  $\bar{y}_i$ , 再得第三次近似值.

5. 轨道根数的求出. 先计算:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3}{r_1^2}, \\ x_0 &= x_3 - \sigma x_1, \quad y_0 = y_3 - \sigma y_1, \\ z_0 &= z_3 - \sigma z_1, \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2. \end{aligned} \right\} \text{(XIV)}$$

验算式为

$$r_1^2 r_0^2 = (y_1 z_3 - z_1 y_3)^2 + (z_1 x_3 - x_1 z_3)^2 + (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2.$$

又由

$$\cos(f_3 - f_1) = \frac{\sigma r_1}{r_3}, \quad \sin(f_3 - f_1) = \frac{r_0}{r_3}. \quad \text{(XV)}$$

解出  $f_3 - f_1$ . 两式所得结果应相同, 本身就是验算式. 再计

算

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{p} &= \frac{r_0 r_1}{r_2} \bar{y}_2, & p &= \frac{r_0^2 r_1^2}{r_2^2} \bar{y}_2^2, \\ q_1 &= \frac{p}{r_1} - 1, & q_3 &= \frac{p}{r_3} - 1, \\ e \cos f_1 &= q_1, & e \sin f_1 &= \frac{q_1 \cos(f_3 - f_1) - q_3}{\sin(f_3 - f_1)}, \end{aligned} \right\} \text{(XVI)}$$

由此可解出  $e$ ,  $f_1$  及  $f_3 = f_1 + f_3 - f_1$ . 再从

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{p}{1 - e^2}, \\ \operatorname{tg} \frac{E_1}{2} &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{f_1}{2}, & \operatorname{tg} \frac{E_3}{2} &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tg} \frac{f_3}{2}, \end{aligned} \right\} \text{(XVII)}$$

算出  $a$ ,  $E_1$ ,  $E_3$ , 然后算出

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= E_1 - e \sin E_1, & M_3 &= E_3 - e \sin E_3, \\ n &= \frac{M_3 - M_1}{t_3^0 - t_1^0}. \end{aligned} \right\} \text{(XVIII)}$$

对给定历元  $t_0$  算出

$$M_0 = M_1 + n(t_0 - t_1^0) = M_3 + n(t_0 - t_3^0).$$

又由

$$\left. \begin{aligned} P_x &= x_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - x_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\ Q_x &= x_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + x_0 \frac{\cos f_1}{r_0}, \\ P_y &= y_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - y_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\ Q_y &= y_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + y_0 \frac{\cos f_1}{r_0}, \\ P_z &= z_1 \frac{\cos f_1}{r_1} - z_0 \frac{\sin f_1}{r_0}, \\ Q_z &= z_1 \frac{\sin f_1}{r_1} + z_0 \frac{\cos f_1}{r_0}, \end{aligned} \right\} \text{(XIX)}$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \sin i \sin \omega &= P_x \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\ \sin i \cos \omega &= Q_x \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon, \\ \sin Q &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\ \cos Q &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega, \\ \cos i &= -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \csc Q, \end{aligned} \right\} \text{(XX)}$$

可算出  $Q, \omega, i$ . 验算公式为

$$\begin{aligned} P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 &= 1, & Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 &= 1, \\ P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z &= 0. \end{aligned}$$

6. 计算星历表, 同观测值比较. 由于上面轨道根数是用第一, 三两个时刻的  $(x, y, z)$  算出的, 故最好用第二或其它未参加轨道计算的观测值进行检验. 设用来检验的观测时刻为  $t$ , 修正行星光行差后为  $t^\circ$  (所用  $\rho$  值可从上面得到的  $\rho_i$  内插或外推得出). 此时平近点角

$$M = M_0 + n(t^\circ - t_0)$$

解开普勒方程

$$E - e \sin E = M,$$

求出  $E$ . 再从

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \alpha \cos \delta &= P_x a (\cos E - e) \\ &\quad + a Q_x \sqrt{1 - e^2} \sin E + X, \\ \rho \sin \alpha \cos \delta &= P_y a (\cos E - e) \\ &\quad + a Q_y \sqrt{1 - e^2} \sin E + Y, \\ \rho \sin \delta &= P_z a (\cos E - e) \\ &\quad + a Q_z \sqrt{1 - e^2} \sin E + Z, \end{aligned} \right\} \text{(XXI)}$$

算出  $(\alpha, \delta)$ , 记为  $(\alpha_c, \delta_c)$ ; 观测值记为  $(\alpha_0, \delta_0)$ . 再算出观测值同理论计算值之差, 记为  $O-C$ , 即

$$O-C \begin{cases} \cos \delta \Delta \alpha = \alpha_0 - \alpha_c, \\ \Delta \delta = \delta_0 - \delta_c. \end{cases}$$

如观测位置准到  $0''.1$ , 计算过程中要用七位有效数字, 相应的  $O-C$  也要求与  $0''.1$  同数量级. 如果  $O-C$  太大, 对计算过程要进行检查, 找出错误原因. 算  $O-C$  时, 太阳地心赤道直角坐标  $X, Y, Z$  从天文年历查出后要改正视差. 还要注意  $(\alpha_0, \delta_0)$  与  $(\alpha_c, \delta_c)$  的春分点和黄道历元要一致. 具体计算例子见附录.

## § 5 拉普拉斯方法的原理

前面已详细介绍了高斯方法, 现在计算行星和小行星的初轨仍然用它. 拉普拉斯方法在原理上有所不同, 近年来计算人造卫星初轨时也在应用, 但形式已有不少改变. 在这里只介绍这个方法的原理和主要结果, 为以后应用打下基础. 但根据第一章的知识, 读者也不难由此推出详细的计算公式.

前面讲的高斯方法是设法从观测值算出第一、三时刻的  $(x, y, z)$ , 再由它们算出六个轨道根数. 拉普拉斯方法是设法算出第二个时刻的  $(x, y, z)$  和  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , 再由它们算出六个轨道根数. 下面讲的是经过很多人改进后的结果.

有关符号和观测资料处理同高斯方法一样. 先由公式 (2.18) 知

$$\left. \begin{aligned} \rho_i a_i &= x_i + X_i, \\ \rho_i b_i &= y_i + Y_i, \\ \rho_i c_i &= z_i + Z_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

用第三式除前两式消去  $\rho_i$  得

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \frac{x_i + X_i}{z_i + Z_i} = \frac{a_i}{c_i} = \operatorname{ctg} \delta_i \cos \alpha_i, \\ V_i &= \frac{y_i + Y_i}{z_i + Z_i} = \frac{b_i}{c_i} = \operatorname{ctg} \delta_i \sin \alpha_i, \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

故  $U_i, V_i$  为已知量。上式又可化为

$$x_i = U_i z_i + P_i, \quad y_i = V_i z_i + Q_i. \quad (2.95)$$

其中

$$P_i = U_i Z_i - X_i, \quad Q_i = V_i Z_i - Y_i \quad (2.96)$$

也是已知量。再用公式 (1.211) 得

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= F_1 x_2 + G_1 x'_2, & x_3 &= F_3 x_2 + G_3 x'_2, \\ y_1 &= F_1 y_2 + G_1 y'_2, & y_3 &= F_3 y_2 + G_3 y'_2, \\ z_1 &= F_1 z_2 + G_1 z'_2, & z_3 &= F_3 z_2 + G_3 z'_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

其中  $x'_2, y'_2, z'_2$  为  $(dx/d\tau)_2, (dy/d\tau)_2, (dz/d\tau)_2$ 。(2.95), (2.97) 两式就是拉普拉斯方法的基本方程，共十二个方程。如果  $F_i, G_i$  已知，即可从它们解出十二个未知量  $x_i, y_i, z_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 和  $x'_2, y'_2, z'_2$ ，但从  $F_i, G_i$  的定义可知

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{r_2^3} - \frac{1}{2} \frac{\tau_3^3}{r_2^4} r'_2 + \dots, \\ F_3 &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{r_2^3} + \frac{1}{2} \frac{\tau_1^3}{r_2^4} r'_2 + \dots, \\ G_1 &= -\tau_3 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3^3}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_3^4}{r_2^4} r'_2 + \dots, \\ G_3 &= \tau_1 - \frac{1}{6} \frac{\tau_1^3}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1^4}{r_2^4} r'_2 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

其中

$$r'_2 = \frac{1}{r_2} (x_2 x'_2 + y_2 y'_2 + z_2 z'_2), \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \quad (2.99)$$

也是  $x_2, y_2, z_2, x'_2, y'_2, z'_2$  的函数，故不增加未知量，可用迭代法来解。下面先消去一些未知量。由 (2.95), (2.97) 式可知

$$x_1 = U_1 z_1 + P_1 = U_1 (F_1 z_2 + G_1 z'_2) + P_1,$$

$$x_2 = U_2 z_2 + P_2.$$

代入 (2.97) 式的第一式得

$$U_1 (F_1 z_2 + G_1 z'_2) + P_1 = F_1 (U_2 z_2 + P_2) + G_1 x'_2,$$

即

$$\left. \begin{aligned} G_1 x'_2 &= (U_1 - U_2) F_1 z_2 + U_1 G_1 z'_2 + P_1 - F_1 P_2, \\ \text{同理} \\ G_1 y'_2 &= (V_1 - V_2) F_1 z_2 + V_1 G_1 z'_2 + Q_1 - F_1 Q_2, \\ G_3 x'_2 &= (U_3 - U_2) F_3 z_2 + U_3 G_3 z'_2 + P_3 - F_3 P_2, \\ G_3 y'_2 &= (V_3 - V_2) F_3 z_2 + V_3 G_3 z'_2 + Q_3 - F_3 Q_2. \end{aligned} \right\} (2.100)$$

再从(2.95)式取出

$$x_2 = U_2 z_2 + P_2, \quad y_2 = V_2 z_2 + Q_2. \quad (2.101)$$

故若  $F_i, G_i$  已知, (2.100) 式就是  $x'_2, y'_2, z'_2, z_2$  的线性方程组, 容易解出来. 再把解出的  $z_2$  代入(2.101)式就得到  $x_2, y_2$ . 可先取  $r_2$  的一个近似值(如对小行星, 可取  $r_2 = 2.5$ ), 由(2.98)的头两项算出  $F_i, G_i$  代入(2.100)式, 解出  $x'_2, y'_2, z'_2, z_2$  后, 再用  $z_2$  代入(2.101)式求出  $x_2, y_2$ . 这是第一次近似值. 用它们代入(2.99)式算出  $r_2, r'_2$  后, 再代入(2.98)式, 取前三项算出  $F_i, G_i$  的第二次近似值; 再用它们代入(2.100), (2.101)式算出  $x_2, y_2, z_2; x'_2, y'_2, z'_2$  的第二次近似值. 如此继续迭代下去, 直到符合精度要求为止.

得到准确的  $x_2, y_2, z_2, x'_2, y'_2, z'_2$  后, 可以根据二体问题公式算出六个轨道根数. 但是一般得到速度分量  $x'_2, y'_2, z'_2$  的有效位数较少, 故直接用这六个量算出的轨道根数的精度较差. 可以再用(2.97)式. 由于  $F_i, G_i$  已算出, 故以  $x_2, x'_2, \dots$  代入可得  $x_i, y_i, z_i (i = 1, 3)$ . 再由它们计算轨道根数, 这正是上节讲过的内容.

拉普拉斯方法的计算程序比较简单, 但在计算小行星轨道时, 精度比高斯方法差些. 因为若  $\tau_i$  较小时,  $G_i$  较小, 用(2.100)式解出的  $x'_2, y'_2, z'_2, z_2$  的精度较差; 若  $\tau_i$  较大, 则  $F_i, G_i$  的级数收敛很慢, 也影响精度. 故算小行星轨道时, 仍多用高斯方法. 但在人造卫星轨道计算中, 高斯方法不便于应用;

拉普拉斯方法成为基本方法之一，只是根据人造卫星特点有所改变。

如果从(2.94)式算出的  $U_i$ ,  $V_i$  的有效位数减少，则可以定义

$$U_i = \frac{y_i + Y_i}{x_i + X_i}, \quad V_i = \frac{z_i + Z_i}{x_i + X_i},$$

或

$$U_i = \frac{x_i + X_i}{y_i + Y_i}, \quad V_i = \frac{z_i + Z_i}{y_i + Y_i}.$$

后面的公式作相应变换就行了。

## §6 计算抛物线轨道的奥耳白尔方法

由于彗星轨道大都接近于抛物线，故在初轨计算时，认为是抛物线轨道。很多天文工作者在研究彗星的运动过程中，提出了不少种计算抛物线轨道的方法。这里介绍的方法的基本原理是由奥耳白尔在1797年提出的，后来又经过很多人改进，但仍然叫做奥耳白尔方法。

因为抛物线的偏心率  $e = 1$ ，故只要计算五个轨道根数。这个条件反映在两个时刻的向径及位置间弦长同所经过时间的关系上，这就是第一章§2讲过的欧拉方程(1.52)。它给出了抛物线运动的力学条件。另外，奥耳白尔又给出第二个方程，反映了抛物线轨道的几何条件。这里介绍的方法就是以这两个方程为基础。同高斯方法一样，也是设法求出两个时刻的日心赤道直角坐标，而关键是求出地心距  $\rho$ 。但也有区别，高斯方法引用两个参量  $n_1, n_3$ ；奥耳白尔方法则只用  $n_1/n_3$  作参量。此外，三个观测值有六个数据，而只要算五个轨道根数；故第二个观测只满足一个条件。因此可用第二个观测值进行验证和改进轨道。

1. 欧拉方程。根据(1.52)式，欧拉方程为

$$(r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{\mu}(t' - t) = 6\tau. \quad (2.102)$$

其中  $r, r'$  为彗星在两时刻  $t, t'$  时的向径,  $s$  为两位置间的弦长。因为计算抛物线轨道时所用时间  $t' - t$  都不长, 两时刻位置的真近点角  $f$  和  $f'$  之差  $f' - f$  都小于  $180^\circ$ , 故 (2.102) 式左端的正负号应取负号, 现在需要解出  $s$ , 由于  $s$  比  $r + r'$  要小得多, 故可用下面的级数方法来解。

(2.102) 式可化为

$$\begin{aligned} 6\tau &= (r + r')^{\frac{3}{2}} \left[ \left(1 + \frac{s}{r + r'}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{s}{r + r'}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= (r + r')^{\frac{3}{2}} \left[ 3\frac{s}{r + r'} - \frac{3}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r + r'}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r + r'}\right)^5 - \dots \right]. \end{aligned}$$

若令

$$\eta = \frac{2\tau}{(r + r')^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.103)$$

则上式为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{s}{r + r'} - \frac{1}{4 \cdot 6} \left(\frac{s}{r + r'}\right)^3 \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \left(\frac{s}{r + r'}\right)^5 - \dots. \end{aligned} \quad (2.104)$$

从 (2.104) 式可反过来解出  $s/r + r'$  为  $\eta$  的级数。用待定系数法, 令

$$\frac{s}{r + r'} = \eta + a_3\eta^3 + a_5\eta^5 + \dots,$$

代入 (2.104) 可得

$$\begin{aligned} \eta &= \eta + a_3\eta^3 + a_5\eta^5 + \dots \\ &\quad - (1/24)\eta^3 - (a_3/8)\eta^5 + \dots \\ &\quad - (1/128)\eta^5 + \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$



由此可解出  $a_i$ , 故可得

$$\frac{s}{r+r'} = \eta + \frac{1}{24} \eta^3 + \frac{5}{384} \eta^5 + \dots \quad (2.105)$$

由 (2.103), (2.105) 式可知, 如果知道了  $r+r'$ , 就可算出  $s$ , 这里是用力学条件算出的结果, 记为  $s_d$ .

2. 奥耳白尔方程. 下面所用记号尽可能与高斯方法相同. 仍用  $a_i, b_i, c_i$  表示由观测值  $(\alpha_i, \delta_i)$  算出的辅助量;  $(x_i, y_i, z_i)$  为彗星的日心赤道直角坐标;  $X_i, Y_i, Z_i$  为太阳的地心赤道直角坐标; 则由公式 (2.18), (2.19) 有

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i a_i - X_i, & y_i &= \rho_i b_i - Y_i, \\ z_i &= \rho_i c_i - Z_i, \end{aligned} \quad (2.106)$$

以及方程:

$$\left. \begin{aligned} a_1 n_1 \rho_1 - a_2 \rho_2 + a_3 n_3 \rho_3 &= n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3, \\ b_1 n_1 \rho_1 - b_2 \rho_2 + b_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3, \\ c_1 n_1 \rho_1 - c_2 \rho_2 + c_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3, \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

其中  $n_1, n_3$  仍为三角形面积之比. 现在与高斯方法不同, 不是消去  $\rho_1, \rho_3$ , 而是消去  $\rho_2$ . 消去的方法很多. 奥耳白尔采用下面方法进行.

取三个数  $A, B, C$ , 满足条件:

$$\begin{aligned} A a_2 + B b_2 + C c_2 &= 0, \\ A X_2 + B Y_2 + C Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.108)$$

由于  $a_2, b_2, c_2, X_2, Y_2, Z_2$  是已知量, 从 (2.108) 式可直接解出

$$A:B:C = (b_2 Z_2 - c_2 Y_2):(c_2 X_2 - a_2 Z_2):(a_2 Y_2 - b_2 X_2). \quad (2.109)$$

因此, 只要取  $A, B, C$  为 (2.109) 式右端的三个量, 或同乘一个共同因子都可以. 用  $A, B, C$  分别乘 (2.107) 式的一, 二, 三式相加可得

$$\odot_1 n_1 \rho_1 + \odot_3 n_3 \rho_3 = n_1 \odot_1 + n_3 \odot_3, \quad (2.110)$$

其中符号

$$\left. \begin{aligned} \odot_i &= Aa_i + Bb_i + Cc_i, \\ \ominus_i &= AX_i + BY_i + CZ_i, \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

都是已知量。(2.110)式还可以写为

$$\rho_3 = M\rho_1 + m. \quad (2.112)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{\odot_1}{\odot_3} \frac{n_1}{n_3}, \\ m &= \frac{1}{\odot_3} \left( \ominus_1 \frac{n_1}{n_3} + \ominus_3 \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

(2.112)式就叫做奥耳白尔方程，它给出了  $\rho_1$  和  $\rho_3$  的一个关系式。方程中只有一个参变量  $n_1/n_3$ 。下面先推出它的近似表达式。

由(2.31)式可知

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3(\tau_1 + \tau_2)}{r_2^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{\tau_3(\tau_3^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_1^2)}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right], \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{r_2^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\tau_1(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)}{r_2^4} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

因为这里不用  $r_2$ ，要用  $r_1, r_3$ ；现把含  $r_2$  的项作如下变换。  
 $r_1, r_3$  在  $r_2$  处展开可得

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 - \tau_3 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots, \\ r_3 &= r_2 + \tau_1 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)_2 + \dots. \end{aligned}$$

由此可解出(因  $\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 &= \frac{r_3 - r_1}{\tau_2} + \dots, \\ r_2 &= \frac{r_1 + r_3}{2} + \frac{\tau_3 - \tau_1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 + \dots \\ &= \frac{r_1 + r_3}{2} + \frac{\tau_3 - \tau_1}{2\tau_2} (r_3 - r_1) + \dots \\ &= \frac{r_1 + r_3}{2} \left[ 1 + \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2} \frac{r_3 - r_1}{r_3 + r_1} + \dots \right]. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2^3} &= \frac{8}{(r_1 + r_3)^3} - \frac{24(\tau_3 - \tau_1)}{\tau_2(r_1 + r_3)^4} (r_3 - r_1) + \dots, \\ \frac{1}{r_2^4} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 &= \frac{16(r_3 - r_1)}{\tau_2(r_1 + r_3)^4} + \dots, \end{aligned}$$

代入(2.114)式得

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{\tau_3(\tau_1 + \tau_2)}{(r_1 + r_3)^3} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\tau_1^2 \tau_3 (r_3 - r_1)}{\tau_2 (r_1 + r_3)^4} + \dots \right], \\ n_3 &= \frac{\tau_3}{\tau_2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{\tau_1(\tau_2 + \tau_3)}{(r_1 + r_3)^3} \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\tau_1 \tau_3^2 (r_3 - r_1)}{\tau_2 (r_1 + r_3)^4} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

二式相除,也只准到 $(r_1 + r_3)^{-4}$ ,可得

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} + \frac{4}{3} \frac{\tau_1 \tau_2 (\tau_3 - \tau_1)}{\tau_3 (r_1 + r_3)^3} + 4 \tau_1^2 \frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} \quad (2.116)$$

当 $\tau_1$ 很小, $r_i$ 较大时,第三项很小;而当 $\tau_1 \sim \tau_3$ 时(即第二观测时刻在 $t_1, t_3$ 中点附近),第二项也很小.

3. 第一次近似值. 在(2.116)式中,若只取第一项,则

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}, \quad (2.117)$$

相应的

$$M = -\frac{\tau_1 \sigma_1}{\tau_3 \sigma_3} \quad (2.118)$$

如又略去  $m$ , 则有

$$\rho_3 = \rho_1 M, \quad (2.119)$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \rho_1 - X_1, & x_3 &= a_3 M \rho_3 - X_3, \\ y_1 &= b_1 \rho_1 - Y_1, & y_3 &= b_3 M \rho_3 - Y_3, \\ z_1 &= c_1 \rho_1 - Z_1, & z_3 &= c_3 M \rho_3 - Z_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= R_1^2 + 2R_1 \rho_1 \cos \theta_1 + \rho_1^2, \\ r_3^2 &= R_3^2 + 2R_3 \rho_3 \cos \theta_3 + \rho_3^2, \\ &= R_3^2 + 2R_3 M \rho_1 \cos \theta_3 + M^2 \rho_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_1^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, & R_3^2 &= X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2, \\ 2R_1 \cos \theta_1 &= -2(a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1), \\ 2R_3 \cos \theta_3 &= -2(a_3 X_3 + b_3 Y_3 + c_3 Z_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

弦长

$$s^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2.$$

用 (2.120) 式代入得

$$s^2 = g^2 + 2gh \rho_1 \cos \phi + h^2 \rho_1^2. \quad (2.123)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} g^2 &= (X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + (Z_1 - Z_3)^2, \\ 2gh \cos \phi &= 2[(a_3 M - a_1)(X_1 - X_3) + (b_3 M - b_1) \\ &\quad \times (Y_1 - Y_3) + (c_3 M - c_1)(Z_1 - Z_3)], \\ h^2 &= (a_3 M - a_1)^2 + (b_3 M - b_1)^2 \\ &\quad + (c_3 M - c_1)^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.124)$$

都是已知量. 故只要知道  $\rho_1$ , 就可以从 (2.123) 式算出弦长

$s_1$  由于是从几何方法得到的, 记为  $s_2$ 。另外, 由 (2.115) 式所定出的  $s$  叫  $s_d$ , 它们应该相等。利用这个关系就可以定出  $\rho_1$ 。先取  $\rho_1$  几个值, 用 (2.121) 式算出相应的  $r_1, r_3$ , 代入 (2.103) 式算出相应的  $\eta$ , 再用 (2.105) 式算出相应的  $s_d$  值。另外, 从 (2.123) 式算出相应的  $s_2$ 。由此得出相应于  $s_2 - s_d = 0$  时的  $\rho_1$  值, 它就是要求的结果。有了  $\rho_1$  后, 代入 (2.119) (2.120) 式就得到  $(x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3)$ 。用它们可以算出轨道根数, 这样的结果就叫做第一次近似值。从 (2.116) 式可看出, 当  $\tau_3 \sim \tau_1$  时, 用 (2.117) 式还是比较精确的, 故  $M$  值也比较精确。可是  $m$  是否很小呢?

从  $m$  的定义 (2.113) 式可知,

$$m = \frac{1}{\odot_3} \left( \odot_1 \frac{n_1}{n_3} + \odot_3 \right) = \frac{\odot_1}{\odot_3} \left( \frac{n_1}{n_3} + \frac{\odot_3}{\odot_1} \right). \quad (2.125)$$

如取  $A, B, C$  为 (2.109) 式右端的三个值, 则从 (2.111) 式知,

$$\begin{aligned} \odot_1 &= (b_2 Z_2 - c_2 Y_2) X_1 + (c_2 X_2 - a_2 Z_2) Y_1 \\ &\quad + (a_2 Y_2 - b_2 X_2) Z_1 = (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{R}_2) \cdot \mathbf{R}_1 \\ &= (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

其中向量关系为

$$\mathbf{p}_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \mathbf{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i);$$

同理

$$\odot_3 = (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3) \cdot \mathbf{p}_3.$$

显然,  $\mathbf{R}_i$  为太阳在  $t_i$  时的地心向径, 都在黄道面上,  $\mathbf{p}_2$  为地心 (实际上是观测站, 同地心相差很小) 到  $t_2$  时彗星位置方向的单位向量。根据向量积可知,  $\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3$  的大小为  $\mathbf{R}_2$  和  $\mathbf{R}_3$  组成的三角形面积的两倍, 记为  $[R_2, R_3]$ ; 方向指向黄道北极。同理,  $\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_1$  的大小为  $[R_1, R_2]$ , 指向黄道南极。如用  $\mathbf{N}$  表示指向黄道北极的单位向量, 则有

$$\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3 = [\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3] \mathbf{N},$$

$$\mathbf{R}_3 \times \mathbf{R}_1 = -[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] \mathbf{N}.$$

则

$$\frac{\odot_3}{\odot_1} = -\frac{[\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3]}{[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]} \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_2}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{p}_1} = -\frac{[\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3]}{[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]}$$

代入(2.125)式即得

$$m = \frac{\odot_1}{\odot_3} \left( \frac{n_1}{n_3} - \frac{[\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3]}{[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]} \right). \quad (2.126)$$

当  $\tau_3 \sim \tau_1$  时,  $n_1/n_3$  可近似地取为  $\tau_1/\tau_3$ . 而地球轨道接近于圆形, 故  $[\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3]/[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]$  更接近于  $\tau_1/\tau_3$ , 因而  $m$  是很小的量. 在第一次近似中完全可以略去.

至于  $\rho_1$  的近似值的选取问题, 可根据彗星视位置情况决定. 一般情况下, 彗星都是在太阳附近才观测到, 故取  $\rho_1$  为 1 附近的值. 若彗星视位置同太阳方向相差较远,  $\rho_1$  的值应取得略大些.

4. 例外情形. 在求  $M$  值时, 如果遇到  $\odot_3$  很小, 此时有效位数减少, 求出的  $M$  值就不准. 由(2.111)式可知,

$$\begin{aligned} \odot_3 &= Aa_3 + Bb_3 + Cc_3 \\ &= (b_2Z_2 - c_2Y_2)a_3 + (c_2X_2 - a_2Z_2)b_3 \\ &\quad + (a_2Y_2 - b_2X_2)c_3 = (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{R}_2) \cdot \mathbf{p}_3, \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{p}_3$  即地心到  $t_3$  时彗星位置方向的单位向量. 从上式可知, 当  $\mathbf{p}_2, \mathbf{R}_2, \mathbf{p}_3$  共一个平面时, 亦即彗星第二, 三视位置同太阳在  $t_2$  时位置在天球上同一个大圆上时,  $\odot_3 = 0$ . 若  $\mathbf{p}_3$  同  $\mathbf{p}_2, \mathbf{R}_2$  接近于一个平面时,  $\odot_3$  是小量, 此时叫做例外情形.

此时, 可从(2.107)式消去  $\rho_2$  得到两个式子, 选其中  $\rho_3$  的系数较大的一个代替奥耳白尔方程(2.112)式. 在其中取  $n_1/n_3$  为  $\tau_1/\tau_3$ ,  $1/n_3$  为  $\tau_2/\tau_3$ , 作为第一次近似值. 再根据它来算  $s_e$ .

5. 第二次近似和轨道改进. 如果  $\tau_1$  不大, 而且  $\tau_1 \sim \tau_3$ ,

$s$  由于是从几何方法得到的, 记为  $s_g$ . 另外, 由 (2.115) 式所定出的  $s$  叫  $s_d$ , 它们应该相等. 利用这个关系就可以定出  $\rho_i$ . 先取  $\rho_i$  几个值, 用 (2.121) 式算出相应的  $r_1, r_3$ , 代入 (2.103) 式算出相应的  $\eta$ , 再用 (2.105) 式算出相应的  $s_d$  值. 另外, 从 (2.123) 式算出相应的  $s_g$ . 由此得出相应于  $s_g - s_d = 0$  时的  $\rho_i$  值, 它就是要求的结果. 有了  $\rho_i$  后, 代入 (2.119) (2.120) 式就得到  $(x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3)$ . 用它们可以算出轨道根数, 这样的结果就叫做第一次近似值. 从 (2.116) 式可看出, 当  $\tau_3 \sim \tau_1$  时, 用 (2.117) 式还是比较精确的, 故  $M$  值也比较精确. 可是  $m$  是否很小呢?

从  $m$  的定义 (2.113) 式可知,

$$m = \frac{1}{\odot_3} \left( \odot_1 \frac{n_1}{n_3} + \odot_3 \right) = \frac{\odot_1}{\odot_3} \left( \frac{n_1}{n_3} + \frac{\odot_3}{\odot_1} \right). \quad (2.125)$$

如取  $A, B, C$  为 (2.109) 式右端的三个值, 则从 (2.111) 式知,

$$\begin{aligned} \odot_1 &= (b_2 Z_2 - c_2 Y_2) X_1 + (c_2 X_2 - a_2 Z_2) Y_1 \\ &\quad + (a_2 Y_2 - b_2 X_2) Z_1 = (\boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{R}_2) \cdot \boldsymbol{R}_1 \\ &= (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1) \cdot \boldsymbol{p}_2. \end{aligned}$$

其中向量关系为

$$\boldsymbol{p}_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad \boldsymbol{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i);$$

同理

$$\odot_3 = (\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_3) \cdot \boldsymbol{p}_2.$$

显然,  $\boldsymbol{R}_i$  为太阳在  $t_i$  时的地心向径, 都在黄道面上,  $\boldsymbol{p}_2$  为地心 (实际上是观测站, 同地心相差很小) 到  $t_2$  时彗星位置方向的单位向量. 根据向量积可知,  $\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_3$  的大小为  $\boldsymbol{R}_2$  和  $\boldsymbol{R}_3$  组成的三角形面积的两倍, 记为  $[\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3]$ ; 方向指向黄道北极. 同理,  $\boldsymbol{R}_2 \times \boldsymbol{R}_1$  的大小为  $[\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2]$ , 指向黄道南极. 如用  $\boldsymbol{N}$  表示指向黄道北极的单位向量, 则有

$$= \operatorname{ctg} \frac{f_3 - f_1}{2} - \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \operatorname{csc} \frac{f_3 - f_1}{2}. \quad (2.130)$$

由(2.130)式可得 $f_1$ , 以及 $f_3 = f_1 + f_3 - f_1$ , 因此若令

$$\sigma_i = \operatorname{tg} \frac{1}{2} f_i, \quad (2.131)$$

则可得

$$q = \frac{r_1}{1 + \sigma_1^2} = \frac{r_3}{1 + \sigma_3^2}. \quad (2.132)$$

再由公式(1.45)知,

$$\sigma_i + \frac{1}{3} \sigma_i^3 = \frac{K}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{2}} (t_i - T). \quad (2.133)$$

可算出彗星过近日点时刻 $T$ . 关于轨道根数 $Q, \omega, i$ 的求法, 与高斯方法中的公式完全一样, 不再重复.

有了轨道根数, 可算出 $t_2$ 时的 $(\alpha_2, \delta_2)$ 与第二个观测值比较.  $(\alpha_i, \delta_i)$ 的解法如下, 先从(2.133)式得

$$\sigma_2 + \frac{1}{3} \sigma_2^3 = \frac{K}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{2}} (t_2^o - T), \quad (2.134)$$

可解出 $\sigma_2$ (用数值方法). 再由(2.129)式可知,

$$r_2 \cos f_2 = q \sec^2 \frac{f_2}{2} \cos f_2 = q \sec^2 \frac{f_2}{2}$$

$$\times \left( 2 \cos^2 \frac{f_2}{2} - 1 \right) = q(1 - \sigma_2^2),$$

$$r_2 \sin f_2 = q \sec^2 \frac{f_2}{2} \sin f_2 = 2q \sec \frac{f_2}{2} \sin \frac{f_2}{2} \cos \frac{f_2}{2} = 2q\sigma_2.$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= P_x r \cos f_2 + Q_x r \sin f_2 \\ &= P_x q(1 - \sigma_2^2) + 2Q_x q\sigma_2, \\ y_2 &= P_y q(1 - \sigma_2^2) + 2Q_y q\sigma_2, \\ z_2 &= P_z q(1 - \sigma_2^2) + 2Q_z q\sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.135)$$



$$\text{再由} \quad \left. \begin{aligned} \rho_2 \cos \alpha_2 \cos \delta_2 &= x_2 + X_2, \\ \rho_2 \sin \alpha_2 \cos \delta_2 &= y_2 + Y_2, \\ \rho_2 \sin \delta_2 &= z_2 + Z_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

解出  $\alpha_2, \delta_2$ , 与观测值比较. 如得到的 O-C, 即  $\cos \delta_2 \Delta \alpha, \Delta \delta$  小于 0.5 也就可以了. 如 O-C 较大, 要作轨道改进. 假定误差是由  $M$  值 [如取到第二次近似, 则用  $(M)$ ] 所引起的, 并认为 O-C 与  $M$  的变化为线性的关系, 在  $M = M_1$  时, 得到的 O-C 为  $\Delta \alpha', \Delta \delta'$ ; 在  $M = M_2$  时得到的 O-C 为  $\Delta \alpha'', \Delta \delta''$ . 其中  $M_1$  同  $M_2$  相差约取 0.001 左右. 则最佳值  $M = M_1 + x$ , 由下式决定:

$$\begin{aligned} \cos \delta_2 (\Delta \alpha' - \Delta \alpha'') \frac{x}{M_2 - M_1} &= \cos \delta_2 \Delta \alpha' \\ (\Delta \delta' - \Delta \delta'') \frac{x}{M_2 - M_1} &= \Delta \delta'. \end{aligned}$$

用最小二乘法可解出为

$$\frac{x}{M_2 - M_1} = \frac{\cos^2 \delta_2 \Delta \alpha' (\Delta \alpha' - \Delta \alpha'') + \Delta \delta' (\Delta \delta' - \Delta \delta'')}{\cos^2 \delta_2 (\Delta \alpha' - \Delta \alpha'')^2 + (\Delta \delta' - \Delta \delta'')^2} \quad (2.137)$$

由此可解出  $x$ . 再用  $M$  或  $(M)$  加上  $x$  去计算轨道.

6. 公式总结. 原始数据和辅助量的公式与高斯方法完全相同, 只是抛物线轨道的精度较差, 一般只用五位 (最多六位) 有效数字. 如只用五位, 视差可不必修正. 现列出如下:

$$t_i, \alpha_i, \delta_i, X_i, Y_i, Z_i, (i = 1, 2, 3) \quad (I)$$

$$a_i = \cos \alpha_i \cos \delta_i, \quad b_i = \sin \alpha_i \cos \delta_i, \quad c_i = \sin \delta_i. \quad (II)$$

验算式:

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \quad a_i - c_i \sin \alpha_i = \cos(\alpha_i + \delta_i),$$

$$b_i + c_i \cos \alpha_i = \sin(\alpha_i + \delta_i).$$

$$\left. \begin{aligned} R_1^2 &= X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \quad R_3^2 = X_3^2 + Y_3^2 + Z_3^2, \\ 2R_1 \cos \theta_1 &= -2(a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1 Z_1), \\ 2R_3 \cos \theta_3 &= -2(a_3 X_3 + b_3 Y_3 + c_3 Z_3). \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

验算式:

$$\begin{aligned} R_1^2 + 2R_1 \cos \theta_1 + 1 &= (X_1 - a_1)^2 \\ &+ (Y_1 - b_1)^2 + (Z_1 - c_1)^2, \\ R_3^2 + 2R_3 \cos \theta_3 + 1 &= (X_3 - a_3)^2 \\ &+ (Y_3 - b_3)^2 + (Z_3 - c_3)^2. \end{aligned}$$

求第一次近似值的公式如下:

$$\begin{aligned} A &= b_2 Z_2 - c_2 Y_2, & B &= c_2 X_2 - a_2 Z_2, \\ C &= a_2 Y_2 - b_2 X_2. \end{aligned} \quad (\text{IV}_1)$$

验算式:

$$Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 = 0, \quad AX_2 + BY_2 + CZ_2 = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{Aa_1 + Bb_1 + Cc_1}{Aa_3 + Bb_3 + Cc_3}, \\ g^2 &= (X_1 - X_3)^2 + (Y_1 - Y_3)^2 + (Z_1 - Z_3)^2, \\ 2gh \cos \phi &= 2[(a_3 M - a_1)(X_1 - X_3) + (b_3 M \\ &- b_1)(Y_1 - Y_3) + (c_3 M - c_1)(Z_1 - Z_3)], \\ h^2 &= (a_3 M - a_1)^2 + (b_3 M - b_1)^2 + (c_3 M - c_1)^2. \end{aligned} \right\} (\text{V}_1)$$

验算式:

$$\begin{aligned} g^2 + 2gh \cos \phi + h^2 &= [(X_1 - X_3) + (a_3 M - a_1)]^2 \\ &+ [(Y_1 - Y_3) + (b_3 M - b_1)]^2 + [(Z_1 - Z_3) \\ &+ (c_3 M - c_1)]^2. \end{aligned}$$

先给  $\rho_1$  一些近似值 (可由彗星同太阳在天球上的视角距来估计), 可算出

$$\left. \begin{aligned} \rho_3 &= M \rho_1, \\ r_i^2 &= R_i^2 + 2R_i \rho_1 \cos \theta_i + \rho_1^2, \quad (i = 1, 3), \\ s_g^2 &= g^2 + 2gh \cos \phi \rho_1 + \rho_1^2, \\ \eta &= \frac{2K(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{3/2}}, \quad K = 0.0172021, \\ s_d &= (r_1 + r_3) \left( \eta + \frac{1}{24} \eta^3 + \frac{5}{384} \eta^5 + \dots \right). \end{aligned} \right\} (\text{VI})$$

用内插法求出相应于  $s_g - s_d = 0$  时的  $\rho_1$ 。

如果  $M$  的分母太小 (有效位数减少), 则为例外情况, (VI<sub>1</sub>), (V<sub>1</sub>) 两式不能用。要由基本方程

$$\left. \begin{aligned} a_1 n_1 \rho_1 - a_2 \rho_2 + a_3 n_3 \rho_3 &= n_1 X_1 - X_2 + n_3 X_3, \\ b_1 n_1 \rho_1 - b_2 \rho_2 + b_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Y_1 - Y_2 + n_3 Y_3, \\ c_1 n_1 \rho_1 - c_2 \rho_2 + c_3 n_3 \rho_3 &= n_1 Z_1 - Z_2 + n_3 Z_3, \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV}_2)$$

消去  $\rho_2$  可得两个方程, 选其中  $\rho_3$  的系数较大的一个, 仍然用下面符号表示:

$$\odot_1 n_1 \rho_1 + \odot_3 n_3 \rho_3 = \odot_1 n_1 - \odot_2 + n_3 \odot_3,$$

其中  $\odot_i$ ,  $\odot_i$  是消去  $\rho_2$  后方程的系数数值, 然后再用公式

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{\odot_1 t_3 - t_2}{\odot_3 t_2 - t_1}, \\ m &= \frac{1}{\odot_3} \left( \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \odot_1 - \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \odot_2 + \odot_3 \right), \end{aligned} \right\}$$

上式变为

$$\rho_3 = M \rho_1 + m.$$

再计算

$$\left. \begin{aligned} g^2 &= (a_3 m + X_1 - X_3)^2 + (b_3 m + Y_1 - Y_3)^2 \\ &\quad + (c_3 m + Z_1 - Z_3)^2, \\ 2gh \cos \phi &= 2[(a_3 M - a_1)(a_3 m + X_1 - X_3) \\ &\quad + (b_3 M - b_1)(b_3 m + Y_1 - Y_3) \\ &\quad + (c_3 M - c_1)(c_3 m + Z_1 - Z_3)], \\ h^2 &= (a_3 M - a_1)^2 + (b_3 M - b_1)^2 \\ &\quad + (c_3 M - c_1)^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V}_2)$$

验算式:

$$\begin{aligned} g^2 + 2gh \cos \phi + h^2 &= (a_3 M - a_1 + a_3 m \\ &\quad + X_1 - X_3)^2 + (b_3 M - b_1 + b_3 m \\ &\quad + Y_1 - Y_3)^2 + (c_3 M - c_1 + c_3 m + Z_1 - Z_3)^2. \end{aligned}$$

用(IV<sub>2</sub>), (V<sub>2</sub>) 代入 (VI) 求  $\rho_1$  的第一次近似值。

如需要求第二次近似值, 则根据第一次近似值的  $\rho_1, \rho_3$ , 并取平均值作为  $\rho_2$ , 求出光行差改正:

$$t_i^0 = t_i - A\rho_i, \quad A = 0.005772.$$

然后再取,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= K(t_3^0 - t_2^0), \quad \tau_2 = K(t_3^0 - t_1^0), \\ \tau_3 &= K(t_2^0 - t_1^0), \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

算出

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} + \frac{4\tau_1\tau_2(\tau_3 - \tau_1)}{3\tau_3(r_1 + r_3)^3} + \frac{4\tau_1^2(r_3 - r_1)}{(r_1 + r_3)^4}. \quad (\text{VIII})$$

其中  $r_1, r_3$  用第一次近似值, 再算

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{n_1 A a_1 + B b_1 + C c_1}{n_3 A a_3 + B b_3 + C c_3}, \\ m &= \frac{1}{A a_3 + B b_3 + C c_3} \left[ (A X_1 + B Y_1 + C Z_1) \frac{n_1}{n_3} \right. \\ &\quad \left. + (A X_3 + B Y_3 + C Z_3) \right]. \end{aligned} \right\} (\text{IX})$$

然后再用

$$\rho_3 = M\rho_1 + m = (M + m/\rho_1)\rho_1 = (M)\rho_1,$$

代入 (V), (VI) 式, 重新解出  $\rho_1$ , 就是第二次近似值. 代入上式得  $\rho_3$ , 由此可算轨道根数.

先算出

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a_i\rho_i - X_i, \quad y_i = b_i\rho_i - Y_i, \quad z_i = c_i\rho_i - Z_i, \\ r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2. \quad (i = 1, 3) \end{aligned} \right\} (\text{X})$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3}{r_1^2}, \\ x_0 &= x_3 - \sigma x_1, \quad y_0 = y_3 - \sigma y_1, \quad z_0 = z_3 - \sigma z_1, \\ r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad \sin(f_3 - f_1) = r_0/r_3, \\ \cos(f_3 - f_1) &= \sigma r_1/r_3. \end{aligned} \right\} (\text{XI})$$

由此求出  $f_3 - f_1$ , 再从

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{f_1}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{f_3 - f_1}{2} - \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \operatorname{csc} \frac{f_3 - f_1}{2}, \\ f_3 &= (f_3 - f_1) + f_1, \\ \sigma_1 &= \operatorname{tg} \frac{f_1}{2}, \quad \sigma_3 = \operatorname{tg} \frac{f_3}{2}, \\ q &= \frac{r_1}{1 + \sigma_1^2} = \frac{r_3}{1 + \sigma_3^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII})$$

算出  $f_1, f_3, q$  和  $\sigma_1, \sigma_3$ . 再由

$$\sigma_i + \frac{1}{3} \sigma_i^3 = \frac{K}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{2}} (t_i^0 - T),$$

算出过近日点时刻  $T$ , 于是轨道根数  $q, T$  可求出.

再由

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{x_1}{r_1} \cos f_1 - \frac{x_0}{r_0} \sin f_1, \\ Q_x &= \frac{x_1}{r_1} \sin f_1 + \frac{x_0}{r_0} \cos f_1, \\ P_y &= \frac{y_1}{r_1} \cos f_1 - \frac{y_0}{r_0} \sin f_1, \\ Q_y &= \frac{y_1}{r_1} \sin f_1 + \frac{y_0}{r_0} \cos f_1, \\ P_z &= \frac{z_1}{r_1} \cos f_1 - \frac{z_0}{r_0} \sin f_1, \\ Q_z &= \frac{z_1}{r_1} \sin f_1 + \frac{z_0}{r_0} \cos f_1; \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII})$$

验算式:

$$P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = 1;$$

$$P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = 0;$$

以及

$$\left. \begin{aligned}
 \sin i \sin \omega &= P_x \cos \varepsilon - P_y \sin \varepsilon, \\
 \sin i \cos \omega &= Q_x \cos \varepsilon - Q_y \sin \varepsilon, \\
 \sin Q &= (P_y \cos \omega - Q_y \sin \omega) \sec \varepsilon, \\
 \cos Q &= P_x \cos \omega - Q_x \sin \omega, \\
 \cos i &= -(P_x \sin \omega + Q_x \cos \omega) \csc Q;
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIV})$$

由此可得轨道根数  $Q, \omega, i$ .

关于计算第二时刻的位置和轨道改进，已在 (2.134) — (2.137) 式中讲明，不再重述。书末附录中有计算彗星抛物线轨道的例子。

### 第三章 摄动运动方程

前两章详细讨论了二体问题和它的应用。对太阳系天体来说，是近似的又是最基本的结果。从本章开始讨论多体问题，更进一步接近太阳系天体的实际情况。本章是从讨论一般的 $N$ 体问题出发，利用力学原理，得出各种常用的典型的摄动运动方程，是摄动理论的基础。

#### §1 $N$ 体问题的运动方程和它们的初积分

讨论 $n$ 个质点在万有引力作用下的运动问题就叫做 $N$ 体问题。

1. 运动方程。设 $n$ 个天体 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，并设 $P_i$ 在惯性坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 中的坐标为 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ，并用 $\Delta_{ij}$ 表示任意两个天体 $P_i, P_j$ 在任一时刻的距离，则有

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2. \quad (3.1)$$

从绪论§3的讨论可知，任一天体 $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 受其它 $n-1$ 个天体吸引的位函数为

$$G \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i).$$

因此， $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的运动方程为

$$m_i \ddot{\xi}_i = G m_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i),$$

$$= G \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i). \quad (3.2)$$

$\eta_i, \zeta_i$  的方程相同。

令  $i = 1, 2, \dots, n$ , 就得到  $n$  个天体的运动方程。如果用  $U$  表示函数:

$$\begin{aligned} U &= G \left\{ \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \dots + \frac{m_1 m_n}{\Delta_{1n}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \dots + \frac{m_2 m_n}{\Delta_{2n}} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{m_{n-1} m_n}{\Delta_{n-1,n}} \right\} \\ &= G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (i \neq j). \quad (3.3) \end{aligned}$$

则  $U$  对  $\xi_i$  的偏导数只包含其中有  $m_i$  的项, 就是 (3.2) 式, 对所有的  $i$  都成立。因此, (3.2) 式对于  $\xi, \eta, \zeta$  三个分量的方程可写为

$$m_i \ddot{\xi}_i = \partial U / \partial \xi_i, \quad m_i \ddot{\eta}_i = \partial U / \partial \eta_i, \quad m_i \ddot{\zeta}_i = \partial U / \partial \zeta_i. \quad (3.4)$$

这就是  $N$  体问题对应于惯性直角坐标系的运动方程。它们是  $3n$  个二阶的微分方程组, 故整个为  $6n$  阶方程组。

2. 力函数。由 (3.3) 式定义的函数  $U$ , 它对某天体坐标的偏导数, 就是作用于此天体的引力的分量, 即 (3.4) 式。因此把  $U$  叫做  $n$  体系统的力函数。从 (3.3) 式可知,  $U$  只同  $n$  体之间的距离有关, 同惯性坐标系的选择无关。从力学观点来看,  $-U$  实际上是  $n$  体系统的总位能(或势能), 从后面能量积分可以看出。



3.  $N$ 体问题的十个初积分。要解决 $N$ 体问题，必须积分 $n$ 体的运动方程(3.4)。由于只考虑 $n$ 体之间的万有引力，即对这个系统而言，不存在外力和外力矩。故从力学中的结果可知，“动量守恒定理”、“质量中心运动定理”、“动量矩守恒定理”都应成立。另外，又由于万有引力确定单值力函数，即(3.3)式。故“能量(机械能)守恒定律”也成立。下面所得的十个初积分，就是这些定理或定律的体现。

首先，由 $\Delta_{ij}$ 的定义(3.1)式知

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} \right) = -\frac{\xi_i - \xi_j}{\Delta_{ij}^3}.$$

代入(3.4)得

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = G m_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \\ &= -G \sum_{j=1}^n \frac{m_j m_i (\xi_i - \xi_j)}{\Delta_{ij}^3} \quad (j \neq i), \end{aligned}$$

再对 $i$ 求和得

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\xi}_i = -G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j (\xi_i - \xi_j)}{\Delta_{ij}^3} \quad (j \neq i).$$

上式右端共 $n(n-1)$ 项，其中任何一项都有一个对应项( $i, j$ 交换)同它一样，但符号相反，因此总和为0，即

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\xi}_i &= 0, \\ \text{同理} \quad \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\eta}_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\zeta}_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

(3.5)式对时间 $t$ 积分一次可得

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i = A_1, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{\eta}_i = B_1, \quad \sum_{i=1}^n m_i \dot{\zeta}_i = C_1. \quad (3.6)$$

其中  $A_1, B_1, C_1$  为积分常数。(3.6) 式表明:  $n$  体的总动量在三个坐标轴上的分量是常数, 这就是动量守恒定律的体现。

(3.6) 式可再积分一次得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \xi_i &= A_1 t + A_2, & \sum_{i=1}^n m_i \eta_i &= B_1 t + B_2, \\ & & \sum_{i=1}^n m_i \zeta_i &= C_1 t + C_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中  $A_2, B_2, C_2$  为另外三个独立的积分常数。(3.7) 式在力学上也有具体意义。设

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

为  $n$  体的总质量, 再设  $(\xi, \eta, \zeta)$  为  $n$  体质量中心在同一惯性坐标系中的坐标, 则由质量中心的定义可知,

$$M \xi = \sum_{i=1}^n m_i \xi_i, \quad M \dot{\xi} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\xi}_i,$$

$\eta, \zeta$  的式子相同。故 (3.6), (3.7) 两式可写为

$$M \dot{\xi} = A_1, \quad M \dot{\eta} = B_1, \quad M \dot{\zeta} = C_1; \quad (3.8)$$

$$M \xi = A_1 t + A_2, \quad M \eta = B_1 t + B_2,$$

$$M \zeta = C_1 t + C_2. \quad (3.9)$$

(3.8), (3.9) 式表明,  $n$  体的质量中心是在作等速直线运动(相对于惯性坐标系), 这就是质量中心运动定理的体现。

(3.6), (3.7) 式共有六个积分, 包含有六个相互独立的积分常数  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ 。根据上述理由, 又把它们叫做质量中心运动积分。

又由  $U$  的定义可知,

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_i} = -Gm_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j(\eta_i - \eta_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta_i} = -Gm_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j(\zeta_i - \zeta_j)}{\Delta_{ij}^3}.$$

可得

$$\eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j (\eta_i \zeta_j - \zeta_i \eta_j)}{\Delta_{ij}^3} (j \neq i).$$

即

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left( \eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right) \\ &= G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j (\eta_i \zeta_j - \zeta_i \eta_j)}{\Delta_{ij}^3} \quad (j \neq i). \end{aligned}$$

容易看出, 上式右端  $n(n-1)$  项的总和也为 0. 故用 (3.4) 式可得

$$\sum_{i=1}^n m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = \sum_{i=1}^n \left( \eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right) = 0,$$

即

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) = 0,$$

积分得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= D_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= D_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= D_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

同理可得

其中  $D_1, D_2, D_3$  为新的独立积分常数. 容易看出, 上式左端是  $n$  体系统的总动量矩在三个坐标轴上的分量, 它们等于常数就是动量矩守恒定理的体现. 因此 (3.10) 式的三个积分又叫做动量矩积分.

$n$  体系统的总动量矩为一个常向量, 它的大小为

$$D = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2},$$

在所选择的坐标系中的方向余弦为  $(D_1/D, D_2/D, D_3/D)$ . 通过原点, 垂直于这个向量的平面, 叫做  $n$  体系统的总动量矩平面. 由于总动量矩大小和方向同所取的坐标系原点有关, 若以质量中心为原点, 相应的总动量矩平面叫做不变平面.

最后, 设  $T$  为  $n$  体的总动能, 则有

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2),$$

可得

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \ddot{\zeta}_i).$$

用 (3.4) 式代入, 并根据  $U$  的定义可得

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i \right) = \frac{dU}{dt}.$$

积分可得

$$T = U + E, \text{ 或 } T - U = E, \quad (3.11)$$

其中  $E$  为新的积分常数. 从这里可看出,  $-U$  为  $n$  体系统的总位能, 故 (3.11) 式为能量守恒定律的体现.  $E$  称为  $n$  体系统的总能量, (3.11) 式又叫做能量积分.

4. 进一步的讨论. 上面得到了 (3.6), (3.7), (3.10), (3.11) 式共十个初积分. 但  $n$  体运动方程为  $6n$  阶常微分方程组, 若要完全解出, 应求出其余的  $6n-10$  个积分, 包含另外  $6n-10$  个独立的积分常数. 到 1843 年, 雅哥比 (Jacobi,

C. H. J.) 证明: 如果只差两积分, 其余的都已找出, 则这两个可以用特殊的方法找出来。  $n = 2$  时, 正好差两个积分, 第一章已求出了它们的全部积分。  $n = 3$  时, 还差 8 个, 直到现在还没有找出一个新积分。 1887 年, 勃隆斯 (Bruns, H.) 证明<sup>1)</sup>: 如果用直角坐标和速度分量作变量, 则除已知的十个积分外, 不存在新的代数积分 (即积分是变量和时间的代数函数)。 1889 年, 邦加雷 (Poincaré, H.) 又证明<sup>2)</sup>: 如用轨道根数作变量, 则三体问题不存在新的单值解析积分。 虽然他们的结论并没有把寻找新积分的路堵死, 但直到现在为止, 还没有找出来。

既然积分运动方程这条路还没有走通, 天体力学工作者就根据太阳系天体运动的特点, 以二体问题为基础, 讨论各种因素对二体问题轨道的影响, 这就是摄动理论。 本章就是讲述摄动理论的第一步: 建立各种类型的摄动运动方程。

## § 2 用直角坐标表示的摄动运动方程

在讨论太阳系中的行星运动时, 由于太阳的质量占绝对优势, 最大的木星质量只有太阳质量的  $1/1047$ , 故太阳的引力应占主要地位。 现在讨论行星相对于太阳的运动。 设  $n$  体为  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ;  $P_i$  的质量为  $m_i$ , 其中  $P_0$  表示太阳, 质量为  $m_0$ 。

把上节的惯性坐标系平移到太阳  $P_0$  处。 新坐标系为  $P_0$ - $XYZ$ , 与原来的  $O$ - $\xi\eta\zeta$  的三个坐标轴相互平行。 则任一行星  $P_i$  的新坐标  $(x_i, y_i, z_i)$  同旧坐标  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  之间的关系为

1) 参看 Bruns, H.: *Acta Math.*, 11, P. 25—96, (1887—1888)。

2) 参看 Poincaré, H.: *Acta Math.*, 13, P. 1—271, (1890)。

$$\xi_i = x_i + \xi_n, \quad \eta_i = y_i + \eta_n, \quad \zeta_i = z_i + \zeta_n. \quad (3.12)$$

其中  $(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$  为太阳  $P_n$  的旧坐标, 显然有  $x_n = y_n = z_n = 0$ . 由此可得

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ij}^2 &= (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2 \\ &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} \right), \dots$$

故 (3.2) 式可写为

$$\ddot{\xi}_i = G \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} = G \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i),$$

用 (3.12) 式代入得

$$\ddot{x}_i + \ddot{\xi}_n = \ddot{\xi}_i = G \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\Delta_{ij}} = -G \sum_{j=1}^n \frac{m_j (x_i - x_j)}{\Delta_{ij}^3}, \quad (3.14)$$

$$= G \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{m_n}{\Delta_{in}} \right) + G \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i). \quad (3.15)$$

同样, 当  $i = n$  时, 从 (3.14) 式得 (因  $x_n = y_n = z_n = 0$ )

$$\ddot{\xi}_n = G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x_j}{\Delta_{nj}^3} = G \frac{m_i x_i}{\Delta_{ni}^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x_j}{\Delta_{nj}^3} \quad (j \neq i).$$

由于太阳是坐标原点, 令  $r_i = \Delta_{ni} = \Delta_{in}$ , 则

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}. \quad (3.16)$$

代入上式得

$$\ddot{\xi}_n = G \frac{m_i x_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x_j}{r_j^3} \quad (j \neq i). \quad (3.17)$$

以 (3.16), (3.17) 式代入 (3.15) 式可得

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + G \frac{m_i x_i}{r_i^3} + G \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x_j}{r_j^3} \\ = -G \frac{m_n x_i}{r_i^3} + G \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \quad (j \neq i), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + G \frac{m_i + m_n}{r_i^3} x_i = G \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{\Delta_{ij}} \\ - G \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x_j}{r_j^3} \quad (j \neq i), \quad (3.18) \end{aligned}$$

$y_i, z_i$  的式子相同。定义函数

$$R_{ij} = G m_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right) \quad (j \neq i), \quad (3.19)$$

则(3.18)式成为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i + G \frac{m_i + m_n}{r_i^3} x_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} \quad (j \neq i), \\ \text{同理:} \\ \ddot{y}_i + G \frac{m_i + m_n}{r_i^3} y_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial R_{ij}}{\partial y_i}, \\ \ddot{z}_i + G \frac{m_i + m_n}{r_i^3} z_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial R_{ij}}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} (3.20)$$

(3.20)式就是行星 $P_i$ 相对于太阳的运动方程。由于行星共有 $n-1$ 个，故(3.20)式应为 $6n-6$ 阶的常微分方程组。其中太阳的引力项单独列在左端，其它行星的引力项归到右端。当 $m_j=0$ 时， $R_{ij}=0$ ，(3.20)式成为二体问题的运动方程。因此，由于 $R_{ij}$ 的存在，使所讨论的行星 $P_i$ 的运动轨道同 $P_i$ 的二体问题轨道产生偏差。这种偏差就叫做摄动。 $R_{ij}$ 就叫做摄动函数。 $R_{ij}$ 对坐标的偏导数就是摄动加速度在坐标轴

方向的分量,从(3.18)式可看出,也就是行星 $P_i$ 对行星 $P_j$ 的引力同 $P_i$ 对太阳的引力所产生加速度之差,(3.20)式右端就是摄动加速度的总和.所讨论的行星 $P_i$ 又叫做被摄动行星,其它行星 $P_j$ 叫做摄动行星.(3.20)式就叫做行星的摄动运动方程,而且是用直角坐标表示的摄动运动方程.

由于 $R_{ij}$ 含有摄动行星质量 $m_j$ 作为因子,而 $m_j/m_n$ 小于0.001.因此,其它行星对 $P_i$ 的坐标和速度的摄动,同 $P_i$ 沿二体问题轨道运动时的坐标和速度的变化相比,要小得多.但时间越长,摄动也越大.

如摄动行星只有一个,则为三体问题.设被摄动行星为 $P$ ,它的质量,坐标和向径分别为 $m, (x, y, z), r$ ;摄动行星为 $P'$ ,相应的量为 $m', (x', y', z'), r'$ ;太阳质量记为 $M$ .则(3.20)式可写为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu &= G(m + M), \\ \Delta &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \\ R &= Gm' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

在讨论摄动运动时,常用(3.21)式.如不只一个摄动行星,只是摄动函数 $R$ 中增加项数而已.

如果讨论行星 $P, P'$ 同太阳组成的三体问题,(3.21)式只是运动方程的一部份,还要列出行星 $P'$ 的运动方程.此时 $P,$



$P'$  的地位正好交换,  $P'$  成为被摄动行星, 它的运动方程可用 (3.21) 式写出为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}' + \frac{\mu' x'}{r'^3} &= -\frac{\partial R'}{\partial x'}, \\ \ddot{y}' + \frac{\mu' y'}{r'^3} &= -\frac{\partial R'}{\partial y'}, \\ \ddot{z}' + \frac{\mu' z'}{r'^3} &= -\frac{\partial R'}{\partial z'}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mu' &= G(m' + M), \\ R' &= Gm \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

要联立解出 (3.21), (3.23) 式, 才能解决由  $P$ ,  $P'$  和太阳所组成的三体问题.

### § 3 正则方程组

前面两节讨论了用直角坐标表示的  $N$  体问题的运动方程以及摄动运动方程. 从本节开始, 根据不同的需要, 求出不同形式的摄动运动方程. 其中正则方程组是天体力学中常用到的一种.

1. 用直角坐标表示的正则方程组. 从公式 (3.4) 式知,  $N$  体问题的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= -\frac{\partial U}{\partial \xi_i}, & m_i \ddot{\eta}_i &= -\frac{\partial U}{\partial \eta_i}, & m_i \ddot{\zeta}_i &= -\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

其中

$$U = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}.$$

如用  $\phi_i, \psi_i, \chi_i$  表示天体  $P_i$  的动量在三个坐标轴方向上的分量, 即

$$\phi_i = m_i \dot{\xi}_i, \quad \psi_i = m_i \dot{\eta}_i, \quad \chi_i = m_i \dot{\zeta}_i, \quad (3.26)$$

则总动能  $T$  可写为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} (\phi_i^2 + \psi_i^2 + \chi_i^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

再用  $H$  表示  $n$  体系统的总能量, 即

$$H = T - U, \quad (3.28)$$

则可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\phi_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \phi_i}, & \dot{\eta}_i &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, & \dot{\zeta}_i &= \frac{\partial H}{\partial \chi_i}, \\ \phi_i &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \psi_i &= -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \chi_i &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

(3.29) 式形式的方程组就叫做正则方程组, 直角坐标  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  和动量  $(\phi_i, \psi_i, \chi_i)$  是方程组的基本变量. 这两组变量又叫做正则共轭变量. (3.29) 式也是  $6n$  阶的常微方程组, 与 (3.25) 式等价. 但在天体力学中要用到各种形式的坐标系统, 需要得出一般坐标系的正则方程组.

2. 广义坐标.  $N$  体问题共有  $3n$  个坐标, 令  $k = 3n$ . 若通过一种变换, 把直角坐标  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  变为另一组相互独立的  $k$  个变量  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$  和时间  $t$  的函数. 简记为

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = \xi_i(q, t), \\ \eta_i &= \eta_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = \eta_i(q, t), \\ \zeta_i &= \zeta_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t) = \zeta_i(q, t), \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n$ . 因此,  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  的任何函数都可以用  $q_i$  来代替. 如果 (3.30) 式的变换中所用的函数为任意的, 只要

求它们存在对  $q_i, t$  的一,二阶连续偏导数, 则变量  $q_i$  叫做广义坐标.

由(3.30)式可得

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} \dot{q}_r, \quad (3.31)$$

$\eta_i, \zeta_i$  的形式相同. 则总动能  $T$  为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2),$$

用(3.31)式代入后, 成为  $\dot{q}_r$  的二次函数; 按  $\dot{q}_r$  整理可得

$$\begin{aligned} T &= \sum_{r=1}^k A_r \dot{q}_r^2 + 2 \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k B_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \\ &\quad + \sum_{r=1}^k C_r \dot{q}_r + D \\ &= T_2 + T_1 + T_0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中  $T_2$  为  $\dot{q}_r$  的二次齐次函数,  $T_1$  为  $\dot{q}_r$  的一次齐次函数,  $T_0$  为不含  $\dot{q}_r$  的项. 亦即

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \sum_{r=1}^k A_r \dot{q}_r^2 + 2 \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k B_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s \\ T_1 &= \sum_{r=1}^k C_r \dot{q}_r, \quad T_0 = D. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

其中系数  $A_r, B_{rs}, C_r, D$  为  $q_r$  和  $t$  的函数, 故  $T$  也为  $q_r, \dot{q}_r$  和  $t$  的函数, 简记为  $T = T(q, \dot{q}, t)$ . 由于力函数  $U$  只包含直角坐标, 经过(3.30)式变换后,  $U$  为  $q_r$  和  $t$  的函数, 简记为  $U = U(q, t)$ . 故  $T, U$  都表为广义坐标的函数了.

3. 拉格朗日方程. 引入广义坐标后, 就可以用广义坐标来表示  $n$  体的运动方程. 由(3.31)式可得

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_r \partial t} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_s \quad (3.35)$$

在求偏导数过程中,认为  $q_r$  和  $\dot{q}_r$  是相互独立的变量. 由于已假定变换 (3.30) 式对  $t, q$  存在一, 二阶连续偏导数, 故 (3.35) 式中偏导数的次序可以交换, 故得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} \right) = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t \partial q_r} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} \dot{q}_s = \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial q_r}, \quad (3.36)$$

$\eta_i, \zeta_i$  的式子相同. 因式从 (3.27), (3.34) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} &= \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \dot{q}_r} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial \dot{q}_r} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial \dot{q}_r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_r} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

再利用 (3.35), (3.36) 式和 (3.25) 式可求出

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) &= \sum_{i=1}^n m_i \left[ \ddot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} + \ddot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_r} + \ddot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\xi}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} \right) + \dot{\eta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial q_r} \right) + \dot{\zeta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r} \right. \\ &\quad \left. + m_i \left( \dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_r} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

但  $U$  只包含  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , 则

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r} \right].$$

又从 (3.27) 式知

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \dot{\xi}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial q_r} + \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial q_r} + \dot{\zeta}_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_r} \right),$$

把它们代入(3.38)式后得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial}{\partial q_r} (T + U).$$

但因  $U$  不包含  $\dot{q}_r$ , 即

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_r} = 0,$$

故上式可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q_r}, \\ L &= T + U. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

这就是用广义坐标表示的  $N$  体问题的运动方程, 又叫做拉格朗日方程. 其中函数  $L$  是总动能和总位能之差, 叫做运动位能, 又叫做拉格朗日函数.

(3.39)式共有  $k = 3n$  个方程. 从(3.35)式可知

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = \sum E_r \dot{q}_r + F_r,$$

为  $\dot{q}_r$  的线性函数, 其中  $E_r, F_r$  是  $q, t$  的函数. 故(3.39)式中每个方程是  $q_r$  的二阶微分方程, 即(3.39)式为  $6n$  阶的常微分方程组, 与(3.25)式等价.

4. 哈密顿正则方程. 用广义坐标也可以把运动方程化为正则方程组. 可把  $q_r$  看作坐标, 仿照坐标同动量之间的关系 [动能  $T$  表为广义坐标  $q$  和  $\dot{q}$  的函数, 即  $T = T(q, \dot{q}, t)$ ] 定义

$$p_i = \frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.40)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, k$ , (3.40)式定义的  $p_i$  就叫做广义动量. 由(3.33)式可知,  $p_i$  应为  $\dot{q}_r$  的线性函数, 即

$$p_i = \sum_{r=1}^k a_{ir} \dot{q}_r + b_i, \quad (3.41)$$

其中  $a_{ir}, b_i$  为  $q, t$  的函数。从 (3.41) 式可以解出  $\dot{q}_r$ ，仍为  $p_i$  的线性函数，它们的系数仍为  $q, t$  的函数。故  $\dot{q}_r$  可以表为下面形式：

$$\dot{q}_r = \dot{q}_r(q, p, t). \quad (3.42)$$

用 (3.42) 式可以把总动能  $T$  表为  $q, p, t$  的函数。为区别起见，规定  $\bar{T} = \bar{T}(q, p, t)$ ,  $T = T(q, \dot{q}, t)$ 。对  $T_2, T_1$  也是一样。

下面用虚位移来求出所需要的关系。由于  $T = T(q, \dot{q}, t)$ ，当  $q_i, \dot{q}_i$  这两组变量产生与时间无关的微小虚位移  $\delta q_i, \delta \dot{q}_i$  时， $T$  也有相应的变化，记为  $\delta T$ ，即

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i \right). \end{aligned}$$

其中用了  $p_i$  的定义 (3.40) 式。再用 (3.32) 式得

$$\begin{aligned} \delta T_2 + \delta T_1 + \delta T_0 &= \delta T \\ &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

但根据定义 (3.33) 式， $T_2$  为  $\dot{q}_i$  的二阶齐次式， $T_1$  为  $\dot{q}_i$  的一阶齐次式。利用齐次函数的性质知

$$\begin{aligned} 2T_2 &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i, \\ T_1 &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \end{aligned}$$

又因  $T_0$  不包含  $\dot{q}_i$ ，故可得

$$\begin{aligned}
 2T_2 + T_1 &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial(T_2 + T_1)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

从(3.41)或(3.42)式可得三组变量  $q_i, \dot{q}_i, p_i$  之间的关系,并由它们也可求出三组虚位移  $\delta q_i, \delta \dot{q}_i, \delta p_i$  之间的关系.表明在这三组变量  $q_i, \dot{q}_i, p_i$  中,可以取任意两组作为独立变量;同样也可在三组虚位移  $\delta q_i, \delta \dot{q}_i, \delta p_i$  中,任取两组作为独立的虚位移.故从(3.44)式中可得

$$2\delta T_2 + \delta T_1 = \sum_{i=1}^k (\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i),$$

与(3.43)式相减可得

$$\delta T^* = \sum_{i=1}^k \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \tag{3.45}$$

其中

$$T^* = T_2 - T_0. \tag{3.46}$$

由(3.46)式定义的  $T^*$  为  $q_i, \dot{q}_i, t$  的函数,也可以利用(3.42)式变换为  $q_i, p_i, t$  的函数,仍记为

$$\bar{T}^* = \bar{T}_2 - T_0 = \bar{T}^*(q, p, t).$$

由此又可得关系:

$$\delta T^* = \delta \bar{T}^* = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial p_i} \delta p_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{3.47}$$

(3.45), (3.47)式都是用  $\delta p_i, \delta q_i$  表示的  $\delta T^*$ , 应该恒等.即对应的系数应相等,故得

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial p_i}, \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial q_i} = -\frac{\partial(\bar{T}_2 - T_0)}{\partial q_i}. \tag{3.49}$$

定义函数:

$$H = H(q, p, t) = \bar{T}^* - U = \bar{T}_2 - T_0 - U. \quad (3.50)$$

则因  $U$  只依赖于  $q_i, t$ , 不含  $p_i$ , 故 (3.48) 成为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i}. \quad (3.51)$$

而从  $p_i$  的定义 (3.51) 式可得

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

再用拉格朗日方程 (3.39) 式得

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

根据关系 (3.49), (3.50) 可化为

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}. \quad (3.52)$$

(3.51), (3.52) 式就是用广义坐标  $q$  和广义动量  $p$  表示的正则方程组。由于  $i = 1, 2, \dots, k$ , 故为  $2k = 6n$  阶的常微分方程组, 与运动方程 (3.25) 式和拉格朗日方程 (3.39) 式等价, 其中函数  $H = H(q, p, t)$  叫做哈密顿函数, (3.51), (3.52) 式又叫做哈密顿正则方程。容易看出, (3.29) 式就是用直角坐标和动量表示的哈密顿正则方程组。为 (3.51), (3.52) 式的特例。

如果变换 (3.30) 式不显含时间  $t$ , 即

$$\xi_i = \xi_i(q), \quad \eta_i = \eta_i(q), \quad \zeta_i = \zeta_i(q),$$

则  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  就是  $\dot{q}_i$  的线性齐次函数, 相应的

$$T = T_2, \quad U = U(q),$$

$$H = \bar{T} - U = H(q, p),$$

也不显含时间  $t$ 。因此

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right).$$



用 (3.51), (3.52) 式的  $\dot{p}_i, \dot{q}_i$  式子代入, 上式为 0, 故

$$H = \bar{T} - U = \text{常数}$$

是一个积分, 它显然就是能量积分. 故保守的哈密顿正则方程组存在有能量积分.

运动方程表为广义坐标的哈密顿正则方程组的形式后, 可以利用分析动力学中有关的知识来讨论.

#### § 4 哈密顿正则方程的原则解法, 雅哥比定理

上节得到了  $N$  体问题的哈密顿正则方程组:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.53)$$

如已完全解出, 就应得到变量  $q, p$  表示为时间  $t$  和  $2k$  个相互独立的积分常数  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2k$ ) 的函数, 记为

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_i(c_1, c_2, \dots, c_{2k}, t) = q_i(c, t), \\ p_i &= p_i(c_1, c_2, \dots, c_{2k}, t) = p_i(c, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

把它们代入哈密顿函数  $H$ , 则  $H$  也表为  $c, t$  的函数, 即

$$H(c, t) \equiv H(q, p, t).$$

由此可得

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial c_j}$$

用 (3.53) 式代入得

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = -\sum_{i=1}^k \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \sum_{i=1}^k \dot{q}_i \frac{\partial p_i}{\partial c_j}$$

因  $c_j$  为常数, 故对  $c_j$  取偏导数同对  $t$  取导数的次序可以交换. 因此上式可整理为

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i. \quad (3.55)$$

从(3.44)式可得

$$\sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i = 2T_2 + T_1, \quad (3.56)$$

而

$$H = T_2 - T_0 - U, \quad T = T_2 + T_1 + T_0.$$

故(3.55)式成为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} &= \frac{\partial}{\partial c_j} (2T_2 + T_1) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial c_j} (T_2 - T_0 - U) = \frac{\partial}{\partial c_j} (T + U). \end{aligned}$$

定义函数  $S = S(c, t)$  为

$$\frac{dS}{dt} = T + U. \quad (3.57)$$

则上式表为

$$\frac{\partial}{\partial c_j} \left( \frac{dS}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j}. \quad (3.58)$$

由于  $S, p, q$  都可表为  $c, t$  的函数, 故当  $c_j$  有微小增量  $\delta c_j$  时(与时间  $t$  无关),  $S, p, q$  应有相应的增量  $\delta S, \delta p, \delta q$ . 可用微分运算来求出, 而且这种微分运算同对  $t$  求微商的运算可以交换次序. 因此, 在(3.58)式两端同乘以  $\delta c_j$ , 再对  $j$  从 1 到  $2k$  求和得

$$\sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial}{\partial c_j} \left( \frac{dS}{dt} \right) \delta c_j = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial q_i}{\partial c_j} \delta c_j,$$

即

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial S}{\partial c_j} \delta c_j = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial q_i}{\partial c_j} \delta c_j,$$

但因

$$S = S(c, t), \quad q_i = q_i(c, t),$$

则有

$$\delta S = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial S}{\partial c_i} \delta c_i, \quad \delta q_i = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\partial q_i}{\partial c_j} \delta c_j.$$

代入上式可得

$$\frac{d}{dt}(\delta S) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \delta q_i.$$

可以积分得

$$\delta S = \sum_{i=1}^k p_i \delta q_i + C. \quad (3.59)$$

其中  $C$  为积分常数。也就是说,  $\delta S$  可表为  $\delta q_i$  的线性函数。

现在把  $2k$  个常数  $c_j$  分为两半, 令

$$\alpha_j = c_j, \quad \gamma_j = c_{k+j} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

于是 (3.54) 式可写为

$$q_i = q_i(c, t) = q_i(\alpha, \gamma, t). \quad (3.60)$$

(3.60) 式可以看作  $\gamma_j$  的  $k$  个关系式, 假定可以解出, 则形式上可以表为

$$\gamma_j = \gamma_j(q, \alpha, t). \quad (3.61)$$

从关系 (3.60) 式可得

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \delta \alpha_j + \sum_{j=1}^k \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_j} \delta \gamma_j. \quad (3.62)$$

(3.62) 式共  $k$  个关系式, 表明  $\delta \gamma_j$  可以解出成为  $\delta q_i$  和  $\delta \alpha_j$  的线性组合。因此, 从 (3.61), (3.62) 式可知: 原来的  $2k$  个增量  $\delta c_j$ , 可以用  $\delta q_i, \delta \alpha_j$  来代替;  $S$  原为  $c, t$  即  $\alpha, \gamma, t$  的函数, 可用 (3.61) 式变换为  $q, \alpha, t$  的函数, 即  $S = S(q, \alpha, t)$ 。由此可得

$$\delta S = \sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i. \quad (3.63)$$

(3.63) 式与 (3.59) 式应该恒等。但 (3.59) 式中的积分常数  $C$  可以取为任意形式，为了同 (3.63) 式一致，取为

$$C = \sum_{i=1}^k \beta_i \delta \alpha_i. \quad (3.64)$$

其中  $\beta_i$  也是常数，代入 (3.59) 式后同 (3.63) 式比较  $\delta q_i, \delta \alpha_i$  的系数可得

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad (3.65)$$

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}. \quad (3.66)$$

从 (3.65) 式可以看出：只要用任何方法找出了辅助函数  $S = S(q, \alpha, t)$ ，则由 (3.66) 式可解出  $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ ，为时间  $t$  及  $2k$  个相互独立积分常数  $\alpha_i, \beta_i$  的函数；再代入 (3.65) 式，可得到  $p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$ 。于是 (3.65), (3.66) 式就组成了哈密顿正则方程组 (3.53) 式的形式解。其中两组常数  $\alpha_i, \beta_i$  叫做正则常数， $\alpha_i, \beta_i$  相互为正则共轭， $q_i$  同  $p_i$  也相互为正则共轭变量。

但是怎样才能求出  $S = S(q, \alpha, t)$  呢？由 (3.57) 式的定义知

$$\frac{dS}{dt} = T + U.$$

但根据 (3.65) 式知

$$\begin{aligned} T + U &= \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i. \end{aligned}$$

又用 (3.56) 式代入得

$$\frac{\partial S}{\partial t} + T_2 - T_0 - U = 0,$$

即

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0.$$

但  $S = S(q, \alpha, t)$ , 故  $H$  中的  $p$  应换为  $q, \alpha, t$  的函数, 以 (3.65) 式代入即得

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0. \quad (3.67)$$

由于  $H$  是  $p_i$  的二次多项式, 故 (3.67) 式为  $S$  的一阶二次偏微分方程.  $S$  就是这个方程的解. (3.67) 式又叫做哈密顿-雅哥比方程.

只要广义坐标  $q$  同直角坐标的关系确定, 即变换  $\xi_i = \xi_i(q, t), \dots$  是已知函数, 则  $T, U$  的函数形式就确定了, 因而  $H$  也是已知函数. 于是 (3.67) 式就确定了.

从上面已可以看出, 只要从 (3.67) 式解出  $S = S(q, \alpha, t)$ , 代入 (3.65), (3.66) 式就可得到 (3.53) 式的解. 但 (3.67) 式为  $S$  的偏微分方程, 它的解非常广泛. 必须明确什么样的解才能符合要求, 否则还无法讨论. 下面的雅哥比定理就是解决这个问题.

雅哥比定理: 不管用什么方法得到 (3.67) 式的任何一个完全解  $S(q, \alpha, t)$ , 即  $S$  包含  $k$  个  $q$  和  $k$  个相互独立的积分常数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  以及时间  $t$ , 并对它们存在一, 二阶连续偏导数, 则用 (3.65), (3.66) 确定的  $k$  个  $p$  和  $k$  个  $q$  (都表为  $\alpha, \beta, t$  的函数), 就是哈密顿正则方程组 (3.53) 式的解.

证: (3.66) 式对  $t$  求微商可得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} \dot{q}_i = 0,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = 0.$$

以 (3.65) 式代入得

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} \dot{q}_i = 0. \quad (3.68)$$

另外, 把 (3.67) 式对  $\alpha_i$  求偏导数, 由于  $H$  中只有  $p = \partial S / \partial q$  包含  $\alpha$ , 故得

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} = 0.$$

与 (3.68) 式相减得

$$\sum_{i=1}^k \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} = 0. \quad (3.69)$$

(3.69) 式为  $k$  个量

$$x_i = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

的  $k$  个线性齐次方程组. 若完全写出则为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} x_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} x_2 + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_1} x_k &= 0, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} x_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_2} x_k &= 0, \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k} x_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k} x_2 + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_k} x_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

由于  $p_1, p_2, \cdots, p_k$  为相互独立的函数, 故  $p$  对  $\alpha$  的雅哥比行列式:

$$\frac{\partial (p_1, p_2, \cdots, p_k)}{\partial (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)} \neq 0.$$

但 (3.70) 式作为  $x_1, x_2, \cdots, x_k$  的齐次线性方程组, 它的系数行列式就是上述雅哥比行列式, 它不等于 0, 就只有所有的  $x_j = 0$ , 即

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (3.71)$$

另外, (3.65) 式对  $t$  求微商得

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \\ &= \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j}\end{aligned}\quad (3.72)$$

在 (3.67) 式中, 仍用  $p$  代表  $\partial S / \partial q$ , 其中隐含  $q$ , 则对  $q_i$  求偏导数可得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0.$$

以 (3.65) 式的  $p_i$  代入得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} = 0.$$

同 (3.72) 式比较即得(偏导数运算可交换次序)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (3.73)$$

(3.71), (3.73) 即为原来的哈密顿正则方程组 (3.53) 式. 这说明 (3.67) 的任何一个完全解  $S = S(q, \alpha, t)$ , 通过 (3.65), (3.66) 式确定的  $p, q$  (表为  $t$  和  $2k$  个相互独立的积分常数  $\alpha, \beta$  的函数) 为 (3.53) 式的解. 故定理得证. 这样就给出了哈密顿正则方程组的一种原则解法. 这种解法叫做哈密顿-雅哥比方法.

当哈密顿函数  $H$  有下列情况时可以使上述方法简化:

1. 若  $H$  不显含  $t$ , 即  $H = H(q, p)$ , 此时

$$H = \text{常数} = \alpha_1$$

为一个积分, 则 (3.67) 式成为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \alpha_1 = 0,\quad (3.74)$$

因此,  $S$  可写为

$$S = -\alpha_1 t + S_1,$$

其中  $S_1$  不再显含  $t$ .

2. 若  $H$  不显含某一广义坐标  $q_i$ , 此时  $q_i$  又叫做循环坐标, 则

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \text{ 即 } \dot{p}_i = 0.$$

故  $p_i$  为常数, 设为  $\alpha_j$  ( $j \neq 1$ ), 于是有

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \alpha_j \quad (j \neq 1).$$

则  $S$  可表为

$$S = \alpha_j q_i + S_2,$$

其中  $S_2$  不再包含  $q_i$ .

3. 若  $H$  不显含  $t$ , 又不含某一个  $q_i$ , 则显然有

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_j q_i + S' \quad (j \neq 1),$$

其中  $S'$  不含  $t$  和  $q_i$ .

## § 5 摄动运动的基本方程

上两节讨论了用广义坐标表示的  $N$  体问题的运动方程, 并转换成正则方程组的形式, 现在再把摄动运动方程转化为广义坐标的正则方程组的形式, 先把哈密顿函数  $H$  分为两部分, 即

$$H = H_0 + H_1. \quad (3.75)$$

其中  $H_0$  表示二体问题部分,  $H_1$  表示摄动部分, 下面就用上节讲述的哈密顿-雅哥比方法先解哈密顿函数为  $H_0$  的正则方程组:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}. \quad (3.76)$$

解出后得到正则常数  $\alpha_i, \beta_i$ , 再用微分方程中的“常数变易法”



求出以  $\alpha_i, \beta_i$  为基本变量, 以  $H_1$  为哈密顿函数的正则方程组.

用上节方法解 (3.76) 式, 需要从方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_0\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (3.77)$$

求出一个完全解  $S(q, \alpha, t)$ ; (3.76) 式的解就由

$$\beta_r = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_r}, \quad p_r = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_r} \quad (3.78)$$

给出, 形式为

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \quad (3.79)$$

具体的解法将在下节中讲述. 这里先认为它们已经解出, 由此推出  $\alpha, \beta$  的正则方程组.

考虑摄动部分  $H_1$  后,  $\alpha, \beta$  应为变量; 故用 (3.79) 式代入 (3.76) 式时,  $\dot{q}_i, \dot{p}_i$  应改为偏导数, 即

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}. \quad (3.80)$$

但原来的方程为

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial(H_0 - H_1)}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial(H_0 - H_1)}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

根据常数变易法原理, 认为 (3.79) 式也是 (3.81) 式的解, 只是原正则常数看作变量, 并通过 (3.79) 式的变换, 把 (3.81) 式中的  $q_i, p_i$  变为  $\alpha_i, \beta_i$ , 就可得到以  $\alpha_i, \beta_i$  为基本变量的方程. 以 (3.79) 代入 (3.81) 式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) &= \frac{\partial(H_0 - H_1)}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) &= -\frac{\partial(H_0 - H_1)}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

用(3.80)式代入得

$$\sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = - \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \quad (3.82)$$

$$\sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right) = \frac{\partial H_1}{\partial q_i}. \quad (3.83)$$

$H_1$  原为  $q_i, p_i$  的函数, 利用(3.79)式也可以化为  $\alpha, \beta$  的函数, 可得

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial H_1}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} \right).$$

以(3.82), (3.83)式代入, 按  $\dot{\alpha}_r, \dot{\beta}_r$  整理后得

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} = \sum_{r=1}^k \{ \dot{\alpha}_r [\alpha_i, \alpha_r] + \dot{\beta}_r [\alpha_i, \beta_r] \}. \quad (3.84)$$

其中括号定义为

$$\begin{aligned} [\alpha_i, \alpha_r] &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial (q_i, p_i)}{\partial (\alpha_i, \alpha_r)}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

又叫做拉格朗日括号. 右端是  $q_i, p_i$  对  $\alpha_j, \alpha_r$  的雅哥比行列式. 显然有关系:

$$[\alpha_i, \alpha_r] = -[\alpha_r, \alpha_i]. \quad (3.86)$$

同理可得

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} = \sum_{r=1}^k \{ \dot{\alpha}_r [\beta_i, \alpha_r] + \dot{\beta}_r [\beta_i, \beta_r] \}. \quad (3.87)$$

现在来讨论拉格朗日括号:  $[\alpha_i, \alpha_r], [\alpha_i, \beta_r], [\beta_i, \alpha_r], [\beta_i, \beta_r]$ .

利用关系  $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ , 可把  $S = S(q, \alpha, t)$  变换为  $\alpha, \beta, t$  的函数, 记为

$$S(q, \alpha, t) = S'(\alpha, \beta, t),$$

则

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} + \sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}.$$

再用(3.78)式可得

$$\frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} = \beta_j + \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}. \quad (3.88)$$

同理:

$$\frac{\partial S'}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j}. \quad (3.89)$$

则

$$\begin{aligned} [\alpha_j, \alpha_r] &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_r} - \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_r}. \end{aligned}$$

以(3.88)式代入得

$$[\alpha_j, \alpha_r] = \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[ \frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} - \beta_j \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[ \frac{\partial S'}{\partial \alpha_r} - \beta_r \right].$$

由于 $\alpha, \beta$ 是相互独立的量,故 $\partial \beta_j / \partial \alpha_r = \partial \beta_r / \partial \alpha_j = 0$ ,而 $S'$ 对 $\alpha_r, \alpha_j$ 的偏导数可以交换次序,则上式成为

$$[\alpha_j, \alpha_r] = \frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_r \partial \alpha_j} - \frac{\partial^2 S'}{\partial \alpha_j \partial \alpha_r} = 0.$$

同理:

$$\begin{aligned} [\beta_j, \beta_r] &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} - \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_j} - \frac{\partial}{\partial \beta_j} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}. \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left( \frac{\partial S'}{\partial \beta_i} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left( \frac{\partial S'}{\partial \beta_r} \right) = 0.$$

用(3.79)式代入,再由

$$\begin{aligned} [\alpha_j, \beta_r] &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p_i}{\partial \beta_r} - \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial \beta_r}. \end{aligned}$$

用(3.78), (3.79)式代入得

$$\begin{aligned} [\alpha_j, \beta_r] &= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left( \frac{\partial S'}{\partial \alpha_j} - \beta_j \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{\partial S'}{\partial \beta_r} \right) = - \frac{\partial \beta_j}{\partial \beta_r}. \end{aligned}$$

由于 $\alpha, \beta$ 之间也是相互独立的,因此可得

$$[\alpha_j, \beta_r] = 0, \quad \text{若 } r \neq j;$$

$$[\alpha_j, \beta_j] = -1, \quad \text{或 } [\beta_j, \alpha_j] = 1,$$

把上面得的拉格朗日括弧值代入(3.84), (3.87)式得

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j}, \quad \dot{\beta}_j = - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}. \quad (3.90)$$

这就是以 $\alpha, \beta$ 为基本变量的微分方程,仍为正则方程组的形式,哈密顿函数为 $H_1$ . 如从(3.90)式解出 $\alpha, \beta$ 为时间 $t$ 的函数后,代入(3.79)式,所得的 $q, p$ 即为(3.81)式的解.

在§2中给出了用直角坐标表示的摄动运动方程,即

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (3.91)$$

$y, z$ 的式子相同,其中 $R$ 为摄动函数,除包含 $x, y, z$ 外,还有摄动行星质量(为常数)和坐标(是时间 $t$ 的函数),即 $R = R(x, y, z, t)$ . 此时, $T, U$ 的表达式为

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = T_2,$$

$$U = \frac{m\mu}{r} + mR.$$

可直接取坐标  $(x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)$ , 动量  $(m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) = (p_1, p_2, p_3)$ , 则 (3.91) 式仍可表为正则方程组:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.92)$$

其中

$$H = T - U = T - \frac{m\mu}{r} - mR.$$

由于被摄动行星的质量  $m$  在方程中可以消去, 为简单起见, 可记为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = \frac{\mu}{r} + R,$$

$$(p_1, p_2, p_3) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

则 (3.92) 式不变, 其中

$$H = T - U = T - \frac{\mu}{r} - R = H_0 - R,$$

而

$$H_0 = T - \frac{\mu}{r}.$$

当  $R = 0$  时,  $H = H_0$ , (3.92) 式就是二体问题的方程, 可以解出  $q, p$  为时间  $t$  和正则共轭常数  $\alpha_r, \beta_r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) 的函数:

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t).$$

具体的解法将在下节讲述. 于是用前面刚讲过的方法, 由于  $H_1 = R$ , 可直接从 (3.90) 式得到  $\alpha_r, \beta_r$  的摄动方程:

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial R}{\partial \beta_r}, \quad \dot{\beta}_r = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_r}. \quad (3.93)$$

这个方程组是推导各种形式的摄动运动方程的基础, 故可叫

### 做摄动运动的基本方程.

这样的过程可以继续下去. 若  $R = R_0 - R_1$ , 而当  $R_1 = 0$  时, (3.93) 式可以解出  $\alpha, \beta$ , 为时间  $t$  和另外六个正则共轭常数  $a_i, b_i$  的函数, 则可将 (3.93) 式变换为  $a_i, b_i$  的正则方程组, 哈密顿函数为  $R_1$ .

## § 6 椭圆轨道的正则共轭常数

现在就用哈密顿-雅哥比方法来解无摄动运动(二体问题)的方程, 求出椭圆轨道的正则共轭常数, 作为摄动运动方程的基本变量. 由于在第一章中已解出了二体问题的运动方程, 积分常数已用天体的轨道根数来表达. 这里就可以把椭圆轨道的正则共轭常数同轨道根数联系起来.

取日心黄道球坐标  $(r, \lambda, \theta)$  为广义坐标  $(q_1, q_2, q_3)$ ; 其中  $r$  为半径;  $\lambda$  为黄经, 由春分点起算, 与  $x$  轴方向相同;  $\theta$  为黄纬, 从黄道向北为正. 则天体的日心黄道直角坐标  $(x, y, z)$  同  $(r, \lambda, \theta)$  的关系为

$$x = r \cos \lambda \cos \theta, \quad y = r \sin \lambda \cos \theta, \quad z = r \sin \theta. \quad (3.94)$$

此时动能  $T$  略去质量因子  $m$  后可变为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\lambda}^2 r^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 q_1^2 \cos^2 q_3 + q_1^2 \dot{q}_3^2) = T_2, \end{aligned} \quad (3.95)$$

即  $T_1 = T_0 = 0$ , 相应的广义动量  $p_i$  为

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \dot{\lambda} r^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} . \quad \left. \vphantom{p_3} \right\}$$

故用  $p, q$  表示的动能  $T$  为

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2 \cos^2 \theta} + \frac{p_3^2}{r^2} \right). \quad (3.97)$$

而无摄动运动的  $U = \mu/r$ , (略去因子  $m$ ), 则哈密顿函数  $H_0$  为

$$\begin{aligned} H_0 &= \bar{T}_2 - T_0 - U \\ &= \frac{1}{2} \left( p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2 \cos^2 \theta} + \frac{p_3^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{r} = \frac{\partial H_0}{\partial p_1}, & \dot{q}_2 &= \dot{\lambda} = \frac{\partial H_0}{\partial p_2}, \\ \dot{q}_3 &= \dot{\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial p_3}, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H_0}{\partial r}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H_0}{\partial \lambda}, & \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H_0}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3.99)$$

相应的哈密顿-雅哥比方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = 0. \end{aligned} \quad (3.100)$$

现在就来解出 (3.100) 式. 由于 (3.98) 式中的  $H_0$  不显含时间  $t$  和坐标  $\lambda$ , 故根据 §4 末的讨论知,  $S$  可表为下面形式:

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S'. \quad (3.101)$$

根据雅哥比定理可知, 只要求得到 (3.100) 式的一个所谓“完全”解, 即要求满足 (3.100) 式的  $S$  包含时间  $t$  和三个坐标  $r, \lambda, \theta$  以及三个相互独立的积分常数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . 而 (3.101) 式的  $S$  已包含了时间  $t$ , 坐标  $\lambda$  以及两个积分常数  $\alpha_1, \alpha_3$ , 故只

要  $S'$  包含另两个坐标和另一个独立的积分常数  $\alpha_2$  就行了. 因此, (3.101) 式中的  $S'$  可记为  $S'(r, \theta)$ , 把这种形式的 (3.101) 式代入 (3.100) 式后, (3.100) 式就可整理成为分离变量的形式:

$$2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - r^2 \left( \frac{\partial S'}{\partial r} \right)^2 = \left( \frac{\partial S'}{\partial \theta} \right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \theta, \quad (3.102)$$

于是  $S'$  也可写为分离变量的形式, 即可令

$$S'(r, \theta) = S_1(r) + S_2(\theta). \quad (3.103)$$

由于 (3.102) 式右端显然为正, 故用 (3.103) 式代入后, 可令两端等于同一常数  $\alpha_2^2$ . 由此解出的  $S'$  已能符合上述要求. 因此可得两个关系式:

$$2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - r^2 \left( \frac{dS_1}{dr} \right)^2 = \alpha_2^2, \quad (3.104)$$

$$\left( \frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \alpha_3^2 \sec^2 \theta = \alpha_2^2. \quad (3.105)$$

其中由于  $S_1$  只包含  $r$ ,  $S_2$  只包含  $\theta$ , 故偏微商符号可改为常微商符号. 从 (3.104), (3.105) 解出  $S_1, S_2$  后, 相应的  $S$  为

$$S = -\alpha_1 t + \alpha_3 \lambda + S_1 + S_2, \quad (3.106)$$

就是 (3.100) 式的一个完全解, 可以符合要求了.

由 (3.104) (3.105) 式可得

$$S_1 = \int_{r_1}^r \sqrt{2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2} \frac{dr}{r}, \quad (3.107)$$

$$S_2 = \int_0^\theta \sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \theta} d\theta. \quad (3.108)$$

因为积分常数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  都已引入了, 故上面的积分限可以任意取, 使得结果更简单. 其中 (3.108) 式积分下限已取为 0, 但 (3.107) 式中  $r_1$  不能取为 0; 因一般椭圆运动中,  $r \neq 0$ . 这里我们取  $r_1$  为方程

$$y \equiv 2\alpha_1 r^2 + 2\mu r - \alpha_2^2 = 0 \quad (3.109)$$



的两个正实根  $r_1, r_2$  中的较小的那个。由根与系数的关系可得

$$r_1 + r_2 = -\mu/\alpha_1, \quad r_1 r_2 = -\alpha_2^2/2\alpha_1. \quad (3.110)$$

而  $r_1, r_2$  为向径  $r$  的值, 不可能为负, 故必须有  $\alpha_1 < 0$ . 另外, (3.109) 式定义的  $y$  在 (3.107) 式中要开平方, 故必须  $y > 0$ . 因此  $y$  可写为

$$\sqrt{y} = (-2\alpha_1)^{1/2} \sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)}. \quad (3.111)$$

这表明  $r$  只在范围  $r_1 \leq r \leq r_2$  内变化, 也就是说,  $r_1, r_2$  为向径的极小值和极大值. 但用椭圆轨道根数半长径  $a$  和偏心率  $e$  来表示可得

$$r_1 = a(1 - e), \quad r_2 = a(1 + e).$$

代入 (3.110) 即得

$$\alpha_1 = -\mu/2a, \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (3.112)$$

这就给出了正则常数  $\alpha_1, \alpha_2$  同椭圆轨道根数  $a, e$  之间的关系.

下面来具体讨论 (3.99) 式的解, 根据哈密顿-雅哥比方法的原理, 天体坐标  $(r, \lambda, \theta)$  的解应包含在下面方程:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = \beta_3.$$

用 (3.106) 代入, 并用 (3.107), (3.108) 的结果, 这三个式子可化为下面形式:

$$-t + \frac{\partial S_1(r)}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad (3.113)$$

$$\lambda + \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial S_1(r)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2(\theta)}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad (3.115)$$

下面就具体求出这三个式子. 以 (3.107) 式代入 (3.113) 式, 注意  $r_1$  也是  $\alpha_1$  的函数, 则得

$$t + \beta_1 = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{y}} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{\sqrt{y}}{r} \right]_{r=r_1}$$

但  $r_1$  为  $y = 0$  的根, 故上式最后一项为 0, 即

$$t + \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)}}$$

由于已知是椭圆轨道, 则有关系:

$$\begin{aligned} r_1 &= a(1 - e), & r_2 &= a(1 + e), \\ r &= a(1 - e \cos E). \end{aligned}$$

代入上式得

$$t + \beta_1 = \frac{a}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int_0^E (1 - e \cos E) dE.$$

积分后得

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{-2\alpha_1}}{a} (t + \beta_1) = n(t + \beta_1).$$

根据 (3.112) 式的  $\alpha_1$ , 容易看出上式的  $n$  就是平均角速度. 故上式就是开普勒方程, 因此有

$$\beta_1 = -\tau = M_0/n. \quad (3.116)$$

这是  $\beta_1$  同椭圆轨道根数  $\tau$  或  $M_0$  之间的关系.

以 (3.108) 式代入 (3.114) 式得

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \lambda - \alpha_3 \int_0^\theta \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \theta}} \\ &= \lambda - \int_0^\theta \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_3^2} - \operatorname{tg}^2 \theta}} \end{aligned}$$

因根号内的量不能为负, 必须有  $|\alpha_2| > |\alpha_3|$ . 故定义一个辅助量  $\phi$  为

$$\alpha_2^2 - \alpha_3^2 = \alpha_3^2 \operatorname{tg}^2 \phi. \quad (3.117)$$

代入上式得

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \lambda - \int_0^\theta \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \phi - \operatorname{tg}^2 \theta}} \\
&= \lambda - \int_0^\theta \frac{d\left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \phi}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \phi}\right)^2}} \\
&= \lambda - \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \phi}\right),
\end{aligned}$$

或

$$\sin(\lambda - \beta_3) = \operatorname{tg} \theta / \operatorname{tg} \phi. \quad (3.118)$$

因  $|\sin(\lambda - \beta_3)| \leq 1$ , 故  $|\operatorname{tg} \theta| \leq |\operatorname{tg} \phi|$ . 因  $\theta$  为黄纬, 永远有  $|\theta| \leq \pi/2$ . 故当  $\phi$  在第一象限时, 有  $|\theta| \leq \phi$ , 即  $\phi$  为  $|\theta|$  的极大值, 它就是天体轨道面对黄道面的倾角  $i$ , 即  $\phi = i$ . 则 (3.117) 式成为

$$\alpha_2^2 = \alpha_3^2 \sec^2 i,$$

或

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cos i = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i. \quad (3.119)$$

若  $\phi$  在第二象限, 有同样的结果.

又从 (3.118) 式知, 当  $\theta = 0$  时, 即天体在黄道上, 此时  $\sin(\lambda - \beta_3) = 0$ , 即  $\lambda - \beta_3 = 0$  或  $\pi$ , 也就是天体在升交点或降交点; 相应的  $\lambda = Q$  (升交点黄经) 或  $Q + \pi$ . 故可以定义

$$\beta_3 = Q. \quad (3.120)$$

于是得到了  $\alpha_3, \beta_3$  同椭圆轨道根数之间的关系.

最后, 以 (3.107), (3.108) 式代入 (3.115) 式可得

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial S_2}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \theta}} \\
&\quad - \alpha_2 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{y}} - \frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\sqrt{y}}{r} \right)_{r=r_1}. \quad (3.121)
\end{aligned}$$

其中最后一项显然为 0；右端两个积分记为  $I_1, I_2$ ，分别进行讨论。

$$I_1 = \alpha_2 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 \sec^2 \theta}} = \alpha_2 \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta}}$$

用 (3.119) 式的关系  $\alpha_3 = \alpha_2 \cos i$  代入得

$$I_1 = \int_0^\theta \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta}} = \arcsin \left( \frac{\sin \theta}{\sin i} \right),$$

即

$$\sin \theta = \sin I_1 \sin i.$$

这里的  $\theta$  是黄纬；根据公式 (1.91) 和 (1.101) 的第三式可知（那里用  $b$  表示黄纬）

$$\sin b = \sin \theta = \sin (f + \omega) \sin i.$$

因此可得

$$I_1 = f + \omega. \quad (3.122)$$

另外

$$I_2 = \alpha_2 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{y}} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)}},$$

以  $\alpha_1 = -\mu/2a$ ,  $\alpha_2 = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$ ,  $r_1 = a(1 - e)$ ,  $r_2 = a(1 + e)$ ,  $r = a(1 - e \cos E)$  代入后得

$$I_2 = \sqrt{1 - e^2} \int_0^E \frac{dE}{1 - e \cos E}.$$

再根据偏近点角  $E$  同真近点角  $f$  之间的关系 (1.81) 知

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E},$$

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

则对  $E$  求微商可得

$$\cos f \frac{df}{dE} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\cos E - e}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \cos f}{1 - e \cos E}.$$

因此有关系

$$dE = \frac{1 - e \cos E}{\sqrt{1 - e^2}} df.$$

代入  $I_2$  的式子中得

$$I_2 = \int_0^f df = f. \quad (3.123)$$

故以 (3.122), (3.123) 式代入 (3.121) 可知

$$\beta_2 = I_1 - I_2 = (f + \omega) - f = \omega. \quad (3.124)$$

到此为止,所有的正则常数  $\alpha_i, \beta_i$  都已求出,它们同轨道根数的关系归纳为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & \beta_1 &= -\tau = \frac{M_0}{n}, \\ \alpha_2 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, & \beta_2 &= \omega, \\ \alpha_3 &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i, & \beta_3 &= Q. \end{aligned} \right\} \quad (3.125)$$

反过来也可解出轨道根数为正则常数  $\alpha, \beta$  的函数,即

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{\mu}{2\alpha_1}, & \tau &= -\frac{M_0}{n} = -\beta_1, \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, & \omega &= \beta_2, \\ i &= \arccos \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, & Q &= \beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.126)$$

得到椭圆轨道的正则常数后,就可以用它们建立摄动运动方程.

## §7 轨道根数为基本变量的摄动运动方程,瞬时椭圆

根据上节求出的椭圆轨道正则常数  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

§ 5所讲的摄动运动的基本方程

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.127)$$

就是以  $\alpha_i, \beta_i$  为基本变量的摄动运动方程。其中  $R$  为摄动函数，应表示成  $\alpha_i, \beta_i$  和时间  $t$  的函数。如不只一个摄动行星， $R$  的项数相应增加，只是所有的摄动行星坐标都要化成时间  $t$  的函数。

在天体力学中，由于轨道根数的概念比较明确，常用它们作为基本变量，进而讨论天体的摄动运动。现在就把它们推导出来。

为记号简单起见，用  $a_1, a_2, \dots, a_6$  表示六个轨道根数，即

$$\left. \begin{aligned} a_1 = a &= -\frac{\mu}{2\alpha_1}, & a_2 = e &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \\ a_3 = i &= \arccos \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \\ a_4 = M_0 &= n\beta_1 = \left(\frac{-2\alpha_1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \beta_1, \\ a_5 = \omega &= \beta_2, & a_6 = \Omega &= \beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.128)$$

(3.128) 式就是轨道根数同正则共轭常数之间的变换，可简记为  $a_m = a_m(\alpha, \beta)$ ，不显含  $t$ 。现在就用 (3.128) 式把摄动运动方程 (3.127) 式变换为轨道根数作基本变量的方程组。从函数关系  $a_m = a_m(\alpha, \beta)$  得

$$\dot{a}_m = \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_r} \dot{\alpha}_r + \frac{\partial a_m}{\partial \beta_r} \dot{\beta}_r \right),$$

以 (3.127) 式代入得

$$\dot{a}_m = \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_r} \frac{\partial R}{\partial \beta_r} - \frac{\partial a_m}{\partial \beta_r} \frac{\partial R}{\partial \alpha_r} \right).$$

但摄动函数  $R$  也可通过 (3.128) 式变为  $R = R(a_1, a_2, \dots, a_6, t)$

$= R(\alpha, \beta, t)$ . 故得

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_r} = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial a_s} \frac{\partial a_s}{\partial \alpha_r}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta_r} = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial a_s} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_r}.$$

代入上式可整理为

$$\dot{a}_m = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial a_s} \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_r} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_r} - \frac{\partial a_m}{\partial \beta_r} \frac{\partial a_s}{\partial \alpha_r} \right). \quad (3.129)$$

定义符号:

$$\{a_m, a_s\} = \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial a_m}{\partial \alpha_r} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_r} - \frac{\partial a_m}{\partial \beta_r} \frac{\partial a_s}{\partial \alpha_r} \right). \quad (3.130)$$

这个符号叫做  $a_m, a_s$  对  $\alpha, \beta$  的柏松括号: (Poisson bracket), 从 (3.130) 可直接看出下面简单关系:

$$\{a_m, a_m\} = 0, \quad \{a_m, a_s\} = -\{a_s, a_m\}. \quad (3.131)$$

用 (3.130) 式代入 (3.129) 式后得

$$\dot{a}_m = \sum_{s=1}^6 \{a_m, a_s\} \frac{\partial R}{\partial a_s}. \quad (3.132)$$

因此, 只要算出所有的柏松括号:  $\{a_m, a_s\}$ , (3.132) 式就是所要得到的结果.

从 (3.128) 式知,  $a_1 = a$ , 只包含  $\alpha_1$ , 则由 (3.130) 式知

$$\{a_1, a_s\} = \{a, a_s\} = \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_1}.$$

但又从 (3.128) 式知, 只有  $a_4 = M_0$  中含有  $\beta_1$ , 因此只有

$$\{a, a_4\} = \{a, M_0\} = \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} \frac{\partial M_0}{\partial \beta_1} = \frac{n\mu}{2\alpha_1^2} = \frac{2}{na^2},$$

其余的

$$\{a, a_s\} = 0.$$

由 (3.128) 式知  $e$  只包含  $\alpha_1, \alpha_2$ , 则

$$\{e, a_s\} = \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_1} + \frac{\partial e}{\partial \alpha_2} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_2}.$$

但 (3.128) 式表明, 只有  $a_1 = M_0$  中包含  $\beta_1$ ,  $a_5 = \omega$  中有  $\beta_2$ . 因此可得

$$\{e, M_0\} = \frac{\partial e}{\partial \alpha_1} \frac{\partial M_0}{\partial \beta_1} = \frac{\alpha_2^2 / \mu^2}{e} n = \frac{1 - e^2}{na^2 e},$$

$$\{e, \omega\} = \frac{\partial e}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 / \mu^2}{e} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e},$$

其余的

$$\{e, a_s\} = 0.$$

再由  $a_3 = i$ , 只包含  $\alpha_2, \alpha_3$ , 则

$$\{i, a_s\} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_2} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_2} + \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} \frac{\partial a_s}{\partial \beta_3}.$$

但只有  $a_5 = \omega$  包含  $\beta_2$ ,  $a_6 = Q$  包含  $\beta_3$ , 则得

$$\{i, \omega\} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_2} = \frac{\text{ctg } i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}},$$

$$\{i, Q\} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} \frac{\partial Q}{\partial \beta_3} = \frac{\partial i}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i},$$

其余的

$$\{i, a_s\} = 0.$$

利用关系  $\{a_m, a_s\} = -\{a_s, a_m\}$ , 可得相应的括号值. 归纳如下:

$$\left. \begin{aligned} \{a, M_0\} &= \frac{2}{na}, \quad \text{其余的 } \{a, a_s\} = 0, \\ \{e, M_0\} &= \frac{1 - e^2}{na^2 e}, \quad \{e, \omega\} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e}, \\ &\quad \{e, a_s\} = 0, \\ \{i, \omega\} &= \frac{\text{ctg } i}{na^2 \sqrt{1 - e^2}}, \\ \{i, Q\} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i}, \\ &\quad \{i, a_s\} = 0, \end{aligned} \right\} (3.133)$$



$$\begin{aligned}
 \{M_0, a\} &= -\{a, M_0\}, \\
 \{M_0, e\} &= -\{e, M_0\}, \\
 \{M_0, a_i\} &= 0, \\
 \{\omega, e\} &= -\{e, \omega\}, \\
 \{\omega, i\} &= -\{i, \omega\}, \\
 \{\omega, a_i\} &= 0, \\
 \{Q, i\} &= -\{i, Q\}, \\
 \{Q, a_i\} &= 0.
 \end{aligned}$$

代入(3.132)式得

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\
 \dot{e} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
 &\quad - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial Q}, \\
 \dot{M}_0 &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\
 &\quad - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \dot{Q} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}.
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

(3.134)式就是用椭圆轨道根数为基本变量的摄动运动方程，首先由拉格朗日研究行星运动时推出的，故在天体力学中常叫做拉格朗日行星运动方程。

轨道根数有不同的取法,但可以从(3.134)进行推导.例如有时采用  $\varepsilon_0, \bar{\omega}$  代替  $M_0, \omega$ , 定义为

$$\varepsilon_0 = M_0 + \omega + Q,$$

$$\bar{\omega} = \omega + Q.$$

用  $\bar{R}$  表示  $\bar{R}(a, e, i, \varepsilon_0, \bar{\omega}, Q, t)$ , 则得

$$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{M}_0 + \dot{\omega} + \dot{Q},$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} + \dot{Q},$$

$$\frac{\partial R}{\partial M_0} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0}, \quad \frac{\partial R}{\partial \omega} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{\omega}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial Q} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial Q} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{\omega}}.$$

代入(3.134)式即得用  $a, e, i, \varepsilon_0, \bar{\omega}, Q$  为基本变量的摄动运动方程(仍用  $R$  表示  $\bar{R}$ , 但理解为这一组根数的函数):

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}, \\ \dot{e} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \\ &\quad + \frac{(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial Q} \\ &\quad - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right), \\ \dot{\varepsilon}_0 &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ &\quad + \frac{(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned} \right\} \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\omega} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}.\end{aligned}$$

从上式可看出，有些项的分母中含有  $e$  作为因子，其中有的可以直接去掉，如

$$\begin{aligned}& \frac{(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \\ &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \\ &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{1 - (1-e^2)}{1 + \sqrt{1-e^2}} = -\frac{e\sqrt{1-e^2}}{na^2 (1 + \sqrt{1-e^2})};\end{aligned}$$

有的不能直接去掉，当  $e \rightarrow 0$  时，这些项成为无穷大，这是摄动运动方程中的奇点。太阳系中很多天体的偏心率都很小，用上面方程讨论摄动时就出现困难，但是这种困难是直接由偏心率作变量造成的，可以作适当变换就能解决。定义新变量  $h, k$  为

$$h = e \sin \tilde{\omega}, \quad k = e \cos \tilde{\omega}, \quad (3.136)$$

即

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{h^2 + k^2}, \quad \sin \tilde{\omega} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \\ \cos \tilde{\omega} &= \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}.\end{aligned} \quad (3.137)$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{\partial R}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial h} \sin \tilde{\omega} + \frac{\partial R}{\partial k} \cos \tilde{\omega} \\ &= \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{\partial R}{\partial h} + \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{\partial R}{\partial k},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} = \frac{\partial R}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \tilde{\omega}} = k \frac{\partial R}{\partial h} - h \frac{\partial R}{\partial k},$$

$$h = e \sin \tilde{\omega} + e \cos \tilde{\omega} \tilde{\omega} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} e + k \tilde{\omega},$$

$$\dot{k} = e \cos \tilde{\omega} - e \sin \tilde{\omega} \tilde{\omega} = \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} e - h \tilde{\omega}.$$

用上面各式可把 (3.135) 式中  $e, \tilde{\omega}$  的方程变换为

$$\left. \begin{aligned} \dot{h} &= \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial k} - \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \\ &\quad \times \frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial \epsilon_0} \\ &\quad + \frac{k \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \dot{k} &= -\frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} \\ &\quad - \frac{\sqrt{1-h^2-k^2}}{na^2} \\ &\quad \times \frac{k}{1+\sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial \epsilon_0} \\ &\quad - \frac{h \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-k^2}} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned} \right\} (3.138)$$

这里的分母就不会因  $e \rightarrow 0$  而变成无穷大。(3.135) 式中其余各式可作相应的改变, 这里不再推导了。如用 (3.134) 式讨论摄动, 则  $e, \tilde{\omega}$  式子中有同样问题, 可以取  $h = e \sin \omega$ ,  $k = e \cos \omega$  来消除这个困难。

同样, 当  $i \rightarrow 0$  时, (3.134) 式或 (3.135) 式中  $\dot{Q}, di/dt$

有  $\sin i$  作分母的项也要变成无穷大。而在太阳系中， $i$  很小的情况也很多。可用同样的办法来解决，定义

$$p = \sin i \sin \Omega, \quad q = \sin i \cos \Omega, \quad (3.139)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \sin i \cos \Omega \dot{\Omega} + \cos i \sin \Omega \frac{di}{dt} \\ &= q \dot{\Omega} + \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} p \frac{di}{dt}, \\ \dot{q} &= -\sin i \sin \Omega \dot{\Omega} + \cos i \cos \Omega \frac{di}{dt} \\ &= -p \dot{\Omega} + \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} q \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial i} \\ &= \frac{\partial R}{\partial p} \cos i \sin \Omega + \frac{\partial R}{\partial q} \cos i \cos \Omega \\ &= \frac{p \sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{q \sqrt{1-p^2-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{\partial R}{\partial q}, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Omega} = q \frac{\partial R}{\partial p} - p \frac{\partial R}{\partial q}. \end{aligned}$$

因此 (3.135) 式中  $\dot{\Omega}$  和  $di/dt$  两式可以变换为

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} \\ &= \frac{p \sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2 \sqrt{1-e^2} (1 + \sqrt{1-p^2-q^2})} \\ &\quad \times \left( \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{e}_0} \right), \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{q} = & - \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} \\
 & - \frac{q\sqrt{1-p^2-q^2}}{na^2\sqrt{1-e^2}(1+\sqrt{1-p^2-q^2})} \\
 & \times \left( \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_0} \right)
 \end{aligned} \right\} (3.140)$$

(3.135) 式中其它几式可相应变换,把含  $i, Q$  的项换为  $p, q$ .

以上是针对小偏心率和小倾角情况所作的变换,这说明由于小偏心率和小倾角所造成的困难是变量的选择造成的,不是本质的困难.在太阳系行星、小行星、人造卫星的轨道中要经常碰到,故应用很广.

到此为止,可以把天体的摄动轨道的概念具体化.根据 §5 和本节所讲的原理,当  $R = 0$  时,为无摄动运动;天体的运动方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}$$

就是二体问题的运动方程,其中  $q_i = (x, y, z)$ ,  $p_i = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z})$ . 解出后可得

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \quad (3.141)$$

对于椭圆轨道情况,具体结果就是公式(1.95)和(1.99),只是其中的轨道根数要用(3.126)式化为正则常数  $\alpha, \beta$ . 在  $R \approx 0$  时,上式关系仍然成立,只是其中的  $\alpha, \beta$  (或相应的轨道根数)是变量,为时间  $t$  的函数.因此,对任何时刻  $t$ ,用此时刻的  $\alpha, \beta$  (即轨道根数)值代入(3.141)式,即得此时的天体坐标和速度  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ .

由此可知,在无摄动运动时,天体是沿着某一个固定的椭圆轨道运动.存在摄动时(即  $R \approx 0$ ),天体可看作沿着一个不断变化的椭圆轨道运动.当然,天体的实际轨道是非常

复杂的曲线，但任一时刻  $t$ ，天体是在此时的  $\alpha, \beta$  值所确定的椭圆轨道上。这个椭圆叫做在时刻  $t$  时的瞬时椭圆。也就是

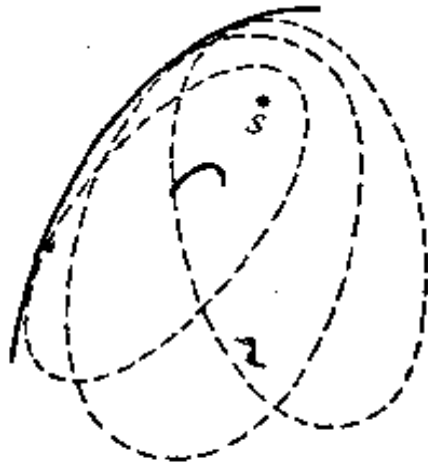


图 15

是说，在任一时刻  $t$ ，根据此时的瞬时椭圆轨道算出的天体坐标和速度  $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ，与天体此时在实际轨道上的坐标和速度一样。这表明任何时刻  $t$ ，天体在此时的瞬时椭圆同实际轨道相切，切点就是天体在此时刻的位置。因此，天体的实际轨道就是由瞬时椭圆所组成的

曲线族的包络线（见图 15）。

## § 8 用摄动力三分量表示的摄动运动方程

上节所得的结果，是用摄动函数  $R$  来表示摄动运动方程，它的偏导数

$$\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial z}$$

乘上被摄动行星的质量  $m$  后，就是由摄动行星吸引产生的摄动力的分量。对于存在摄动函数的摄动力而言，这样讨论是很方便的，但对于不存在摄动函数的摄动力（例如大气阻力），就不能用了，必须得到直接用摄动力的分量表示的摄动运动方程，才能广泛应用。

仍然考虑行星运动，设  $O$  为太阳，图 16 表示日心天球。大圆  $XNY$  为黄道， $OX$  指向春分点； $N$  为被摄动行星轨道对黄道的升交点；大圆  $NHA$  为被摄动行星轨道面在天球上的投影。其中  $OA$  为某时刻  $t$  时的行星向径  $r$  的方向， $OH$  为

近日点方向,  $C$  为行星轨道面的北极 (靠近北黄极  $Z$  的那个极)。

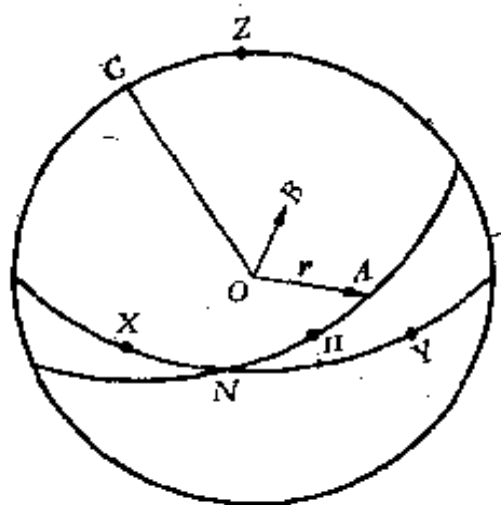


图 16

现在将摄动力产生的加速度分解为相互垂直的三个分量  $S, T, W$ .  $S$  为沿着向径  $r$  的方向, 即  $OA$  方向;  $T$  为垂直于向径, 在轨道面上指向行星运动正方向, 即  $OB$  方向 (真近点角为  $f + 90^\circ$ , 其中  $f$  即为行星在  $t$  时的真近点角);  $W$  为指向轨道北极, 即  $OC$  方向. 令  $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$  表示  $OA, OB, OC$  在日心黄道直角坐标系  $O-XYZ$  中的方向余弦, 并令

$$u = f + \omega, \quad (3.142)$$

则由第一章公式 (1.89), (1.90) 可得

$$x = rl_1, \quad y = rm_1, \quad z = rn_1. \quad (3.143)$$

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos Q \cos u - \sin Q \sin u \cos i, \\ m_1 &= \sin Q \cos u + \cos Q \sin u \cos i, \\ n_1 &= \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (3.144)$$

由于  $OB$  在轨道面上与  $OA$  垂直, 而且在  $OA$  的真近点角  $f$  加  $90^\circ$  的方向, 故只要在 (3.144) 式中, 把  $u \rightarrow u + 90^\circ$ , 即得  $(l_2, m_2, n_2)$ , 因此



$$\left. \begin{aligned} l_1 &= -\cos Q \sin u - \sin Q \cos u \cos i, \\ m_2 &= -\sin Q \sin u + \cos Q \cos u \cos i, \\ n_2 &= \cos u \sin i. \end{aligned} \right\} (3.145)$$

又因  $OC$  为向量  $OA \times OB$  的方向, 故由 (3.144), (3.145) 式可得

$$\left. \begin{aligned} l_3 &= m_1 n_2 - m_2 n_1 = \sin Q \sin i, \\ m_3 &= n_1 l_2 - n_2 l_1 = -\cos Q \sin i, \\ n_3 &= l_1 m_2 - l_2 m_1 = \cos i. \end{aligned} \right\} (3.146)$$

因  $(l_i, m_i, n_i)$  为方向余弦, 又互相垂直, 故得

$$\left. \begin{aligned} l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1, & (i = 1, 2, 3) \\ l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j &= 0, & (i, j = 1, 2, 3; i \neq j) \end{aligned} \right\} (3.147)$$

反过来,  $OX, OY, OZ$  相对于直角坐标系  $O-ABC$  的方向余弦为

$$(l_1, l_2, l_3), \quad (m_1, m_2, m_3), \quad (n_1, n_2, n_3).$$

而且也有关系:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 l_i^2 &= \sum_{i=1}^3 m_i^2 = \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1, \\ \sum_{i=1}^3 l_i m_i &= \sum_{i=1}^3 m_i n_i = \sum_{i=1}^3 n_i l_i = 0, \\ n_1 &= l_2 m_3 - l_3 m_2, \\ n_2 &= l_3 m_1 - l_1 m_3, \\ n_3 &= l_1 m_2 - l_2 m_1. \end{aligned} \right\} (3.148)$$

由此可得摄动力产生的加速度分量  $S, T, W$  同

$$\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial z}$$

的关系为

$$S = \left. l_1 \frac{\partial R}{\partial x} + m_1 \frac{\partial R}{\partial y} + n_1 \frac{\partial R}{\partial z} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= l_2 \frac{\partial R}{\partial x} + m_1 \frac{\partial R}{\partial y} + n_2 \frac{\partial R}{\partial z}, \\ W &= l_3 \frac{\partial R}{\partial x} + m_3 \frac{\partial R}{\partial y} + n_3 \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.149)$$

以及反过来的关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= l_1 S + l_2 T + l_3 W, \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= m_1 S + m_2 T + m_3 W, \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= n_1 S + n_2 T + n_3 W. \end{aligned} \right\} \quad (3.150)$$

从它们可求出  $R$  对轨道根数的偏导数同  $S, T, W$  之间的关系. 设  $\sigma$  为任何一个轨道根数, 则

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \quad (3.151)$$

而由 (3.143) 式得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \sigma} &= r \frac{\partial l_1}{\partial \sigma} + l_1 \frac{\partial r}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} &= r \frac{\partial m_1}{\partial \sigma} + m_1 \frac{\partial r}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial z}{\partial \sigma} &= r \frac{\partial n_1}{\partial \sigma} + n_1 \frac{\partial r}{\partial \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.152)$$

但利用 (3.144), (3.145), (3.146) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_1}{\partial \sigma} &= \frac{\partial l_1}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial l_1}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial \sigma} + \frac{\partial l_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \\ &= -m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + l_1 \sin u \frac{\partial i}{\partial \sigma} + l_2 \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial m_1}{\partial \sigma} = l_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + m_3 \sin u \frac{\partial i}{\partial \sigma} + m_2 \frac{\partial u}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \sigma} = n_3 \sin u \frac{\partial i}{\partial \sigma} + n_2 \frac{\partial u}{\partial \sigma}.$$

代入 (3.152) 式后再代入 (3.151) 式, 并利用关系 (3.147), (3.148) 式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \sigma} = & S \frac{\partial r}{\partial \sigma} + rT \left( n_3 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \\ & + rW \left( -n_2 \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \sin u \frac{\partial i}{\partial \sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.153)$$

因此, 只要求出  $\partial r/\partial \sigma$ ,  $\partial u/\partial \sigma$  后, (3.153) 式就给出所有的  $\partial R/\partial \sigma$ . 但有一个问题要先弄清楚.

由于  $R = R(x, y, z, t)$ , 利用公式 (1.95), 可以化为轨道根数和近点角的函数. 故在求  $\partial R/\partial a$  时, 应包含两个部份: 一部份是对显含  $a$  的项求出的偏导数; 另一部份是隐含在近点角中的项, 因平近点角  $M = nt + M_0$ , 其中  $n$  为  $a$  的函数. 因此,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} = & \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial a} = \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + t \frac{\partial R}{\partial M} \frac{\partial n}{\partial a} \\ = & \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + t \frac{\partial R}{\partial M_0} \frac{\partial n}{\partial a}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

其中有括号的项表示只对显含  $a$  的项求出的偏导数, 不管近点角中隐含的  $a$ . 在摄动运动方程 (3.134) 中有关的式子为

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \quad \dot{M}_0 = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}.$$

用 (3.154) 式代入得

$$\begin{aligned} \dot{M}_0 = & -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} \left( t \frac{\partial n}{\partial a} \right) - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ = & -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \dot{a} t \frac{\partial n}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned}$$

定义

$$\dot{M}'_0 = \dot{M}_0 + \dot{a}t \left( \frac{\partial n}{\partial a} \right) = -\frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (3.155)$$

则从  $a$  同  $n$  的关系  $n^2 a^3 = \mu$  可知

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial a} \dot{a}.$$

因此得

$$\dot{M}'_0 = \dot{M}_0 + t \frac{dn}{dt} = \dot{M}_0 + \frac{d}{dt} (nt) - n,$$

即

$$\dot{M}_0 + \frac{d}{dt} (nt) = \dot{M}'_0 + n.$$

可积分得平近角  $M$  为

$$M = M_0 + nt = M'_0 + \int n dt. \quad (3.156)$$

这就是说, 如果用  $M'_0$  代替  $M_0$ , 则  $\dot{M}'_0$  的 (3.155) 式中,  $R$  对  $a$  求偏导数时就只考虑显含  $a$  的项. 只是一定要用 (3.156) 式右端部份计算平近点角  $M$ . 从 (3.156) 式可知

$$\frac{\partial R}{\partial M_0} = \frac{\partial R}{\partial M'_0}$$

因此,  $\dot{a}$  的式子可写为

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M'_0}$$

形式不变. 以后除特别声明外, 所用的  $M_0$  都是  $M'_0$ , 相应的  $\varepsilon_0$  也是  $\varepsilon'_0 = M'_0 + \omega + \Omega$ . 只是摄动运动方程中的  $\partial R / \partial a$  都只考虑显含  $a$  的项, 即不管近点角中隐含的  $a$ .

现在就来求出  $\partial r / \partial \sigma$ ,  $\partial u / \partial \sigma$ . 由

$$r = a(1 - e \cos E)$$

得

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \cos E \frac{\partial e}{\partial \sigma} + a e \sin E \frac{\partial E}{\partial \sigma}. \quad (3.157)$$

这里就利用关系 (3.156) 可得

$$E - e \sin E = M = M'_0 + \int n dt.$$

由于不考虑近点角中隐含的  $a$ , 上式对  $\sigma$  求偏导数时, 含积分号的项可以略去(它除  $a$  外不依赖于其它轨道根数), 于是可得

$$\frac{r}{a} \frac{\partial E}{\partial \sigma} - \sin E \frac{\partial e}{\partial \sigma} = \frac{\partial M'_0}{\partial \sigma}.$$

前面方才说过, 仍用  $M_0$  表示  $M'_0$ . 因此得

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = \frac{a}{r} \left( \frac{\partial M_0}{\partial \sigma} + \sin E \frac{\partial e}{\partial \sigma} \right). \quad (3.158)$$

代入 (3.157) 式后可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \sigma} &= \frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \left( \cos E - \frac{ae \sin^2 E}{r} \right) \frac{\partial e}{\partial \sigma} \\ &+ \frac{a^2 e \sin E}{r} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma} = \frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \cos f \frac{\partial e}{\partial \sigma} \\ &+ \frac{a^2 e \sin E}{r} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

另外, 由  $u = \omega + f$  知

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \quad (3.160)$$

利用关系

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

取自然对数得

$$\ln \operatorname{tg} \frac{f}{2} = \frac{1}{2} [\ln(1+e) - \ln(1-e)] + \ln \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

对  $\sigma$  取偏导数可得

$$\frac{1}{\sin f} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{1-e^2} \frac{\partial e}{\partial \sigma} + \frac{1}{\sin E} \frac{\partial E}{\partial \sigma}.$$

用 (3.158) 式代入可得

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \frac{\partial e}{\partial \sigma} + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma}.$$

代入 (3.160) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = & \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \frac{\partial e}{\partial \sigma} \\ & + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

于是用 (3.159), (3.161) 式代入 (3.153) 式即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \sigma} = & \left[ \frac{r}{a} \frac{\partial a}{\partial \sigma} - a \cos f \frac{\partial e}{\partial \sigma} + \frac{a^2 e \sin E}{r} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma} \right] S \\ & + \left[ \cos i \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f \frac{\partial e}{\partial \sigma} \right. \\ & + \left. \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial M_0}{\partial \sigma} \right] r T + \left[ -\cos u \sin i \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right. \\ & + \left. \sin u \frac{\partial i}{\partial \sigma} \right] r W. \end{aligned} \quad (3.162)$$

于是取  $\sigma$  为各轨道根数即得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{r}{a} S, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= -a \cos f S + r \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) \sin f T, \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= r \sin u W, \\ \frac{\partial R}{\partial Q} &= r \cos i T - r \cos u \sin i W, \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= r T, \\ \frac{\partial R}{\partial M_0} &= \frac{a^2 e \sin E}{r} S + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r} T. \end{aligned} \right\} \quad (3.163)$$

代入摄动运动方程(3.134)则得

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ e \sin f S + \frac{p}{r} T \right], \\
 \dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [ \sin f S + (\cos f + \cos E) T ], \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\
 \dot{Q} &= \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\
 \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -\cos f S \right. \\
 &\quad \left. + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin f T \right] \\
 &\quad - \frac{r \operatorname{ctg} i \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\
 \dot{M}_0 &= \left( \frac{1-e^2}{nae} \cos f - \frac{2r}{na^2} \right) S \\
 &\quad - \frac{1-e^2}{na} (\cos f + \cos E) T.
 \end{aligned} \tag{3.164}$$

这就是用摄动力的三分量  $S, T, W$  表示的摄动运动方程。如果用  $\tilde{\omega}, \tilde{e}_0$  作轨道根数, 则可由关系

$$\tilde{\omega} = \dot{\omega} + \dot{Q}, \quad \tilde{e}_0 = \dot{e} + \dot{Q} + \dot{M}_0, \tag{3.165}$$

用(3.164)式的  $\dot{\omega}, \dot{Q}, \dot{M}_0$  代入即得  $\tilde{\omega}, \tilde{e}_0$  的方程。

上面的推导过程仍然用了摄动函数, 故(3.164)式还不能说明可以用到不存在摄动函数的无势力情况。实际上, (3.164)式可以不用摄动函数直接求出。设  $\mathbf{F}$  为摄动力产生的加速度, 摄动运动方程可写为

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{F}. \quad \text{即} \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}.$$

由二体问题的活力公式可得

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

对  $t$  求微商得

$$2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mu \left( -\frac{2\dot{r}}{r^2} + \frac{\dot{a}}{a^2} \right) = -\frac{2\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \dot{a}}{a^2}.$$

用上面的  $\dot{\mathbf{r}}$  代入得

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}.$$

$\mathbf{F}$  的三个分量为  $S, T, W$ , 速度  $\dot{\mathbf{r}}$  在这三个方向上的分量为  $\dot{r}, r\dot{f}, 0$ , 故上式成为

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\mu} (\dot{r}S + r\dot{f}T).$$

由二体问题的关系式:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad r^2 \dot{f} = h = \sqrt{\mu p},$$

可得

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin f, \quad r\dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r}.$$

再用关系  $\mu = n^2 a^3$ , 一并代入上式得

$$\dot{a} = \frac{2}{n \sqrt{1 - e^2}} \left( e \sin f S + \frac{p}{r} T \right),$$

与(3.164)式中  $\dot{a}$  式子相同。其它轨道根数的式子都可以推出, 这里不再讲了。

有时用摄动加速度在轨道面上沿切线和法线的方向进行分解。用  $U, N$  表示这两个分量。  $U$  是指向切线正方向(即天体运动方向),  $N$  指向主法线方向(向轨道内部为正)。设  $\theta$  为向径正方向同切线正方向之间的交角, 则有关系

$$U = S \cos \theta + T \sin \theta, \quad N = -S \sin \theta + T \cos \theta, \quad (3.166)$$



或

$$S = U \cos \theta - N \sin \theta, \quad T = U \sin \theta + N \cos \theta, \quad (3.167)$$

从微分几何学的结果可知

$$\operatorname{tg} \theta = r \frac{df}{dr}.$$

用椭圆轨道关系式

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f},$$

代入得

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1 + e \cos f}{e \sin f}.$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}, \\ \sin \theta &= \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}. \end{aligned} \right\} (3.168)$$

代入(3.167)式可得

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} U \\ &\quad - \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} N, \\ T &= \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} U \\ &\quad + \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}} N. \end{aligned} \right\} (3.169)$$

用(3.169)代入(3.164)式, 即可得以  $U, N, W$  表示的摄动运动方程.

现在举一个例子. 若天体只受到介质阻力的摄动力. 因

介质阻力是指向切线相反方向(即天体运动速度的反方向). 故把这摄动力的加速度分解为  $U, N, W$  时,  $N = W = 0$ , 只存在  $U$ , 而且  $U < 0$ . 此时摄动运动方程很简单,  $\dot{Q}$  和  $di/dt$  都是 0. 表明这种摄动力对  $i, Q$  没有影响. 下面只写出  $\dot{a}$  的式子, 用 (3.169) 式中的  $S, T$  (令  $N = 0$ ) 代入 (3.164) 式中第一式, 即得

$$\dot{a} = \frac{2\sqrt{1+2e\cos f+e^2}}{n\sqrt{1-e^2}} U. \quad (3.170)$$

由于  $U < 0$ , 而  $U$  的系数为正, 故  $\dot{a} < 0$ . 这表明在介质阻力摄动力的作用下, 天体的轨道半长径在不断减小. 人造地球卫星在大气阻力作用下正是这种情况.

## §9 正则变换

在天体力学的摄动理论中, 常用正则方程组的形式. 但有时要采用新变量, 需要把原来的正则共轭变量进行变换, 希望变换后的新变量仍然为正则共轭变量. 这样的变换就叫做正则变换. 在这里不打算讲正则变换的完整理论和它的充要条件. 只讲述天体力学中常用到的一种充分条件所定出的特殊正则变换. 这种变换在很多地方叫做接触变换. 下面用定理的形式来讲述.

定理1. 设  $q_i, p_i (i = 1, 2, \dots, k)$  为时间  $t$  和  $2k$  个任意相互独立的常数  $c_j (j = 1, 2, 3, \dots, 2k)$  的函数, 定义  $2k$  个函数

$$X_i = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_i} - \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{i=1}^k p_i q_i, \quad (3.171)$$

若存在一函数  $H = H(q, p, t) = H(c, t)$ , 使得

$$-\frac{\partial H}{\partial c_j} = X_j, \quad (3.172)$$

则变量  $q_i, p_i$  为正则方程组

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.173)$$

的解。

证：若存在  $H = H(q, p, t) = H(c, t)$ ，则

$$\frac{\partial H}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial c_j} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial c_j} \right), \quad (3.174)$$

又由 (3.171), (3.172), 式得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial c_j} = X_j &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} - \frac{\partial}{\partial c_j} \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i \\ &= -\sum_{i=1}^k \left( \dot{q}_i \frac{\partial p_i}{\partial c_j} - \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} \right). \end{aligned} \quad (3.175)$$

与 (3.174) 式相加, 按  $\partial q_i / \partial c_j, \partial p_i / \partial c_j$  整理可得

$$\sum_{i=1}^k \left( x_i \frac{\partial p_i}{\partial c_j} + y_i \frac{\partial q_i}{\partial c_j} \right) = 0, \quad (3.176)$$

其中

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i, \quad y_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i.$$

(3.176) 式可看做  $x_i, y_i$  的  $2k$  个线性齐次方程组, 它的系数行列式就是雅哥比行列式:

$$\frac{\partial(q_1, q_2, \dots, q_k, p_1, p_2, \dots, p_k)}{\partial(c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots, c_{2k})}$$

由于  $q, p$  为  $c$  的相互独立的函数, 故上面雅哥比行列式不等于 0. 因此, (3.176) 式只能有零解, 即

$$x_i = y_i = 0,$$

故由 (3.176) 式可得

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

这表明  $q_i, p_i$  为 (3.172) 式的解, 故定理得证.

定理1表明 (3.172) 式是  $q_i, p_i$  为正则共轭变量的充分条件. 其实 (3.172) 式也是必要条件. 若  $q_i, p_i$  为正则方程组 (3.173) 式的解, 则以 (3.173) 式代入 (3.175) 式后即得 (3.172) 式, 因此, (3.172) 式实际上是  $q_i, p_i$  为正则共轭变量的充要条件.

现在来提出正则变换的一个充分条件. 若  $q_i, p_i$  为正则共轭变量, 哈密顿函数为  $H$ , 即满足 (3.173) 式. 通过变换

$$q_i = q_i(Q, P, t), \quad p_i = p_i(Q, P, t) \quad (3.177)$$

变为另一组新变量  $Q_i, P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). 并认为 (3.177) 式存在逆变换:

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t). \quad (3.178)$$

(3.173) 式解出后,  $q_i, p_i$  可表为时间  $t$  和  $2k$  个相互独立的常数  $c_j$  的函数, 即

$$q_i = q_i(c, t), \quad p_i = p_i(c, t).$$

利用 (3.178) 式,  $Q_i, P_i$  也可以表为  $t$  和  $c_j$  的函数:

$$Q_i = Q_i(c, t), \quad P_i = P_i(c, t).$$

利用关系 (3.177) 或 (3.178) 式, 四组变量  $q, p, Q, P$  中, 可认为任意两组是独立的自变量, 另外两组为它们的函数. 例如 (3.177) 式是认为  $Q, P$  为自变量; (3.178) 式是认为  $q, p$  是自变量. 也可以认为  $q, Q$  为自变量, 即从 (3.177) 式或 (3.178) 式形式地解出:

$$p_i = p_i(q, Q, t), \quad P_i = P_i(q, Q, t).$$

根据这个观点, 下面就来建立 (3.177) 式为正则变换的充分条件.

定理 2. 若存在一个  $q, Q, t$  的函数  $F = F(q, Q, t)$ , 满

足条件:

$$\delta F = \sum_{i=1}^k p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^k P_i \delta Q_i. \quad (3.179)$$

其中  $\delta F$ ,  $\delta q_i$ ,  $\delta Q_i$  为与时间  $t$  无关的微小增量, 则(3.177) 式为正则变换, 新变量  $Q, P$  是正则共轭变量, 它们的哈密顿函数  $H'$  为

$$H' = H + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} = H'(Q, P, t). \quad (3.180)$$

证: 由于  $F = F(q, Q, t)$ , 则

$$\delta F = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \delta Q_i \right).$$

同(3.180)式比较, 可得

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.181)$$

反过来也可以从(3.181)式推出(3.179)式, 故条件(3.179)式可以用(3.181)式代替.

由定理 1 可知, 要证明  $Q_i, P_i$  为正则共轭变量, 哈密顿函数为  $H'$ , 只要证明函数

$$Y_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k P_i \frac{\partial Q_i}{\partial c_i} - \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{i=1}^k P_i Q_i \quad (3.182)$$

可表为  $-H'$  对  $c_i$  的偏导数就行了.

因  $q_i, p_i$  为正则共轭变量, 故(3.171), (3.172)式成立, 同(3.182)式相减得

$$\begin{aligned} X_i - Y_i &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k \left( p_i \frac{\partial q_i}{\partial c_i} - P_i \frac{\partial Q_i}{\partial c_i} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_{i=1}^k (p_i q_i - P_i Q_i). \end{aligned}$$

以 (3.181) 式代入得

$$X_i - Y_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial c_i} + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial c_i} \right) - \frac{\partial}{\partial c_i} \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right).$$

但

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial c_i} + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial c_i} \right),$$

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

代入上式可得

$$X_i - Y_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial c_i} \right) - \frac{\partial}{\partial c_i} \left( \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial c_i} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right).$$

但

$$X_i = - \frac{\partial H}{\partial c_i},$$

因此

$$Y_i = - \frac{\partial H}{\partial c_i} - \frac{\partial}{\partial c_i} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) = - \frac{\partial H'}{\partial c_i}, \quad (3.183)$$

其中

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H'(Q, P, t),$$

于是定理得证。

(3.179) 式或 (3.181) 式给出了正则变换的一个充分条件, 这个条件还可以用其它形式来表示。实际上,  $\delta q_i, \delta Q_i$  可看做与时间无关的微分, 条件 (3.179) 或 (3.181) 式表明, 微分式 (以  $q, Q$  为自变量)

$$\sum_{i=1}^k p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^k P_i \delta Q_i \quad (3.184)$$

为全微分。

如把自变量换为  $Q, P$ , 则由关系  $q = q(Q, P, t)$  可知

$$\delta q_r = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{\partial q_r}{\partial P_i} \delta P_i \right),$$

则 (3.184) 式为

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k p_r \delta q_r - \sum_{i=1}^k P_i \delta Q_i &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{r=1}^k p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} - P_i \right) \delta Q_i \\ &+ \sum_{i=1}^k \left( \sum_{r=1}^k p_r \frac{\partial q_r}{\partial P_i} \right) \delta P_i. \end{aligned} \quad (3.185)$$

显然, 若 (3.185) 式为全微分, 则 (3.184) 式也是全微分。定义函数:

$$M_i = \sum_{r=1}^k p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} - P_i, \quad (3.186)$$

$$N_i = \sum_{r=1}^k p_r \frac{\partial q_r}{\partial P_i}. \quad (3.187)$$

则 (3.185) 式可简写为

$$\sum_{i=1}^k (M_i \delta Q_i + N_i \delta P_i). \quad (3.188)$$

根据高等数学的结果可知, (3.188) 式是全微分的充要条件为: 雅哥比行列式

$$D = \frac{\partial (M_1, M_2, \dots, M_k, N_1, N_2, \dots, N_k)}{\partial (Q_1, Q_2, \dots, Q_k, P_1, P_2, \dots, P_k)}$$

是对称的, 也就是有下列关系:

$$\frac{\partial M_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial M_j}{\partial Q_i}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (3.189)$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial P_j} = \frac{\partial N_j}{\partial Q_i}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (3.190)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial P_j} = \frac{\partial N_j}{\partial P_i}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (3.191)$$

以(3.186)式代入(3.189)式得(因 $P, Q$ 相互独立)

$$\frac{\partial}{\partial Q_i} \sum_{r=1}^k p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial Q_i} \sum_{r=1}^k p_r \frac{\partial q_r}{\partial Q_i},$$

即

$$\sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} \frac{\partial p_r}{\partial Q_i} - \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} \frac{\partial p_r}{\partial Q_i} \right) = 0.$$

上式右端就是 $Q_i, Q_i$ 对 $q, p$ 的拉格朗日括号[参看(3.85)式],故上式可记为

$$[Q_i, Q_i] = 0, \quad (3.192)$$

同理,以(3.187)式代入(3.191)式可得

$$\sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial q_r}{\partial P_i} \frac{\partial P_r}{\partial P_i} - \frac{\partial q_r}{\partial P_i} \frac{\partial P_r}{\partial P_i} \right) = 0,$$

即

$$[P_i, P_i] = 0, \quad (3.193)$$

同理,以(3.186), (3.187)式代入(3.190)式后可得两种结果:

$$\text{当 } j = i \text{ 时, } [Q_i, P_i] = 1; \quad (3.194)$$

$$\text{当 } j \neq i \text{ 时, } [Q_i, P_j] = 0. \quad (3.195)$$

上面结果表明:如(3.185)式为全微分,即(3.189), (3.190), (3.191)式成立,则(3.192), (3.193), (3.194), (3.195)式也成立.反过来容易证明:如(3.192), (3.193), (3.194), (3.195)成立,则(3.189), (3.190), (3.191)式也成立.这个证明读者可以自己去做.因此(3.192), (3.193), (3.194), (3.195)式成立就是(3.185)式为全微分的充要条件.也就是说, (3.192), (3.193), (3.194), (3.195)式是 $Q_i, P_i$ 为正则共轭变量的充分条件.这样就证明了下面定理:

定理 3.若(3.192), (3.193), (3.194), (3.195)成立,则变换

$$q_i = q_i(Q, P, t), \quad p_i = p_i(Q, P, t)$$



为正则变换。

定理 3 是用拉格朗日括号表示的正则变换的充分条件，也可以用柏松括号来表示，但要找出这两种括号之间的关系。

由于变量  $q, p, Q, P$  之间存在变换关系(3.177)或(3.178)，故可以写出两种括号的式子，即

$$[Q_i, P_j] = \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial q_r}{\partial Q_i} \frac{\partial p_r}{\partial P_j} - \frac{\partial q_r}{\partial P_j} \frac{\partial p_r}{\partial Q_i} \right), \quad (3.196)$$

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_r} \frac{\partial P_j}{\partial p_r} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_r} \frac{\partial P_j}{\partial q_r} \right). \quad (3.197)$$

同样可以写出  $[Q_i, Q_j], \{Q_i, Q_j\}, [P_i, P_j], \{P_i, P_j\}$ 。下面来证明用柏松括号表示的正则变换的充分条件。

定理 4. 若关系

$$\left. \begin{aligned} \{Q_i, Q_j\} &= \{P_i, P_j\} = 0, \\ \{Q_i, P_j\} &= 1, \quad \{Q_i, P_j\} = 0, \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (3.198)$$

成立，则(3.192)，(3.193)，(3.194)，(3.195)式也成立，即(3.198)式也是  $q_i = q_i(Q, P, t), p_i = p_i(Q, P, t)$  为正则变换的充分条件。

证：为符号简单起见，用  $a_m$  表示  $Q$  和  $P$ ，

即  $a_i = Q_i, a_{i+k} = P_i, i = 1, 2, \dots, k$ 。再用符号

$$L_{mr} = [a_m, a_r], \quad P_{ms} = \{a_m, a_s\},$$

即

$$\left. \begin{aligned} L_{mr} &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial a_m} \frac{\partial p_i}{\partial a_r} - \frac{\partial q_i}{\partial a_r} \frac{\partial p_i}{\partial a_m} \right), \\ P_{ms} &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial a_m}{\partial q_i} \frac{\partial a_s}{\partial p_i} - \frac{\partial a_m}{\partial p_i} \frac{\partial a_s}{\partial q_i} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.199)$$

则

$$L_{mr} P_{ms} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial p_i}{\partial a_r} \frac{\partial a_s}{\partial p_j} \frac{\partial q_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial q_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial q_i}{\partial a_r} \frac{\partial a_s}{\partial q_j} \frac{\partial p_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial p_i} - \frac{\partial q_i}{\partial a_r} \frac{\partial a_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial q_j} \\
& - \frac{\partial p_i}{\partial a_r} \frac{\partial a_s}{\partial q_j} \frac{\partial q_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial p_i} \Big). \quad (3.200)
\end{aligned}$$

上式再对  $m = 1 \rightarrow 2k$  求和, 由于  $a_m$  就是  $Q, P$ , 于是有关系:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2k} \frac{\partial q_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial q_i} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_i} = 0, \quad \text{若 } i \neq j, \\
&= 1, \quad \text{若 } i = j;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2k} \frac{\partial p_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial p_i} &= \frac{\partial p_i}{\partial p_i} = 0, \quad \text{若 } i \neq j, \\
&= 1, \quad \text{若 } i = j;
\end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{\partial p_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_i} = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{\partial q_i}{\partial a_m} \frac{\partial a_m}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial p_i} = 0.$$

因此 (3.200) 式对  $m = 1 \rightarrow 2k$  求和后, 可以化为

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2k} L_{mr} P_{ms} &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial a_s}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial a_r} + \frac{\partial a_s}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial a_r} \right) \\
&= \frac{\partial a_s}{\partial a_r} = 0, \quad \text{若 } s \neq r, \\
&= 1, \quad \text{若 } s = r.
\end{aligned}$$

也就是

$$\sum_{m=1}^{2k} L_{mr} P_{mr} = 1, \quad (3.201)$$

$$\sum_{m=1}^{2k} L_{mr} P_{mi} = 0, \quad (r \neq i) \quad (3.202)$$

(3.201), (3.202) 式给出了拉格朗日括号和柏松括号之间的关系, 共  $4k^2$  个方程. 因此, 如果  $4k^2$  个柏松括号已知, 则

(3.201), (3.202) 式就是  $4k^2$  个拉格朗日括号的线性方程组, 可以解出它们. 反过来也是一样.

因  $a_m, a_r, a_s$  都是代表  $Q, P$ ; 若取  $a_r = P_i$ , 则(3.201)式成为

$$\sum_{m=1}^{2k} [a_m, P_i] \{a_m, P_i\} = 1,$$

即

$$\sum_{i=1}^k ([Q_i, P_i] \{Q_i, P_i\} + [P_i, P_i] \{P_i, P_i\}) = 1.$$

用(3.198)式代入可得, 只有  $i = j$  的一项不为 0, 即

$$[Q_i, P_i] = 1.$$

这就是(3.194)式. 同样(3.202)式可写为

$$\sum_{l=1}^k ([Q_l, a_r] \{Q_l, a_s\} + [P_l, a_r] \{P_l, a_s\}) = 0. \quad (3.203)$$

若取  $a_r = Q_i, a_s = P_i$ , 则上式成为

$$\sum_{l=1}^k ([Q_l, Q_i] \{Q_l, P_i\} + [P_l, Q_i] \{P_l, P_i\}) = 0.$$

用(3.198)式代入, 左端只有  $l = i$  的一项:

$$[Q_i, Q_i] \{Q_i, P_i\} = 0.$$

而  $\{Q_i, P_i\} = 1$ , 故  $[Q_i, Q_i] = 0$ , 即(3.192)式成立.

同理, 在(3.203)式中, 取  $a_r = P_i, a_s = P_i$ , 可得(3.195)式成立; 取  $a_r = P_i, a_s = Q_i$ , 可得(3.193)式成立. 于是定理得到证明.

其实, 从(3.201), (3.202)也可反过来证明: 若(3.192), (3.193), (3.194), (3.195)式成立, 则(3.198)式也成立. 证明方法完全一样.

另外, 利用(3.181)式同(3.179)式的等价性, 定理 2 可改述如下:

推理 1. 对  $q, Q, t$  的任一函数  $F_1 = F_1(q, Q, t)$  只要

$F_1$ 对所有的  $q, Q, t$  存在一、二阶连续偏导数, 则(3.181)式所确定的  $q, p$  同  $Q, P$  间的变换为正则变换, 而且新正则共轭变量  $Q, P$  的哈密顿函数为

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

证明完全相同, 不再重复. 由于四组变量  $q, p, Q, P$  中, 可认为任意两组是独立变量, 故又可推出下面结果:

推理 2. 对任一个  $q, P, t$  的函数  $F_2 = F_2(q, P, t)$  只要  $F_2$  对  $q, P, t$  存在一、二阶连续偏导数, 则关系

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.204)$$

所确定的变换为正则变换; 新哈密顿函数为

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

证: 由于  $\delta(P_i Q_i) = P_i \delta Q_i + Q_i \delta P_i$ , 则由(3.204)有

$$\begin{aligned} \delta F_2 &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \delta P_i \right) = \sum_{i=1}^k (p_i \delta q_i + Q_i \delta P_i) \\ &= \sum_{i=1}^k [p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i + \delta(P_i Q_i)]. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) \\ &= \delta F_2 - \delta \sum_{i=1}^k P_i Q_i = \delta \left( F_2 - \sum_{i=1}^k P_i Q_i \right) \end{aligned}$$

为全微分, 由定理 2 知, 新变量  $Q, P$  为正则共轭变量; 且新哈密顿函数为

$$H' = H + \frac{\partial}{\partial t} \left( F_2 - \sum_{i=1}^k P_i Q_i \right)$$

(对  $t$  取偏导数时,  $q, Q$  不变.)

$$= H + \frac{\partial}{\partial t} F_2(q, P, t) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial t} - \sum_{i=1}^k Q_i \frac{\partial P_i}{\partial t}.$$

再用 (3.204) 式可得

$$H' = H + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t},$$

故推理 2 得证.

用同样的方法可证明下面两个推理:

推理 3. 对任一个  $p, Q, t$  的函数  $F_3 = F_3(p, Q, t)$  只要  $F_3$  对  $p, Q, t$  存在一、二阶连续偏导数, 则关系

$$q_i = \frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad p_i = \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.205)$$

所确定的变换为正则变换, 新哈密顿函数为

$$H' = H - \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

推理 4. 对任一个  $p, P, t$  的函数  $F_4 = F_4(p, P, t)$ , 只要  $F_4$  对  $p, P, t$  存在一、二阶连续偏导数, 则关系

$$q_i = \frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.206)$$

所确定的变换为正则变换, 新哈密顿函数为

$$H' = H - \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

## § 10 正则变换的特例和应用

根据上节讲的有关正则变换的理论, 这里介绍一些它们在天体力学中常见的特殊情况.

1. 若经过正则变换后, 新变量  $Q_i, P_i$  的哈密顿函数  $H' = 0$ ,

即相应的正则方程组为

$$\dot{Q}_i = 0, \quad \dot{P}_i = 0,$$

即  $Q_i, P_i$  为常数, 设为

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = -\beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

此时相应的 (3.181) 式成为

$$p_i = \frac{\partial F(q, \alpha, t)}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial F(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}, \quad (3.207)$$

相应的 (3.180) 式为

$$H' = H(q, p, t) + \frac{\partial F(q, \alpha, t)}{\partial t} = 0,$$

或

$$H\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F(q, \alpha, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.208)$$

这就是哈密顿-雅哥比方程。其中  $F = F(q, \alpha, t)$  就是 § 4 中所用的辅助函数  $S$ 。因此, 利用正则变换, 很简单地推出了哈密顿-雅哥比方法。

2. 现在用正则变换来推出摄动运动的基本方程。设天体的运动方程为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (3.209)$$

其中  $H = H_0 + R$ ,  $H_0$  为无摄动运动的哈密顿函数,  $R$  为摄动函数。

当  $R = 0$  时, 由无摄动运动的哈密顿-雅哥比方程

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} + H_0\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \quad (3.210)$$

解出  $S = S(q, \alpha, t)$ 。再由

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad (3.211)$$

解出  $q, p$  为

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t). \quad (3.212)$$

在  $R \neq 0$  时,  $\alpha, \beta$  不再为常量, 是变量, 而使 (3.212) 式应满足方程组 (3.209) 式. 但 (3.212) 式可看作  $q, p$  到  $\alpha, \beta$  的变换. 下面证明它是正则变换. 如用上节的记号, 新变量记为

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = -\beta_i.$$

由于  $S = S(q, \alpha, t)$ , 故

$$\delta S = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i \right),$$

用 (3.211) 式代入得

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{i=1}^k (p_i \delta q_i + \beta_i \delta \alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^k P_i \delta Q_i. \end{aligned}$$

这表明  $\sum_{i=1}^k P_i \delta q_i - \sum_{i=1}^k P_i \delta Q_i$  为全微分  $\delta S$ , 故由上节定理 2 知,

(3.212) 式为正则变换, 而且新变量的哈密顿函数  $H'$  为

$$H' = H + \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t},$$

用 (3.210) 式代入得

$$H' = H - H_0 = -R.$$

因此新变量的正则方程组

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i},$$

还原成  $\alpha_i, \beta_i$  后为

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}. \quad (3.213)$$

这就是摄动运动的基本方程.

3. 若  $q_i, p_i$  同  $Q_i, P_i$  之间的一种变换, 除一对以外, 其余都是恒等变换; 现在来讨论它们是正则变换的条件. 设  $i = 1$  时不同, 即

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_1(Q, P, t), & p_1 &= p_1(Q, P, t), \\ q_i &= Q_i, & p_i &= P_i. \quad (i = 2, 3, \dots, k) \end{aligned} \right\} \quad (3.214)$$

因原变量  $q_i, p_i$  是相互独立的, 故  $q_1, p_1$  不可能是另外的  $q_i, p_i (i > 1)$  的函数, 也就不可能是  $Q_i, P_i (i > 1)$  的函数, 即 (3.214) 式的  $q_1, p_1$  只可能是

$$q_1 = q_1(Q_1, P_1, t), \quad p_1 = p_1(Q_1, P_1, t).$$

因此关系

$$[Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0,$$

$$[Q_i, P_j] = 0, \quad (i \neq j)$$

以及

$$[Q_i, P_i] = 1, \quad (i > 1)$$

都显然成立. 只剩下  $[Q_1, P_1]$  了. 但因只有  $q_1, p_1$  包含  $Q_1, P_1$ , 故用上节定理 3, (3.214) 式是正则变换的条件为

$$\begin{aligned} [Q_1, P_1] &= \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial q_i}{\partial Q_1} \frac{\partial p_i}{\partial P_1} - \frac{\partial q_i}{\partial P_1} \frac{\partial p_i}{\partial Q_1} \right) \\ &= \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} \frac{\partial p_1}{\partial P_1} - \frac{\partial q_1}{\partial P_1} \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} = 1. \end{aligned} \quad (3.215)$$

同理, 如果用上节定理 4, 则条件成为

$$\{Q_1, P_1\} = \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} = 1. \quad (3.216)$$

因此, 只要 (3.215) 式或 (3.216) 式成立, (3.214) 式就是正则变换.

4. 如果  $Q_r$  只是  $q_i$  的线性齐次函数,  $P_r$  只是  $p_i$  的线性齐次函数, 即

$$Q_r = \sum_{i=1}^k A_{ri} q_i, \quad P_r = \sum_{i=1}^k B_{ri} p_i. \quad (3.217)$$



其中  $A_{ri}, B_{ri}$  都是常数.

根据上节定理 2, 如果存在函数  $F$ , 使得

$$\delta F = \sum_{r=1}^k p_r \delta q_r - \sum_{r=1}^k P_r \delta Q_r,$$

则 (3.217) 式为正则变换. 显然, 如果  $F = 0$  也是可以的, 此时上式成为

$$\sum_{r=1}^k p_r \delta q_r - \sum_{r=1}^k P_r \delta Q_r = 0. \quad (3.218)$$

故只要 (3.218) 式成立, (3.217) 式就是正则变换. 将 (3.217) 式代入 (3.218) 式得

$$\sum_{r=1}^k p_r \delta q_r - \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^k A_{ri} B_{ri} p_i \delta q_i = 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^k \left[ p_i - \sum_{r=1}^k \sum_{i=1}^k A_{ri} B_{ri} p_i \right] \delta q_i = 0. \quad (3.219)$$

显然只要

$$\sum_{r=1}^k A_{ri} B_{ri} = 1, \quad \sum_{r=1}^k A_{rs} B_{ri} = 0, \quad (i \neq s) \quad (3.220)$$

成立, (3.219) 式也成立, 即 (3.220) 式就是变换 (3.217) 式为正则变换的充分条件. 此时由于  $F = 0$ , 故  $H' = H$ , 即哈密顿函数不变. 因此,  $Q_r, P_r$  的正则方程组成为

$$\dot{Q}_r = \frac{\partial H}{\partial P_r}, \quad \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial Q_r}.$$

5. 若 (3.217) 式中  $A_{ri} = B_{ri}$ , 则这种线性变换叫做正交变换. 相应的 (3.220) 式成为

$$\sum_{r=1}^k A_{ri}^2 = 1, \quad \sum_{r=1}^k A_{rs} A_{ri} = 0, \quad (i \neq s) \quad (3.221)$$

## § 11 德洛勒变量和邦加雷变量

§ 5 得到的摄动运动的基本方程为

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial R}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}, \quad (3.222)$$

$i = 1, 2, 3$ . 其中  $R$  为摄动函数,  $\alpha, \beta$  为正则常数或确切一点叫正则轨道根数. 它们同瞬时椭圆的轨道根数有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mu}{2a}, & \beta_1 &= -\tau = \frac{M_0}{n}, \\ \alpha_2 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)}, & \beta_2 &= \omega, \\ \alpha_3 &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i, & \beta_3 &= \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.223)$$

摄动函数  $R$  应表为  $\alpha_i, \beta_i$  和时间  $t$  的函数. 由于  $R$  是行星坐标的函数, 化为时间的显函数时, 要用第一章后面几节的方法, 展开为平近点角的三角级数. 如果直接用平近点角  $M$  作变量之一, 则讨论时更方便. 由于  $M = n(t - \tau)$ , 是  $\alpha_i, \beta_i$  的函数, 故考虑新变量为  $L, G, H; l, g, h$ . 它们同  $\alpha_i, \beta_i$  之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} L &= L(\alpha_1, \beta_1, t), \\ l &= M = n(t - \tau) = (-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}} \frac{t + \beta_1}{\mu}, \\ G &= \alpha_2, \quad g = \beta_2, \quad H = \alpha_3, \quad h = \beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.224)$$

其中除  $L$  外, 其余各量都已具体表为  $\alpha, \beta$  的函数. 下面就根据(3.224)式为正则变换的条件来确定函数  $L = L(\alpha_1, \beta_1, t)$ . (3.224)式正好是上节第3段所讲的情况, 故可以用(3.215)或(3.216)式的条件. 现在利用条件(3.216)式得

$$\{L, l\} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \frac{\partial l}{\partial \beta_1} - \frac{\partial L}{\partial \beta_1} \frac{\partial l}{\partial \alpha_1} = 1. \quad (3.225)$$

由于(3.225)式是充分条件,故还可以作些简化,只要满足(3.225)式就行了.因此可再假定  $L = L(\alpha_1)$ ,即不含  $\beta_1$  和  $t$ . 这样,(3.225)式就简化为

$$\frac{dL}{d\alpha_1} \frac{\partial l}{\partial \beta_1} = \frac{(-2\alpha_1)^{3/2}}{\mu} \frac{dL}{d\alpha_1} = 1,$$

即

$$dL = \mu(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} d\alpha_1,$$

积分可得

$$L = \int \mu(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} d\alpha_1 = \mu(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\mu a}. \quad (3.226)$$

如用(3.226)式定义的  $L$ , (3.224)式就是正则变换.

下面来求出新的哈密顿函数. 由(3.224)及(3.222)式可得

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \dot{\alpha}_1 + \frac{\partial L}{\partial \beta_1} \dot{\beta}_1 + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} - \frac{\partial L}{\partial \beta_1} \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}$$

同样

$$\dot{l} = \frac{\partial l}{\partial \alpha_1} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} - \frac{\partial l}{\partial \beta_1} \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial l}{\partial t}.$$

但  $R$  也应表为新变量  $L, l$  等的函数, 即有

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial R}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial R}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \alpha_1}, \\ \frac{\partial R}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial R}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \beta_1} + \frac{\partial R}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \beta_1}. \end{aligned}$$

代入上两式则得

$$\dot{L} = \{L, l\} \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial L}{\partial t},$$

$$\dot{l} = -\{L, l\} \frac{\partial R}{\partial L} + \frac{\partial l}{\partial t}.$$

其中,  $\{L, l\}$  即为 (3.225) 式所表示的柏松括号, 应等于 1. 故上式成为

$$\dot{L} = \frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \dot{l} = -\frac{\partial R}{\partial l} + \frac{\partial l}{\partial t}. \quad (3.227)$$

因此新哈密顿函数  $R'$  可表为下面形式:

$$R' = R + \phi. \quad (3.228)$$

使 (3.227) 式为正则方程:

$$\dot{L} = \frac{\partial R'}{\partial l}, \quad \dot{l} = -\frac{\partial R'}{\partial L}.$$

以 (3.228) 式代入, 并同 (3.227) 式比较可得

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial L} = -\frac{\partial l}{\partial t}. \quad (3.229)$$

因  $L$  不显含  $t$ , 故  $\partial \phi / \partial l = 0$ , 即  $\phi$  不显含  $l$ . 为了不影响其它几个变量的方程, 可以假定  $\phi$  也不包含  $g, h, G, H$  和时间  $t$ , 即  $\phi$  只包含  $L$ . 故 (3.229) 式成为

$$\frac{d\phi}{dL} = -\frac{\partial l}{\partial t} = -n = -\sqrt{\mu a}^{-\frac{3}{2}} = -\mu^2 L^{-3},$$

因此

$$d\phi = -\mu^2 L^{-3} dL,$$

积分可得

$$\phi = \frac{1}{2} \mu^2 L^{-2} = \frac{\mu^2}{2L^2}.$$

代入 (3.228) 式得

$$R' = R + \frac{\mu^2}{2L^2}, \quad (3.230)$$

故新变量为正则共轭变量, 它们同旧变量的关系为

$$\left. \begin{aligned} L &= \mu (-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\mu a}, & l &= M = n(t + \beta_1), \\ G &= \alpha_2 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, & g &= \beta_2 = \omega, \\ H &= \alpha_3 = \sqrt{\mu a (1 - e^2)} \cos i, & h &= \beta_3 = \Omega. \end{aligned} \right\} (3.231)$$

方程为

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\partial R'}{\partial l}, & G &= \frac{\partial R'}{\partial g}, & H &= \frac{\partial R'}{\partial h}, \\ l &= -\frac{\partial R'}{\partial L}, & g &= -\frac{\partial R'}{\partial G}, & h &= -\frac{\partial R'}{\partial H}. \end{aligned} \right\} (3.232)$$

由(3.231)式定义的正则共轭变量就叫做德洛勒变量。在天体力学中用得较多。

在天体力学中,经常要对一些小量进行展开。由于

$$L - G = L(1 - \sqrt{1 - e^2}) = L \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

$$G - H = G(1 - \cos i) = 2G \sin^2 \frac{i}{2};$$

若  $e, i$  为小量时,  $L - G, G - H$  都是二阶小量,可以把摄动函数按它们进行展开。故直接用它们作基本变量比较方便。定义新变量

$$\left. \begin{aligned} L' &= L = A_{11}L + A_{12}G + A_{13}H, \\ G' &= G - L = A_{21}L + A_{22}G + A_{23}H, \\ H' &= H - G = A_{31}L + A_{32}G + A_{33}H. \end{aligned} \right\} (3.233)$$

这是一个线性齐次变换,而且系数为

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = A_{31} = 0,$$

$$A_{21} = A_{32} = -1,$$

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1.$$

为简单起见,新变量  $l', g', h'$  也可以考虑为  $l, g, h$  的线性齐次函数。即

$$\left. \begin{aligned} l' &= B_{11}l + B_{12}g + B_{13}h, \\ g' &= B_{21}l + B_{22}g + B_{23}h, \\ h' &= B_{31}l + B_{32}g + B_{33}h. \end{aligned} \right\} (3.234)$$

其中  $B_{ij}$  为常数。要求(3.233), (3.234)式所组成的变换是正则变换,只要满足(3.220)式的条件就行了。即

$$\sum_{r=1}^3 A_{rs} B_{rs} = 1, \quad \sum_{r=1}^3 A_{rs} B_{ri} = 0. \quad (s \neq i)$$

上式对  $s, i = 1, 2, 3$ , 共有九个方程, 而  $A_{rs}$  已知, 故可以解出九个  $B_{rs}$  如下:

$$B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{22} = B_{23} = B_{33} = 1, \\ B_{21} = B_{31} = B_{32} = 0.$$

代入 (3.234) 式即得

$$l' = l + g + h, \quad g' = g + h, \quad h' = h. \quad (3.235)$$

而且从上节第 4 段的讨论可知, 这样的正则变换的哈密顿函数不变. 新变量归纳如下:

$$\left. \begin{aligned} L' &= L = \sqrt{\mu a}, \\ l' &= l + g + h = M + \omega + Q = \lambda, \\ G' &= G - L = -\sqrt{\mu a} (1 - \sqrt{1 - e^2}), \\ g' &= g + h = \omega + Q = \bar{\omega}, \\ H' &= H - G = -\sqrt{\mu a} (1 - e^2) (1 - \cos i), \\ h' &= h = Q. \end{aligned} \right\} \quad (3.236)$$

它们的哈密顿函数仍为

$$R' = R + \frac{\mu^2}{2L^2}$$

由 (3.236) 式定义的正则共轭变量叫做推广的德洛勒变量.

由于  $l', g', h'$  都是角度, 摄动函数需要展开为它们的三角级数. 为了避免多重三角级数的困难, 邦加雷提出一种简单的变换: 认为  $L', H', l', h'$  不变, 定义  $G_1, g_1$  为

$$G_1 = A \sin g', \quad g_1 = A \cos g'. \quad (3.237)$$

其中  $A = A(G')$ , 只包含  $G'$ . 这样的变换只要满足 (3.215) 或 (3.216) 式的条件, 就是正则变换. 用 (3.216) 式得

$$\frac{\partial G_1}{\partial G'} \frac{\partial g_1}{\partial g'} - \frac{\partial G_1}{\partial g'} \frac{\partial g_1}{\partial G'} = 1.$$

以 (3.227) 式代入, 又因  $A$  只包含  $G'$ , 即得

$$-A \frac{dA}{dG'} = 1,$$

积分后可得

$$A = \sqrt{-2G'}, \quad (3.238)$$

代入 (3.237) 式后即得  $G_1, g_1$  的关系式. 至于新的哈密顿函数, 可利用 (3.229) 式, 即令  $R'' = R' + \phi$ , 而  $\phi$  为

$$\frac{\partial \phi}{\partial g_1} = \frac{\partial G_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial G_1} = -\frac{\partial g_1}{\partial t}.$$

由 (3.237) 式知,  $G_1, g_1$  都不显含  $t$ , 故  $\partial \phi / \partial g_1 = 0, \partial \phi / \partial G_1 = 0$ , 因而  $\phi$  不包含  $G_1, g_1$ . 可是其它变量都不变, 故可以取  $\phi = 0$ , 即  $R'$  不变.

同理, 如再作一次变换, 只改变  $H', h'$ . 定义

$$H_1 = B \sin h', \quad h_1 = B \cos h',$$

其中  $B = B(H')$ . 则同样可得  $B = \sqrt{-2H'}$ . 而且哈密顿函数不变. 把这两次变换联在一起得到的新变量为  $L', G_1, H_1, l', g_1, h_1$ , 仍为正则共轭变量, 哈密顿函数不变. 这组变量叫做邦加雷变量, 用邦加雷的记号为

$$\left. \begin{aligned} L &= L' = \sqrt{\mu a}, & \lambda &= l' = M + \omega + \Omega, \\ \xi &= G_1 = \sqrt{-2G'} \sin g', & \eta &= g_1 = \sqrt{-2G'} \cos g', \\ p &= H_1 = \sqrt{-2H'} \sin h', & q &= h_1 = \sqrt{-2H'} \cos h'. \end{aligned} \right\} \quad (3.239)$$

## 第四章 摄动运动方程的分析解法

第三章得到了各种形式的摄动运动方程，它们是研究各种太阳系天体运动理论的基础。解出这些方程有各种方法。在天体力学常用到的有三种方法：分析方法，数值方法和定性方法。本章是介绍分析方法，即求出摄动运动方程的近似分析解。数值方法将在第五章中讲述。定性方法要用较多的数学知识，不在本书中讲述。

### § 1 摄动运动方程分析解法的原理

由于天体的位置变化较快，故用坐标或速度为基本变量的摄动运动方程，不使用分析方法来解。在分析方法中，主要用轨道根数为基本变量（包括德洛勒变量，邦加雷变量等）的摄动运动方程。这里主要介绍以轨道根数为变量的摄动运动方程，即拉格朗日行星运动方程的分析解法，而且只考虑天体之间相互吸引的摄动力。其它类型方程和不同的摄动力可以类似解决。

根据轨道根数为  $a, e, i, Q, \omega, M_0$  的摄动运动方程 (3.134) 得

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \\ \dot{e} &= \frac{1}{na^2 e} \left[ (1 - e^2) \frac{\partial R}{\partial M_0} - \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right], \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \left[ \cos i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial Q} \right], \end{aligned} \right\} (4.1)$$



$$\left. \begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \dot{\omega} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \dot{M}_0 &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \end{aligned} \right\}$$

(4.1) 式是六阶方程组, 以时间  $t$  为自变量, 在右端的函数中, 摄动函数  $R$  为

$$R = Gm' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right), \quad (4.2)$$

其中

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

$(x, y, z)$  是被摄动行星  $P$  的直角坐标, 可化为轨道根数  $a, e, i, Q, \omega, M_0$  和时间  $t$  的函数,  $(x', y', z'), r'$  是摄动行星  $P'$  的直角坐标和向径, 可化为  $P'$  的轨道根数  $a', e', i', Q', \omega', M'_0$  和时间  $t$  的函数. 如果只讨论太阳, 行星  $P$  (质量为  $m$ ) 和行星  $P'$  (质量为  $m'$ ) 之间的相互吸引, 即是三体问题. 则行星  $P'$  的轨道根数  $a', e', i', Q', \omega', M'_0$  也因  $P$  的摄动而变化, 它们的摄动方程仍为 (4.1) 式, 只是所有轨道根数都换为  $P'$  的, 摄动函数换为  $R'$ , 即

$$R' = Gm \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right). \quad (4.3)$$

为了符号简单起见, 用  $p_i$  表示  $P$  的轨道根数,  $q_i$  表示  $P'$  的轨道根数 ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). 由于摄动函数  $R$  有  $m'$  的因子,  $R'$  有  $m$  的因子, 把它们放在外面. 则  $P, P'$  的运动方程可概括为下面形式:

$$\dot{p}_i = m' F_i(p, q, t), \quad \dot{q}_i = m G_i(p, q, t). \quad (4.4)$$

故解决三体问题就是要解出 (4.4) 式的 12 个方程组,

(4.4)式每个方程都含有  $m$  或  $m'$  作为因子,而在  $F_i, G_i$  中有行星平均角速度  $n, n'$ , 也隐含着  $m, m'$  (因  $n = k\sqrt{1 + m a^{-2}}$ ,  $n' = k\sqrt{1 + m' a'^{-2}}$ ). 在太阳系中,  $m, m'$  都是小量 (小于 0.001), 故在讨论时可以把它们看作任意小参数, 展开为它们的幂级数. 先把  $p_i, q_i$  形式地展开为

$$\left. \begin{aligned} p_i &= p_i^{(0,0)} + m p_i^{(1,0)} + m' p_i^{(0,1)} + m^2 p_i^{(2,0)} \\ &\quad + m m' p_i^{(1,1)} + m'^2 p_i^{(0,2)} + \dots, \\ q_i &= q_i^{(0,0)} + m q_i^{(1,0)} + m' q_i^{(0,1)} + m^2 q_i^{(2,0)} \\ &\quad + m m' q_i^{(1,1)} + m'^2 q_i^{(0,2)} + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

(4.4)式中的函数  $F_i, G_i$  也作相应的展开, 可用马克洛林级数公式:

$$\left. \begin{aligned} F_i &= (F_i)_0 + m \left( \frac{\partial F_i}{\partial m} \right)_0 + m' \left( \frac{\partial F_i}{\partial m'} \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ m^2 \left( \frac{\partial^2 F_i}{\partial m^2} \right)_0 + 2 m m' \left( \frac{\partial^2 F_i}{\partial m \partial m'} \right)_0 \right. \\ &\quad \left. + m'^2 \left( \frac{\partial^2 F_i}{\partial m'^2} \right)_0 \right] + \dots, \\ G_i &= (G_i)_0 + m \left( \frac{\partial G_i}{\partial m} \right)_0 + n_i' \left( \frac{\partial G_i}{\partial m'} \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ m^2 \left( \frac{\partial^2 G_i}{\partial m^2} \right)_0 + 2 m m' \left( \frac{\partial^2 G_i}{\partial m \partial m'} \right)_0 \right. \\ &\quad \left. + m'^2 \left( \frac{\partial^2 G_i}{\partial m'^2} \right)_0 \right] + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

其中  $(X)_0$  表示在  $X$  中 (求过偏导数后), 令  $m = m' = 0$ . 但  $m, m'$  隐含在轨道根数  $p_i, q_i$  中, 已具体展开成 (4.5) 式. 故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial m} &= \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial m} + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial m} \right) \\ \frac{\partial F_i}{\partial m'} &= \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial m'} + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial m'} \right). \end{aligned}$$

$G_i$ 的式子相同,对  $m, m'$  的高次微商也可以类推. 代入 (4.6) 式后,再利用 (4.5) 式的结果可得

$$\begin{aligned}
 F_i(p, q, t) &= (F_i)_0 + m \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right] \\
 &\quad + m' \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right] + \dots, \\
 G_i(p, q, t) &= (G_i)_0 + m \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right] \\
 &\quad + m' \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right] + \dots.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

以 (4.5) 式和 (4.7) 式代入 (4.4) 式的两端则得

$$\begin{aligned}
 &\bar{p}_i^{(0,0)} + m\bar{p}_i^{(1,0)} + m'\bar{p}_i^{(0,1)} + m^2\bar{p}_i^{(2,0)} + mm'\bar{p}_i^{(1,1)} \\
 &\quad + m'^2\bar{p}_i^{(0,2)} + \dots = m'(F_i)_0 \\
 &\quad + mm' \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right] \\
 &\quad + m'^2 \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right] \\
 &\quad + \dots, \\
 &\bar{q}_i^{(0,0)} + m\bar{q}_i^{(1,0)} + m'\bar{q}_i^{(0,1)} + m^2\bar{q}_i^{(2,0)} + mm'\bar{q}_i^{(1,1)} \\
 &\quad + m'^2\bar{q}_i^{(0,2)} + \dots = m(G_i)_0 \\
 &\quad + m^2 \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$+ mm' \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right] \Bigg\} \\ + \dots$$

比较等号两端的  $m, m'$  的同次幂项可得

$$\dot{p}_i^{(0,0)} = 0, \quad \dot{q}_i^{(0,0)} = 0. \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i^{(1,0)} &= 0, \quad \dot{q}_i^{(0,1)} = 0, \\ \dot{p}_i^{(0,1)} &= (F_i)_0 = F_i[p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t], \\ \dot{q}_i^{(1,0)} &= (G_i)_0 = G_i[p^{(0,0)}, q^{(0,0)}, t]. \end{aligned} \right\} (4.10)$$

$$\dot{p}_i^{(2,0)} = 0, \quad \dot{q}_i^{(0,2)} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i^{(1,1)} &= \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right], \\ \dot{q}_i^{(1,1)} &= \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right], \\ \dot{p}_i^{(0,2)} &= \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(0,1)} + \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(0,1)} \right], \\ \dot{q}_i^{(2,0)} &= \sum_{s=1}^6 \left[ \left( \frac{\partial G_i}{\partial p_s} \right)_0 p_s^{(1,0)} + \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_s} \right)_0 q_s^{(1,0)} \right]. \end{aligned} \right\} (4.11)$$

.....

高次项可以依次推导下去, 可得一般项  $\dot{p}_i^{(j,k)}$ ,  $\dot{q}_i^{(j,k)}$  的表达式.

现在先来讨论积分常数问题. 从(4.9)式可知:  $p_i^{(0,0)}$ ,  $q_i^{(0,0)}$  为常数, 相应于  $m = m' = 0$  的情况, 即为无摄动运动. 一般取为初轨历元  $t_0$  时的轨道根数, 简记为  $p_i^{(0)}$ ,  $q_i^{(0)}$ . 它们一共是十二个.

在积分(4.10), (4.11)式和高次项时, 又要出现积分常数. 但(4.4)式是十二阶常微分方程组, 只应该有十二个相互独立的积分常数. 但积分(4.9)式已得十二个独立积分常数, 即  $p_i^{(0)}$ ,  $q_i^{(0)}$ . 因此其余的积分常数应该表示为  $p_i^{(j)}$ ,  $q_i^{(k)}$  的函

数。

由(4.4)式知,  $\dot{p}_i$  有  $m'$  的因子,  $\dot{q}_i$  有  $m$  的因子, 因此显然有关系:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^{(1,0)} &= \dot{p}_i^{(2,0)} = \dots = \dot{p}_i^{(j,0)} = 0, \\ \dot{q}_i^{(0,1)} &= \dot{q}_i^{(0,2)} = \dots = \dot{q}_i^{(0,k)} = 0. \end{aligned}$$

其中  $j, k$  为任意正整数. 用  $a_i^{(j,0)}, b_i^{(0,k)}$  表示  $\dot{p}_i^{(j,0)}, \dot{q}_i^{(0,k)}$  积分后的积分常数, 即

$$p_i^{(j,0)} = a_i^{(j,0)}, \quad q_i^{(0,k)} = b_i^{(0,k)}. \quad (4.12)$$

至于一般的  $p_i^{(j,k)} (k \neq 0), q_i^{(j,k)} (j \neq 0)$  的积分常数, 由(4.10), (4.11)式中可看出,  $\dot{p}_i^{(j,k)}, \dot{q}_i^{(j,k)}$  右端函数中除时间  $t$  外, 都是常数, 故可以直接进行积分, 积分常数记为  $-a_i^{(j,k)}, -b_i^{(j,k)}$ . 即可形式地表为

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(j,k)} &= f_i^{(j,k)}(t) - a_i^{(j,k)}, & (k \neq 0) \\ q_i^{(j,k)} &= g_i^{(j,k)}(t) - b_i^{(j,k)}, & (j \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

以(4.12), (4.13)代入(4.5)式后得

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{j=0}^{\infty} m' a_i^{(j,0)} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [f_i^{(j,k)}(t) - a_i^{(j,k)}] m' m'^k, \\ q_i &= \sum_{k=0}^{\infty} m^k b_i^{(k,0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [g_i^{(j,k)}(t) - b_i^{(j,k)}] m' m'^k. \end{aligned}$$

令  $t = t_0$ , 则左端就是  $p_i^{(0)}, q_i^{(0)}$ , 比较两端  $m, m'$  的系数可得

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(0,0)} &= p_i^{(0)}, & q_i^{(0,0)} &= q_i^{(0)}, \\ a_i^{(j,0)} &= b_i^{(0,k)} = 0, \\ a_i^{(j,k)} &= f_i^{(j,k)}(t_0), & (k \neq 0) \\ b_i^{(j,k)} &= g_i^{(j,k)}(t_0), & (j \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

(4.14)式表明,  $a_i^{(j,k)}, b_i^{(j,k)}$ , 是  $p_i^{(0)}, q_i^{(0)}$  的函数, 因为在  $f_i^{(j,k)}(t_0), g_i^{(j,k)}(t_0)$  中, 所有轨道根数都换成  $p_i^{(0)}, q_i^{(0)}$ . 而且也表明: 在积分  $\dot{p}_i^{(j,k)}, \dot{q}_i^{(j,k)}$  时, 积分下限取为  $t_0$  就行了(积分上限为  $t$ ).

现在来讨论(4.10), (4.11)式的解法. 如只考虑(4.9)式,

就是无摄动运动,轨道根数为常数,即为  $p_i^{(0)}, q_i^{(0)}$ .  $p_i, q_i$  展开式中,含有  $m, m'$  的一次幂项,叫做一阶摄动,即由(4.10)式

$$\begin{aligned}\dot{p}_i^{(0,1)} &= (F_i)_1 = F_i[p_i^{(0)}, q_i^{(0)}, t], \\ \dot{q}_i^{(1,0)} &= (G_i)_0 = G_i[p_i^{(0)}, q_i^{(0)}, t].\end{aligned}$$

其中函数  $F_i, G_i$  就是(4.1)式右端的函数. 上式表明,若只考虑一阶摄动,则在  $F_i, G_i$  中,一切轨道根数都取为  $t_0$  时的值;它们都是常数. 故上式可直接积分求出  $p_i^{(0,1)}, q_i^{(1,0)}$ . 但要进行积分时,需要把  $(F_i)_0, (G_i)_0$  表示为时间  $t$  的显函数. 由(4.1)式可知,主要是把摄动函数  $R$  表示为时间  $t$  的显函数. 而在  $R$  中,时间  $t$  隐含在两个天体的坐标和向径中,需要用展开方法展为平近点角  $M, M'$  的级数(因  $M = nt + M_0, M' = n't + M'_0$ ). 具体展开方法在下面几节中要讲述. 如解出  $p_i^{(0,1)}, q_i^{(1,0)}$  后,则

$$p_i = p_i^{(0)} + m' p_i^{(0,1)}, \quad q_i = q_i^{(0)} + m q_i^{(1,0)}. \quad (4.15)$$

就是准到一阶摄动的结果.

含有  $m, m'$  的二次幂项叫做二阶摄动,即(4.11)式的项. 由(4.14)式知,  $p_i^{(j,0)} = q_i^{(0,k)} = 0$ . 故由(4.11)式可得

$$\begin{aligned}\dot{p}_i^{(1,1)} &= \sum_{r=1}^6 \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_r} \right)_0 q_r^{(1,0)}, \\ \dot{q}_i^{(1,1)} &= \sum_{r=1}^6 \left( \frac{\partial G_i}{\partial p_r} \right)_0 p_r^{(0,1)}, \\ \dot{p}_i^{(0,2)} &= \sum_{r=1}^6 \left( \frac{\partial F_i}{\partial p_r} \right)_0 p_r^{(0,1)}, \\ \dot{q}_i^{(2,0)} &= \sum_{r=1}^6 \left( \frac{\partial G_i}{\partial q_r} \right)_0 q_r^{(1,0)}.\end{aligned}$$

其中  $p_i^{(0,1)}, q_i^{(1,0)}$  就是一阶摄动结果. 故上式右端都是时间  $t$  的函数, 可以进行积分. 只是要把摄动函数和它对各轨道根数

的偏导数展开为时间  $t$  的显函数。求出  $p_i^{(1,0)}, q_i^{(1,1)}, p_i^{(0,2)}, q_i^{(2,0)}$  后就可以得出准到二阶摄动的结果:

$$\begin{aligned} p_i &= p_i^{(0)} + m' p_i^{(0,1)} + mm' p_i^{(1,1)} + m'' p_i^{(0,2)}, \\ q_i &= q_i^{(0)} + m q_i^{(1,0)} + mm' q_i^{(1,1)} + m^2 q_i^{(2,0)}. \end{aligned}$$

如果准到二阶摄动还不能达到所要求精度, 可以照上面方法继续求出三阶摄动, 只要把 (4.8) 式展开到  $m, m'$  的三次幂就行了。对于太阳系自然天体来说, 由于行星质量很小, 又由于观测精度限制, 绝大多数情况都只要考虑一阶摄动就够了, 只有少数情况(如木星和土星的摄动)才要求准到二阶摄动。

上面是讨论的三体问题。如要讨论四体问题, 即同时讨论太阳和三个行星  $P_1, P_2, P_3$  在相互吸引下的运动, 上述方法同样可用, 如果设  $m_1, m_2, m_3$  为  $P_1, P_2, P_3$  的质量;  $p_i, q_i, r_i$  分别为它们的轨道根数; 则每个行星的运动方程中, 摄动函数应包含两部分, 形式相同, 只是摄动行星的质量和轨道根数换为另一个行星的量就行了, 形式地可以写为下面结果:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= m_2 F_i(p, q, t) + m_3 F_i(p, r, t), \\ \dot{q}_i &= m_1 G_i(q, p, t) + m_3 G_i(q, r, t), \\ \dot{r}_i &= m_1 H_i(r, p, t) + m_2 H_i(r, q, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

同上面方法一样, 把  $p_i, q_i, r_i$  展开为  $m_1, m_2, m_3$  的幂级数:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_i^{(j,k,l)} m_1^j m_2^k m_3^l, \\ q_i &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} q_i^{(j,k,l)} m_1^j m_2^k m_3^l, \\ r_i &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} r_i^{(j,k,l)} m_1^j m_2^k m_3^l. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

再把  $F_i, G_i, H_i$  作相应的展开, 同 (4.17) 式一起代入 (4.16) 式, 比较两端  $m_1, m_2, m_3$  的同次幂项, 即得各阶摄动的式子。五

体或更多体问题的情况也是一样,只是更繁些。

以上是用分析方法解摄动运动方程的原理,但要解出各阶摄动的微分方程,必须首先要把摄动函数展开为时间  $t$  的显函数。

## § 2 摄动函数展开方法的轮廓

从上节已知,摄动函数展开为时间  $t$  的显函数,是摄动运动方程分析解法中的重要环节。本节先讲述展开方法的轮廓,下面两节再讲展开过程中的两个步骤,最后得到展开式的结果形式。

在摄动函数中,时间  $t$  隐含在天体的直角坐标中;利用二体问题公式,可把坐标化为轨道根数和近点角的函数。而只有平近点角  $M = nt + M_0$ ,  $M' = n't + M'_0$  是时间  $t$  的显函数。因此,必须把摄动函数展开为天体的平近点角  $M, M'$  的三角级数。下面分几步讲述。

1. 摄动函数  $R$  的式子为

$$R = Gm' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^2} \right), \quad (4.18)$$

其中

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

为被摄动行星  $P$  和摄动行星  $P'$  之间的距离;  $x, y, z$  为行星  $P$  的日心黄道直角坐标;  $x', y', z', r', m'$  为行星  $P'$  的日心黄道直角坐标,向径和质量;  $G$  为万有引力常数。下面先从几何关系把  $R$  化为向径  $r, r'$  和两行星在太阳处的张角  $H$  的函数。

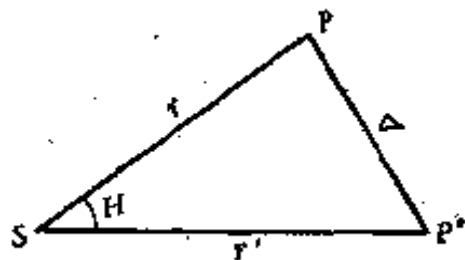


图 17



设在任一时刻  $t$ , 太阳  $S$  和行星  $P, P'$  的位置如图 17. 在三角形  $SPP'$  中, 各边为  $r = SP, r' = SP', \Delta = PP'$ . 设  $H$  为  $\Delta$  的对角, 即行星  $P, P'$  在太阳  $S$  处的张角. 由余弦定律可得

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H, \quad (4.19)$$

而且从向量关系可知

$$xx' + yy' + zz' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos H.$$

同 (4.19) 式一起代入 (4.18) 式得

$$R = Gm' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right). \quad (4.20)$$

其中  $\Delta$  用 (4.19) 式表示. 在 (4.20) 式中,  $R$  有两项: 第一项  $1/\Delta$  称为主要项, 第二项叫辅助项. 只要展开主要项后, 辅助项可同样展开.

现在把行星轨道投影到日心天球上. 在图 18 中,  $\gamma Q'Q$

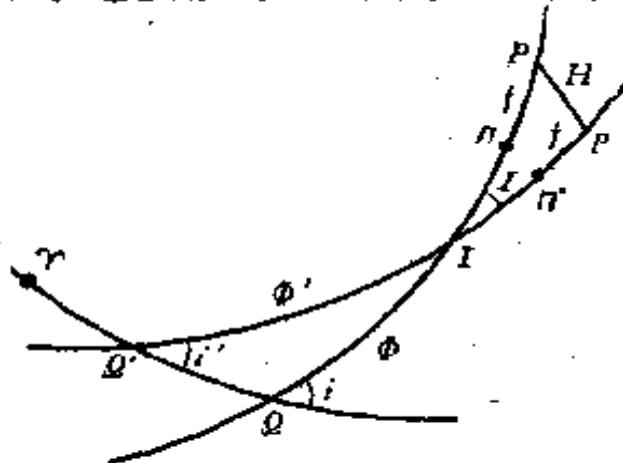


图 18

为黄道, 大圆  $QIP$  为被摄动行星  $P$  的轨道,  $Q'IP'P'$  为摄动行星  $P'$  的轨道. 图上  $P, P'$  表示在任一时刻  $t$  时的二行星位置在天球上的投影, 则  $P, P'$  之间的大圆弧长就是  $H$ .  $\Pi, \Pi'$  分别表示二行星的近日点方向, 则  $\Pi P = f$  (真近点角),  $\Pi' P' = f'$ .  $I$  为两行星轨道的交点, 定义

$$\left. \begin{aligned} I\Pi = \Pi, \quad I\Pi' = \Pi', \quad I = \angle PIP', \\ I = IP = f + \Pi, \quad I' = IP' = f' + \Pi'. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

则由球面三角  $IPP'$  可得关系:

$$\cos H = \cos l \cos l' + \sin l \sin l' \cos I. \quad (4.22)$$

另外,  $Q, Q'$  为二行星轨道对黄道的升交点. 故在球面三角形  $IQQ'$  中, 三个角为:  $i', 180 - i, I$ ; 三个边为:  $\Phi = QI = Q\Pi = I\Pi = \omega - \Pi$ ,  $\Phi' = Q'I = Q'\Pi' = I\Pi' = \omega' - \Pi'$ ,  $QQ' = \Upsilon Q - \Upsilon Q' = Q - Q'$ . 其中  $i, \omega, Q; i', \omega', Q'$  为二行星的轨道根数. 利用球面三角学中的达朗贝尔公式可得

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{I}{2} \sin \frac{\Phi + \Phi'}{2} &= \sin \frac{Q - Q'}{2} \sin \frac{i + i'}{2}, \\ \sin \frac{I}{2} \cos \frac{\Phi + \Phi'}{2} &= \cos \frac{Q - Q'}{2} \sin \frac{i - i'}{2}, \\ \cos \frac{I}{2} \sin \frac{\Phi' - \Phi}{2} &= \sin \frac{Q - Q'}{2} \cos \frac{i + i'}{2}, \\ \cos \frac{I}{2} \cos \frac{\Phi' - \Phi}{2} &= \cos \frac{Q - Q'}{2} \cos \frac{i - i'}{2}. \end{aligned} \right\} (4.23)$$

由此可以解出  $I, \Phi, \Phi'$  为轨道根数的函数, 再由关系:

$$\Pi = \omega - \Phi, \quad \Pi' = \omega' - \Phi', \quad (4.24)$$

可得  $\Pi, \Pi'$  表为轨道根数的函数. 因此 (4.22) 式表明  $\cos H$  是真近点角  $f, f'$  和二行星的轨道根数  $i, \omega, Q, i', \omega', Q'$  的函数.

2. 在大行星和多数小行星情况中,  $i, i'$  都较小, 因此  $I$  也较小. 利用关系:

$$\left. \begin{aligned} \cos I &= 1 - 2 \sin^2 \frac{I}{2} = 1 - 2\delta^2, \\ \delta^2 &= \sin^2 \frac{I}{2}, \end{aligned} \right\} (4.25)$$

则  $\delta^2$  可看成小量. 代入 (4.22) 式可得

$$\begin{aligned}\cos H &= \cos l \cos l' + \sin l \sin l' (1 - 2\delta^2) \\ &= \cos(l - l') - 2\delta^2 \sin l \sin l'.\end{aligned}\quad (4.26)$$

再代入(4.19)式,则 $\Delta^2$ 可表为

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'[\cos(l - l') - 2\delta^2 \sin l \sin l'] \\ &= [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(l - l')] \\ &\quad \times \left[ 1 + \frac{4rr'\delta^2 \sin l \sin l'}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(l - l')} \right] \\ &= \Delta_1^2 [1 + 4rr'\delta^2 \Delta_1^{-2} \sin l \sin l'],\end{aligned}\quad (4.27)$$

其中

$$\Delta_1^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(l - l').\quad (4.28)$$

于是有

$$\frac{1}{\Delta} = \Delta_1^{-1} [1 + 4rr'\delta^2 \Delta_1^{-2} \sin l \sin l']^{-\frac{1}{2}}.\quad (4.29)$$

在太阳系中,对于大行星和大多数小行星, $l$ 都很小,即 $\delta^2$ 很小,而且 $\Delta_1$ 都比较大( $\Delta_1$ 接近于二行星之间距离在任一轨道面上的投影).因此,一般情况下可以满足:

$$|4rr'\delta^2 \Delta_1^{-2} \sin l \sin l'| < 1,$$

故(4.29)式右端的括号可以用二项式定理展开:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} &= \Delta_1^{-1} [1 - 2rr'\delta^2 \Delta_1^{-2} \sin l \sin l' \\ &\quad + 6r^2 r'^2 \delta^4 \Delta_1^{-4} \sin^2 l \sin^2 l' \\ &\quad - 20r^3 r'^3 \delta^6 \Delta_1^{-6} \sin^3 l \sin^3 l' \\ &\quad + \dots\dots\dots] \\ &= \Delta_1^{-1} - 2rr'\delta^2 \Delta_1^{-3} \sin l \sin l' \\ &\quad + 6r^2 r'^2 \delta^4 \Delta_1^{-5} \sin^2 l \sin^2 l' \\ &\quad - 20r^3 r'^3 \delta^6 \Delta_1^{-7} \sin^3 l \sin^3 l' \\ &\quad + \dots\dots\dots\end{aligned}\quad (4.30)$$

3. (4.30)式是 $\Delta^{-1}$ 的初步展开,但还不是时间 $t$ 的显函数.时间 $t$ 还隐含在 $r, r', l$ (等于 $f + D$ ),  $l'$ (等于 $f' + D$ )中.若偏心率 $e = e' = 0$ ,则

$$r = a, \quad r' = a',$$

不含时间  $t$ ; 而此时  $f = M, f' = M'$  就是时间  $t$  的显函数。相应的  $l, l'$  记为

$$L = M + \Pi, \quad L' = M' + \Pi'. \quad (4.31)$$

相应  $\Delta_r$  记为  $\Delta_0$ , 即

$$\Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(L - L'), \quad (4.32)$$

相应的  $\Delta$  记为  $(\Delta)_0$ , 即 (4.30) 式成为

$$\begin{aligned} (\Delta)_0^{-1} = & \Delta_0^{-1} - 2aa'\delta^2\Delta_0^{-3} \sin L \sin L' \\ & + 6a^2a'^2\delta^4\Delta_0^{-5} \sin^2 L \sin^2 L' \\ & - 20a^3a'^3\delta^6\Delta_0^{-7} \sin^3 L \sin^3 L' \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.33) 式虽然是  $M$  的显函数, 但不便积分, 最好展开成  $M, M'$  的三角级数。首先把函数  $\Delta_0^{-(2k+1)}$  ( $k$  为正整数) 展开为  $L - L'$  的三角级数:

$$\Delta_0^{-s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^s \cos n(L - L'), \quad (s = 2k + 1) \quad (4.34)$$

具体展开过程将在下节讲述。其中  $B_n^s$  不再含时间  $t$ , 是  $a, a'$  的函数。又由于

$$\sin L \sin L' = \frac{1}{2} [\cos(L - L') - \cos(L + L')],$$

因此一般项:  $\sin^k L \sin^k L'$  可化为  $L$  和  $L'$  的余弦多项式, 即

$$\sin^k L \sin^k L' = \sum A_{i,j}^k \cos(iL + jL'),$$

其  $A_{i,j}^k$  为常数,  $|i| \leq k, |j| \leq k$ 。但又有

$$\begin{aligned} & \cos n(L - L') \cos(iL + jL') \\ & = \frac{1}{2} \cos[(n+i)L - (n-j)L'] \\ & \quad + \frac{1}{2} \cos[(n-i)L - (n+j)L']. \end{aligned}$$

因此(4.33)式可以整理为下面的形式:

$$(\Delta)_0^{-1} = \Sigma(A_{i,j}) \cos(iL + jL'), \quad (4.35)$$

其中  $n, i, j$  都是从  $-\infty$  到  $+\infty$ ;  $A(i, j)$  为  $a, a'$  和  $\delta^2$  的函数. (4.35) 式就是时间  $t$  的显函数, 因

$$iL + jL' = (in + jn')t + iM_0 + i\Pi + jM'_0 + j\Pi',$$

故便于积分.

4. 上面是令  $e = e' = 0$  的结果, 而实际上  $e \neq 0, e' \neq 0$ . 但  $e, e'$  较小时, 可以把  $\Delta^{-1}$  展开为  $e, e'$  的幂级数. 第一项就是 (4.35) 式, 以后各项可以从 (4.35) 式推出. 具体展开方法将在 § 4 中讲述.

### § 3 拉普拉斯系数和它的应用

本节专门讲述  $\Delta_0^{-(2k+1)}$  的展开方法. 由 (4.33) 式知

$$(\Delta)_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k a'^k \delta^{2k} \Delta_0^{-(2k+1)} \sin^k L \sin^k L'. \quad (4.36)$$

其中  $c_k$  为常数,  $c_0 = 1, c_1 = -2, c_2 = 6, c_3 = -20, \dots$ . 现在讨论

$$\left. \begin{aligned} a^k a'^k \Delta_0^{-(2k+1)} &= a^k a'^k (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos H_0)^{-\frac{2k+1}{2}}, \\ H_0 &= L - L'. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

的展开式.

1. 若  $a' > a$ , 令  $\alpha = a/a' < 1$  (如  $a > a'$ , 则令  $\alpha = a'/a < 1$ ). 再用  $s$  表示  $(2k+1)/2$ , 即奇数的一半. 引入符号:

$$\left. \begin{aligned} D &= (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos H_0), \\ \text{即} \quad D^{-s} &= (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos H_0)^{-s}, \\ \text{则} \quad a^k a'^k \Delta_0^{-(2k+1)} &= \frac{\alpha^k}{a'} D^{-s}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

因此只要展开  $D^{-s}$  就行了.

现在用复数来运算, 设

$$\text{则 } \left. \begin{aligned} z &= \exp(\sqrt{-1} H_0), \\ 2 \cos H_0 &= z + z^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

于是

$$\begin{aligned} D^{-s} &= (1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s} \\ &= (1 - \alpha z)^{-s} (1 - \alpha z^{-1})^{-s}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

根据  $z$  的定义,  $|z| = 1$ , 而  $\alpha < 1$ , 故  $|\alpha z| < 1$ ,  $|\alpha z^{-1}| < 1$ , 因此, (4.40) 式可以用二项式定理展开, 即

$$\begin{aligned} (1 - \alpha z)^{-s} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n z^n, \\ (1 - \alpha z^{-1})^{-s} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n z^{-n}. \end{aligned}$$

由于这两式的系数相同, 故代入 (4.40) 式后可整理为下面形式:

$$\left. \begin{aligned} D^{-s} &= \frac{1}{2} B_0^s + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n^s (z^n + z^{-n}), \\ \text{其中} \\ \frac{1}{2} B_0^s &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s^2(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+m-1)^2}{(m!)^2} \alpha^{2m}, \\ \frac{1}{2} B_n^s &= \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n \left[ 1 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m-1)}{m!} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(s+n)(s+n+1)\cdots(s+n+m-1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \alpha^{2m} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

根据  $z$  的定义知

$$\frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) = \cos nH_0.$$

故

$$D^{-s} = \frac{1}{2} B_0^s + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^s \cos nH_0. \quad (4.42)$$

这就把  $D^{-s}$  展开成为  $H_0 = L - L'$  的三角级数。其中  $n$  为正整数, 为了以后的讨论方便, 规定

$$\left. \begin{aligned} & B_{-n}^s = B_n^s, \\ & D^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s \cos nH_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

由(4.40)式定义的系数  $B_n^s$  就叫做拉普拉斯系数。根据超几何级数的定义(参看第一章§12),  $B_n^s$  可用超几何级数来表示, 即

$$\frac{1}{2} B_n^s = \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{n!} \alpha^n F(s, s+n, n+1, \alpha^2). \quad (4.44)$$

由于没有这种形式的超几何级数的表, 下面求出它们的循环公式, 以便逐步计算。

2. 先求出两个最简单的拉普拉斯系数, 即  $B_0^{1/2}$ ,  $B_1^{1/2}$ , 作为用循环公式计算所有  $B_n^s$  的初始值。

在(4.40)式中, 令  $s = 1/2$  可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B_n^{1/2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m (m!)} \\ &\quad \times \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+2m-1)}{2^{n+m} (n+m)!} \alpha^{n+2m}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\left. \frac{1}{2} B_0^{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2}{2^{2m} (m!)^2} \alpha^{2m}, \right\} \quad (4.45)$$

$$\left. \frac{1}{2} B_1^{1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2}{2^{2m}(m!)^2} \frac{2m+1}{2m+2} \alpha^{2m+1} \right\}$$

这就是计算  $B_0^{1/2}$ ,  $B_1^{1/2}$  的公式.

3. 现在就来求出  $B_n^s$  的循环公式. 根据关系:

$$(1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s} = D^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s z^n.$$

两端对  $z$  求微商得

$$\begin{aligned} \alpha s(1 - z^{-2})(1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s-1} \\ = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n B_n^s z^{n-1}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

即

$$\begin{aligned} \alpha s(z - z^{-1})(1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s} \\ = (1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1}) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n B_n^s z^n. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \alpha s(z - z^{-1}) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^s z^n \\ = (1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1}) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n B_n^s z^n. \end{aligned}$$

比较两端  $z^{n-1}$  的系数可得

$$\begin{aligned} \alpha s(B_{n-2}^s - B_n^s) &= (n-1)(1 + \alpha^2) B_{n-1}^s \\ &\quad - \alpha[(n-2)B_{n-2}^s + nB_n^s]. \end{aligned}$$

由此可解出

$$B_n^s = \frac{n-1}{n-s} (\alpha + \alpha^{-1}) B_{n-1}^s - \frac{n+s-2}{n-s} B_{n-2}^s. \quad (4.47)$$

这就是一个循环公式, 可由  $B_{n-1}^s$ ,  $B_{n-2}^s$  求出  $B_n^s$ .

另外, 又由 (4.46) 式得



$$\alpha s(1 - z^{-2}) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{s+1} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n B_n^s z^{n-1}.$$

比较两端  $z^{n-1}$  的系数则得

$$n B_n^s = \alpha s (B_{n-1}^{s+1} - B_{n+1}^{s+1}). \quad (4.48)$$

这也是一个循环公式，可从  $s+1$  的两个系数求出  $s$  的一个系数。但在应用时不方便，最好能求出从  $s$  求  $s+1$  的循环公式。

在(4.47)式中，令  $s = s+1$ ,  $n = n+1$  得

$$B_{n+1}^{s+1} = \frac{1}{n-s} [n(\alpha + \alpha^{-1}) B_n^{s+1} - (n+s) B_{n+1}^{s+1}].$$

代入(4.48)式得

$$B_n^s = \frac{s}{n-s} [2\alpha B_{n+1}^{s+1} - (1 + \alpha^2) B_n^{s+1}]. \quad (4.49)$$

再在(4.49)式中令  $n = n+1$  得

$$B_{n+1}^{s+1} = \frac{s}{n-s+1} [2\alpha B_n^{s+1} - (1 + \alpha^2) B_{n+1}^{s+1}]. \quad (4.50)$$

则在(4.48), (4.49), (4.50)中消去  $B_{n+1}^{s+1}$ ,  $B_{n-1}^{s+1}$  后整理得

$$B_n^{s+1} = \frac{(n+s)(1 + \alpha^2) B_n^s - 2(n-s+1) B_{n+1}^s}{s(1 - \alpha^2)}. \quad (4.51)$$

(4.51)式就是从  $s$  的两个系数  $B_n^s$ ,  $B_{n+1}^s$  求出  $s+1$  的循环公式。这样一来，根据(4.45)式可求出  $B_0^{1/2}$ ,  $B_1^{1/2}$  利用(4.47)式可逐步求出所有的  $B_n^{1/2}$ ；然后再用(4.51)式从  $B_0^{1/2}$ ,  $B_1^{1/2}$  求出  $B_0^{3/2}$ ，从  $B_1^{1/2}$ ,  $B_2^{1/2}$  求出  $B_1^{3/2}$ ；于是再用(4.47)式从  $B_0^{3/2}$ ,  $B_1^{3/2}$  逐步求出所有的  $B_n^{3/2}$ 。由此类推，所有的  $B_n^s$  都可以求出了。

4. 在摄动函数展开过程中，不仅要用到拉普拉斯系数  $B_n^s$  本身，还要用到它们对  $a$ ,  $a'$  或  $\alpha$  的各级微商。因此必须求出计算各级微商的公式。由于  $\alpha = a/a'$ ，故微商运算有下面关系：

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{1}{a'} \frac{d}{d\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial a'} = -\frac{\alpha}{a'} \frac{d}{d\alpha}.$$

故只要求出了  $B'_n$  对  $\alpha$  的各级微商,  $B'_n$  对  $a, a'$  的各级微商都可以求出来, 根据

$$(1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B'_n z^n,$$

两端对  $\alpha$  求微商可得 ( $\alpha$  与  $z$  无关)

$$\begin{aligned} & -s(2\alpha - z - z^{-1})(1 + \alpha^2 - \alpha z - \alpha z^{-1})^{-s-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{dB'_n}{d\alpha} z^n, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & -s(2\alpha - z - z^{-1}) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B'_{n+1} z^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{dB'_n}{d\alpha} z^n. \end{aligned}$$

比较两端  $z^n$  的系数可得

$$\frac{dB'_n}{d\alpha} = s(B'_{n-1} + B'_{n+1} - 2\alpha B'_n). \quad (4.52)$$

这是用三个  $s+1$  的拉普拉斯系数计算  $B'_n$  的微商的公式, 但最好能求出同一个  $s$  的关系式, 用公式 (4.51) 可以转化, 在 (4.51) 式中, 令  $n = n-1, n, n+1$  得

$$\left. \begin{aligned} B'_{n-1} &= \frac{(n+s-1)(1+\alpha^2)B'_n - 2(n-s)B'_{n+1}}{s(1-\alpha^2)^2}, \\ B'_n &= \frac{(n+s)(1+\alpha^2)B'_{n-1} - 2(n-s+1)B'_{n+1}}{s(1-\alpha^2)^2}, \\ B'_{n+1} &= \frac{(n+s+1)(1+\alpha^2)B'_n - 2(n-s+2)B'_{n+2}}{s(1-\alpha^2)^2}. \end{aligned} \right\} (4.53)$$

代入 (4.52) 式后, 再用 (4.47) 式把  $B'_{n+1}, B'_{n+2}$  化为  $B'_{n-1}, B'_n$ , 故可整理为下面形式:

$$\begin{aligned} \frac{dB'_n}{d\alpha} &= \frac{1}{1-\alpha^2} [2(n+s-1)B'_{n-1} \\ &\quad + \{2\alpha s - n(\alpha + \alpha^{-1})\} B'_n]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

(4.54) 式就是从  $B_{n-1}^s$ ,  $B_n^s$  计算  $B_n^s$  对  $\alpha$  的一阶微商的公式。

对于二阶微商, 可从 (4.54) 继续求下去, 但先把  $1 - \alpha^2$  的因子乘到左端, 即

$$(1 - \alpha^2) \frac{dB_n^s}{d\alpha} = 2(n + s - 1)B_{n-1}^s + \{2\alpha s - n(\alpha + \alpha^{-1})\}B_n^s.$$

对  $\alpha$  再求一次微商得

$$\begin{aligned} (1 - \alpha^2) \frac{d^2 B_n^s}{d\alpha^2} - 2\alpha \frac{dB_n^s}{d\alpha} \\ = 2(n + s - 1) \frac{dB_{n-1}^s}{d\alpha} + [2\alpha s - n(\alpha + \alpha^{-1})] \frac{dB_n^s}{d\alpha} \\ + [2s - n(1 - \alpha^{-2})]B_n^s. \end{aligned} \quad (4.55)$$

其中  $dB_{n-1}^s/d\alpha$  最好换为  $dB_n^s/d\alpha$ , 在 (4.54) 式中令  $n = n - 1$  可得

$$\begin{aligned} \frac{dB_{n-1}^s}{d\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha^2} [2(n + s - 2)B_{n-2}^s \\ + \{2\alpha s - (n - 1)(\alpha + \alpha^{-1})\}B_{n-1}^s]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

再由 (4.47) 式可得

$$\begin{aligned} [(n + s) - 2]B_{n-2}^s = (n - 1)(\alpha + \alpha^{-1})B_{n-1}^s \\ - (n - s)B_n^s. \end{aligned}$$

代入 (4.56) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{dB_{n-1}^s}{d\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha^2} [\{2\alpha s + (n - 1)(\alpha + \alpha^{-1})\}B_{n-1}^s \\ - 2(n - s)B_n^s]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

其中的  $B_{n-1}^s$  还可以用 (4.54) 式换为  $B_n^s$ ,  $dB_n^s/d\alpha$ , 即

$$\begin{aligned} 2(n + s - 1)B_{n-1}^s = (1 - \alpha^2) \frac{dB_n^s}{d\alpha} \\ - [2\alpha s - n(\alpha + \alpha^{-1})]B_n^s. \end{aligned}$$

代入 (4.57) 式可得

$$2(n+s-1) \frac{dB'_{n-1}}{d\alpha} = [2\alpha s + (n-1)(\alpha + \alpha^{-1})] \frac{dB'_n}{d\alpha} + [4s^2 - 2s - n(n-1)(1 - \alpha^{-2})] B'_n.$$

代入(4.55)式, 整理后则得

$$(\alpha^2 - \alpha^4) \frac{d^2 B'_n}{d\alpha^2} + [\alpha - \alpha^3(4s+1)] \frac{dB'_n}{d\alpha} - [4\alpha^2 s^2 + n^2(1 - \alpha^2)] B'_n = 0. \quad (4.58)$$

这就是从  $B'_n$  和  $dB'_n/d\alpha$  求二阶微商  $d^2 B'_n/d\alpha^2$  的公式, 也是  $B'_n(\alpha)$  所满足的微分方程. 利用它可以把  $B'_n$  对  $\alpha$  的高阶微商化为  $B'_n$  和  $dB'_n/d\alpha$  的函数. 于是  $B'_n$  对  $\alpha$  的各阶微商都可以求出了.

#### § 4 纽康算子, 摄动函数展开的基本形式

上两节的讨论可得到偏心率  $e = e' = 0$  时的展开式:

$$\frac{1}{(\Delta)_0} = \sum A(i, j) \cos(iL + jL'), \quad (4.59)$$

其中  $A(i, j)$  为  $a, a', \delta^2$  的函数, 而

$$\delta^2 = \sin^2 \frac{I}{2}. \quad (4.60)$$

故形式地可记为

$$(\Delta)_0^{-1} = F(a, a', L, L', \delta^2). \quad (4.61)$$

其中函数  $F$  就代表(4.59)式右端的总和.

但实际上  $e, e'$  不等于 0, 此时应把(4.61)式中的  $a, a', L, L'$  换为  $r, r', l, l'$ . 即应展开  $\Delta^{-1}$  为

$$\Delta^{-1} = F(r, r', l, l', \delta^2). \quad (4.62)$$

而时间  $t$  仍隐含在  $r, r', l, l'$  中, 但由关系

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E) = a + x, \\ r' &= a'(1 - e' \cos E') = a' + x', \\ l &= L + (f - M) = L + v, \\ l' &= L' + (f' - M') = L' + v', \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

则  $x, x', v, v'$  都是与偏心率  $e, e'$  同数量级的量。当  $e, e'$  较小时,  $x, x', v, v'$  也较小, 故用 (4.63) 式代入 (4.62) 式后, 可用多重泰勒级数公式展开为  $x, x', v, v'$  的幂级数, 再把  $x^m, x'^m, v^p, v'^q$  展开为  $M$  或  $M'$  的三角级数。为了符号简单起见, 引入一种运算符号。

先考虑一个变量的函数  $\varphi(x)$ , 根据泰勒公式有

$$\begin{aligned} \varphi(x + \Delta x) &= \varphi(x) + \frac{\Delta x}{1} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) \\ &+ \cdots = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \right] \varphi(x). \end{aligned} \quad (4.64)$$

其中括号内的量代表一种运算符号, 上式就是它的定义。由于指数函数

$$\exp(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

故 (4.64) 式右端括号可形式地用指数函数表示, 即 (4.64) 式可写为

$$\varphi(x + \Delta x) = \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x). \quad (4.65)$$

同样, 对于多变量函数, 也可以用这样的符号, 即

$$\left. \begin{aligned} &\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ &= \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi(x, y), \\ &\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \cdots) \\ &= \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \cdots\right) \varphi(x, y, z, \cdots). \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

如果所用的函数,对各变量都存在任意阶的连续偏微商,则偏微商运算的次序可以交换,故可得关系:

$$\begin{aligned} \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) &= \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi(x, y) \right] \\ &= \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left[ \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi(x, y) \right]. \end{aligned}$$

因此,指数函数形式的运算符号仍然保持指数函数特点,即

$$\begin{aligned} \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) &= \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \exp\left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) \exp\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right), \end{aligned} \quad (4.67)$$

变量更多时,有同样的性质.

现在就用以上讨论的运算符号来讨论  $\Delta^{-1}$  的展开式.但是在  $F(a, a', L, L', \delta^2)$  中,  $a, a'$  基本上以  $\alpha = a/a'$  的形式出现,而且若按

$$F(a + x, a' + x', \dots)$$

展开为  $x, x'$  的幂级数,则  $x = -ae \cos E, x' = -a'e' \cos E'$ , 其中还包含有  $a, a'$ . 在讨论时不方便. 但在函数  $F$  中,可以把它看作是对数  $\ln r, \ln r'$  的函数; 在  $e = e' = 0$  时为  $\ln a, \ln a'$ . 相应的增量为

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \ln r - \ln a = \ln \frac{r}{a} = \ln(1 - e \cos E), \\ \rho' &= \ln r' - \ln a' = \ln \frac{r'}{a'} = \ln(1 - e' \cos E'). \end{aligned} \right\} (4.68)$$

显然  $\rho, \rho'$  也是与  $e, e'$  同数量级的量,而且不再包含  $a, a'$ . 此时相应的展开式应为

$$F(\ln a + \rho, \ln a' + \rho', \dots) = \exp \left[ \rho \frac{\partial}{\partial(\ln a)} \right]$$

$$+ \rho' \frac{\partial}{\partial(\ln a')} + \dots \Big] F(\ln a, \ln a', \dots),$$

用  $D, D'$  表示上式中的偏微商运算符号, 即

$$D = \frac{\partial}{\partial(\ln a)}, \quad D' = \frac{\partial}{\partial(\ln a')}.$$

但  $\frac{d \ln a}{da} = \frac{1}{a}, \quad \frac{d \ln a'}{da'} = \frac{1}{a'},$

则

$$D = \frac{\partial}{\partial(\ln a)} = a \frac{\partial}{\partial a}, \quad D' = \frac{\partial}{\partial(\ln a')} = a' \frac{\partial}{\partial a'}. \quad (4.69)$$

再由  $\alpha = a/a'$ , 则有

$$\begin{aligned} Df(\alpha) &= a \frac{\partial}{\partial a} f(\alpha) = a \frac{d}{d\alpha} f(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial a} \\ &= \frac{a}{a'} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \alpha \frac{df(\alpha)}{d\alpha}. \end{aligned}$$

因此

$$D = \alpha \frac{d}{d\alpha}.$$

同理

$$D' = a' \frac{\partial}{\partial a'} = -\alpha \frac{d}{d\alpha}.$$

(4.70)

从上节可知, 展开式是  $\alpha$  的幂级数, 用  $D, D'$  来运算  $\alpha^n$ , 形式很简单, 即

$$D\alpha^n = \alpha \frac{d\alpha^n}{d\alpha} = n\alpha^n,$$

$$D^2\alpha^n = D(n\alpha^n) = n^2\alpha^n,$$

.....

$$D^m\alpha^n = n^m\alpha^n,$$

$$D'\alpha^n = -\alpha \frac{d\alpha^n}{d\alpha} = -n\alpha^n,$$

$$D'^2\alpha^n = D'(-n\alpha^n) = n^2\alpha^n,$$

.....

$$D^m\alpha^n = (-1)^m n^m \alpha^n.$$

(4.71)

再用  $D_1, D'_1$  表示偏微商运算符号:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial L}, \quad D'_1 = \frac{\partial}{\partial L'} \quad (4.72)$$

则展开式可写为

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= F(\ln a + \rho, \ln a' + \rho, L + \nu, L' + \nu', \delta^2) \\ &= \exp(\rho D + \rho' D' + \nu D_1 + \nu' D'_1) \\ &\quad \times F(\ln a, \ln a', L, L', \delta^2) \\ &= \exp(\rho' D' + \nu' D'_1) \exp(\rho D + \nu D_1) \\ &\quad \times F(\ln a, \ln a', L, L', \delta^2). \end{aligned} \quad (4.73)$$

其中函数  $F(\ln a, \ln a', L, L', \delta^2)$  就是  $(\Delta)_0^{-1}$  的展开式, 即 (4.59) 式. 上式运算表明, 可以分两步进行, 第一步先展开:

$$\begin{aligned} &\exp(\rho D + \nu D_1) F(\ln a, \ln a', L, L', \delta^2) \\ &= \exp(\rho D + \nu D_1) \Sigma A(i, j) \cos(iL + jL'). \end{aligned} \quad (4.74)$$

由于这里把  $a, L$  看成相互独立的量, 故运算符号  $D$  只运算系数  $A(i, j)$ , 不管  $L$  中隐含的  $a$  ( $L = nt + \dots$ ,  $n$  中含  $a$ ). 三角函数换为复数形式后, 运算更方便, 用  $w, w'$  表示复变量:

$$w = \exp(\sqrt{-1}L), \quad w' = \exp(\sqrt{-1}L'). \quad (4.75)$$

由于  $\cos(iL + jL') = \cos(-iL - jL')$ , 这两项的系数都可看作  $A(i, j)$ , 而  $i, j$  都是从  $-\infty$  到  $+\infty$ , 故

$$F = \Sigma A(i, j) \cos(iL + jL') = \Sigma A(i, j) w^i w'^j. \quad (4.76)$$

故 (4.74) 式可写为

$$\exp(\rho D + \nu D_1) \Sigma A(i, j) w^i w'^j. \quad (4.77)$$

利用关系 (4.75) 式知

$$\frac{dw}{dL} = \sqrt{-1} \exp(\sqrt{-1}L) = \sqrt{-1} w,$$

因此

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial L} = \sqrt{-1} w \frac{\partial}{\partial w}, \\ D_1 w' &= \sqrt{-1} w \frac{\partial w'}{\partial w} = i \sqrt{-1} w'. \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$



即可得

$$\begin{aligned} & \exp(\rho D + \nu D_1) A(i, j) w^i w'^j \\ & = \exp(\rho D + i\sqrt{-1}\nu) A(i, j) w^i w'^j. \end{aligned} \quad (4.79)$$

(4.79)式可作为(4.77)式的一般项。但

$$\begin{aligned} \exp(\rho D + i\sqrt{-1}\nu) & = 1 + \rho D + i\sqrt{-1}\nu \\ & + \frac{1}{2}(\rho^2 D^2 + 2i\sqrt{-1}D\rho\nu - i^2\nu^2) + \dots, \end{aligned} \quad (4.80)$$

其中  $\rho, \nu$  可用椭圆轨道的展开式, 展开为  $e$  的幂级数, 系数为平近点角  $M$  的三角多项式。

由于

$$\begin{aligned} \rho & = \ln \frac{r}{a} = \ln(1 - e \cos E) = -e \cos E \\ & - \frac{e^2}{2} \cos^2 E - \frac{e^3}{3} \cos^3 E - \dots, \end{aligned}$$

把其中  $\cos^k E$  化为倍角三角函数后, 再用  $\cos kE$  展开为  $M$  的三角函数的公式(1.149)代入, 并把其中白塞耳函数展开为  $e$  的幂级数, 最后按  $e$  的幂次整理可得(展开到  $e^7$  为止)

$$\begin{aligned} \rho & = \left( \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{32} + \frac{e^6}{96} + \dots \right) \\ & + \left( -e + \frac{3}{8}e^3 + \frac{1}{64}e^5 + \frac{127}{9216}e^7 \right) \cos M \\ & + \left( -\frac{3}{4}e^2 + \frac{11}{24}e^4 - \frac{3}{64}e^6 \right) \cos 2M \\ & + \left( -\frac{17}{24}e^3 + \frac{77}{128}e^5 - \frac{743}{5120}e^7 \right) \cos 3M \\ & + \left( -\frac{71}{96}e^4 + \frac{129}{160}e^6 \right) \cos 4M + \left( -\frac{523}{640}e^5 \right. \\ & \left. + \frac{10039}{9216}e^7 \right) \cos 5M - \frac{899}{960}e^6 \cos 6M \end{aligned}$$

$$- \frac{355081}{322560} e^7 \cos 7M, \quad (4.81)$$

又由于  $v = f - M$ , 为椭圆运动中真近点角同平近点角之差, 又叫做中心差, 需要根据  $f$  展开为偏近点角  $E$  的级数公式 (1.198)

$$f = E + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \frac{\sin nE}{n},$$

再利用公式 (1.152), (1.153) 和 (1.154) 把  $E$  和  $\sin nE$  展开为  $M$  的三角级数, 还要把系数中的白塞耳函数及  $\beta^n [\beta = (1 - \sqrt{1 - e^2})/e]$  展开为  $e$  的幂级数, 代入上式按  $e$  的幂次整理得 (到  $e^7$  为止)

$$\begin{aligned} v = & \left( 2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 + \frac{107}{4608} e^7 \right) \sin M \\ & + \left( \frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 + \frac{17}{192} e^6 \right) \sin 2M \\ & + \left( \frac{13}{12} e^3 - \frac{43}{64} e^5 + \frac{95}{512} e^7 \right) \sin 3M \\ & + \left( \frac{103}{96} e^4 - \frac{451}{480} e^6 \right) \sin 4M + \left( \frac{1097}{960} e^5 \right. \\ & \left. - \frac{5957}{4608} e^7 \right) \sin 5M + \frac{1223}{960} e^6 \sin 6M \\ & + \frac{47273}{32256} e^7 \sin 7M, \end{aligned} \quad (4.82)$$

仍然用虚变量的指数函数代替三角函数, 以便于运算. 定义

$$\begin{aligned} z &= \exp(\sqrt{-1}M), \\ \text{则} \quad \left. \begin{aligned} \cos nM &= \frac{1}{2} (z^n + z^{-n}), \\ \sin nM &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} (z^n - z^{-n}). \end{aligned} \right\} \quad (4.83) \end{aligned}$$

故(4.81), (4.82)式可写为

$$\rho = e \left( -\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} z^{-1} \right) + e^2 \left( -\frac{3}{8} z^2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} z^{-2} \right) \\ + e^3 \left( -\frac{17}{48} z^3 + \frac{3}{16} z + \frac{3}{16} z^{-1} - \frac{17}{48} z^{-3} \right) + \dots, \quad (4.84)$$

$$\sqrt{-1} \nu = e(z - z^{-1}) + \frac{5}{8} e^2(z^2 - z^{-2}) \\ + e^3 \left( \frac{13}{24} z^3 - \frac{1}{8} z + \frac{1}{8} z^{-1} - \frac{13}{24} z^{-3} \right) + \dots, \quad (4.85)$$

以(4.84), (4.85)式代入(4.80)后, 按 $e$ 的幂次整理可得

$$\exp(\rho D + i\sqrt{-1}\nu) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n e^n, \quad (4.86)$$

其中 $K_n$ 为 $D, i, z$ 的函数, 形式为

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \left[ -\frac{1}{2} D + i \right] z + \left[ -\frac{1}{2} D - i \right] z^{-1}, \\ K_2 &= \frac{1}{8} [D^2 + (-4i - 3)D + 5i + 4i^2] z^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} [D^2 + D - 4i^2] \\ &\quad + \frac{1}{8} [D^2 + (4i - 3)D \\ &\quad - 5i + 4i^2] z^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.87)$$

一般项:

$$K_n = \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n z^{n-2m}. \quad (4.88)$$

其中记号:  $\Pi_{n-2m}^n$  叫做纽康运算符, 从(4.87)式可看出

$$\begin{aligned}
 \Pi_1^1 &= -\frac{1}{2}D + i, \\
 \Pi_{-1}^1 &= -\frac{1}{2}D - i, \\
 \Pi_2^2 &= \frac{1}{8}[D^2 + (-4i - 3)D + 5i + 4i^2], \\
 \Pi_0^2 &= \frac{1}{4}[D^2 + D - 4i^2], \\
 \Pi_{-2}^2 &= \frac{1}{8}[D^2 + (4i - 3)D - 5i + 4i^2]. \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{4.89}$$

也就是  $K_n$  按  $z$  的幂次整理后, 系数就是纽康运算符, 其中包含偏微商运算符号  $D$ , 和整数  $i$ , 故也可记为  $\Pi_i^n(D, i)$ . 代入 (4.86) 式后得

$$\begin{aligned}
 \exp(\rho D + i\sqrt{-1}\nu) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^n \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n z^{n-2m} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n z^{n-2m}.
 \end{aligned}
 \tag{4.90}$$

其中定义  $\Pi_0^0 = 1$ . 于是展开式一般项(4.79)式成为

$$\begin{aligned}
 \exp(\rho D + i\sqrt{-1}\nu) A(i, j) w^i w'^j \\
 = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{m=0}^n \Pi_{n-2m}^n A(i, j) w^i w'^j z^{n-2m}.
 \end{aligned}$$

如取  $m$  为  $-n, -n+2, -n+4, \dots, n-2, n$ , 则上式可记为

$$\begin{aligned}
 \exp(\rho D + i\sqrt{-1}\nu) A(i, j) w^i w'^j \\
 = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{m=-n}^n \Pi_m^n A(i, j) w^i w'^j z^m.
 \end{aligned}
 \tag{4.91}$$

同理, 再用运算符号  $\exp(\rho'D' + \nu'D')$  来运算 (4.91) 式时, 可以求出

$$D_1' = \frac{\partial}{\partial L'} = \sqrt{-1} w' \frac{\partial}{\partial w'}$$

而且

$$\exp(\rho'D' + \nu'D_1') = \exp(\rho'D' + j\sqrt{-1}\nu').$$

运算(4.91)式后可得下面结果:

$$\begin{aligned} & \exp(\rho D + \rho' D' + i\sqrt{-1}\nu + j\sqrt{-1}\nu') A(i, j) w^i w'^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} e^n e'^{n'} \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \Pi_m^n \Pi_{m'}^{n'} A(i, j) w^i w'^j z^m z'^{m'}, \end{aligned}$$

其中

$$z' = \exp(\sqrt{-1}M').$$

如把  $z, w, w'$  都还原为  $M, L, L'$ , 再用符号

$$P_{mm'}^{nn'}(i, j) = \Pi_m^n \Pi_{m'}^{n'} A(i, j).$$

则摄动函数主要项的展开式结果的形式为

$$\frac{1}{\Delta} = \sum P_{mm'}^{nn'}(i, j) e^n e'^{n'} \cos(iL + jL' + mM + m'M'). \quad (4.92)$$

前面的求和符号是对六个整数  $i, j$  (从  $-\infty$  到  $+\infty$ );  $n, n'$  (从  $0 \rightarrow +\infty$ );  $m$  (从  $-n \rightarrow +n$ ),  $m'$  (从  $-n' \rightarrow +n'$ ) 求和。其实上节讲的  $D^{-1}$  的展开式还隐含在系数  $P$  中。根据  $L, L'$  的定义可知

$$\begin{aligned} & iL + jL' + mM + m'M' \\ &= (i+m)M + (j+m')M' + i\Pi + i\Pi', \end{aligned}$$

为时间  $t$  的线性函数。辅助量  $\Pi, \Pi'$  为轨道根数 ( $i, \omega, \Omega, i', \omega', \Omega'$ ) 的函数。系数  $P$  则为  $a, a'$  和  $\delta^2 = \sin^2 \frac{I}{2}$  的函数, 而  $I$  为轨道根数 ( $i, \Omega, i', \Omega'$ ) 的函数。

(4.92) 式是摄动函数主要项展开结果, 但摄动函数还有辅助项为

$$-\frac{r}{r'^2} \cos H.$$

当  $e = e' = 0$  时, 则为

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a}{a'^2} \left[ \cos(L - L') - 2 \sin L \sin L' \sin^2 \frac{I}{2} \right] \\
 & = -\frac{a}{a'^2} \left[ \cos(L - L') - \cos(L - L') \sin^2 \frac{I}{2} \right. \\
 & \quad \left. + \cos(L + L') \sin^2 \frac{I}{2} \right].
 \end{aligned}$$

这是  $(\Delta)_{01}$  的展开式中的特殊项, 完全可合并到展开式的一般项中, 不影响展开式结果的基本形式. 最后, 摄动函数的展开式可写为下面的形式:

$$R = Gm' \sum P_{mm'}^{nn'}(i, j) e^n e'^n \cos(iL + jL' + mM + m'M'). \quad (4.93)$$

这仅为展开式的形式. 从上面讨论可看出; 如要全部写出展开到  $e, e'$  的七次幂的结果, 是相当繁的. (4.93) 式已有人展开到  $e, e'$  的八次幂<sup>1)</sup>.

对于大行星和月球的情况, 都求出了它们运动方程的摄动函数展开式, 一般都有几百项到几千项. 如还要进一步精确讨论, 项数还要大量增加. 这也是分析方法的一个基本困难. 而且当  $e, e', I$  较大时, 展开式的收敛性也成问题. 已有不少人研究过新的展开方法, 但到现在也没有较好的结果.

若自变量不用时间  $t$ , 例如用偏近点角  $E$ , 则摄动函数只要展开为  $E$  的三角级数就行了. 这样的展开式要简单些. 但是摄动行星的  $E'$  要表为  $E$  的显函数才能积分, 这点也要增加麻烦. 摄动理论中的汉森 (Hansen) 方法, 就是把摄动函数展开为  $E$  的三角级数. 也有人用真近点角  $f$  作自变量, 摄动函数也展开为  $f$  的三角级数, 但效果并不好.

1) Boquet: Annales de l'observatoire de Paris, Tom 19.

## § 5 长期摄动, 周期摄动和长周期摄动

得到了摄动函数  $R$  的展开式后, 就可以代入天体的摄动运动方程求解. 本节对一阶摄动进行一些初步讨论.

1. 根据上节得到的摄动函数展开式, 在符号上再作些简化, 可以写为

$$\left. \begin{aligned} R &= m' \sum P \cos Q, \\ \text{其中} \quad Q &= pM + p'M' + j\Pi + j'\Pi' \\ &= (pn + p'n')t + pM_c + p'M'_c + j\Pi + j'\Pi'. \end{aligned} \right\} (4.94)$$

这里的  $n, n'$  表示二行星的平均角速度. 展开式系数  $P$  为轨道根数  $(a, e, i, Q; a', e', i', Q')$  的函数.  $Q$  中的辅助量  $\Pi, \Pi'$  为轨道根数  $(\omega, Q, i; \omega', Q', i')$  的函数. 其中的  $p, p', j, j'$  是任意整数. 但当  $p = p' = 0$  时,  $Q$  与时间  $t$  无关, 记为  $Q_0$ , 即

$$Q_0 = j\Pi + j'\Pi'. \quad (4.95)$$

(4.94) 式中角度为  $Q_0$  的项不显含时间  $t$ , 在  $R$  中单独列出, 便于讨论, 即

$$R = m' \sum P_0 \cos Q_0 + m' \sum P \cos Q. \quad (4.96)$$

后面一项中一定包含时间  $t$ .

下面就对各轨道根数的摄动方程进行讨论. 只考虑一阶摄动. 先讨论半长径  $a$ , 由于

$$a = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0}. \quad (4.97)$$

由于系数  $P_0, P$  和  $Q_0$  都不包含  $M_0$ , 故用 (4.96) 代入 (4.97) 式后可得

$$a = -\frac{2m'}{na} \sum pP \sin Q.$$

由于只考虑一阶摄动, 故积分时, 所有轨道根数都看作常数, 积分后可得

$$a = a_0 + \frac{2m'}{na} \sum \frac{pP}{pn + p'n'} \cos Q. \quad (4.98)$$

由于  $Q$  中有时间  $t$ , 系数为  $pn + p'n'$ , 故  $\cos Q$  为时间  $t$  的周期函数, 用符号  $P. T.$  表示, 即

$$a = a_0 + P. T.,$$

其中  $a_0$  为积分常数. 再由  $Q$  的方程

$$\dot{Q} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} = A \frac{\partial R}{\partial i}, \quad (4.99)$$

此时,  $P_0, P, Q_0, Q$  都是  $i$  的函数, 故用 (4.96) 式代入得

$$\begin{aligned} \dot{Q} = Am' \left[ \sum \frac{\partial P_0}{\partial i} \cos Q_0 - \sum P_0 \frac{\partial Q_0}{\partial i} \sin Q_0 \right. \\ \left. + \sum \frac{\partial P}{\partial i} \cos Q - \sum P \frac{\partial Q}{\partial i} \sin Q \right], \end{aligned}$$

其中各偏导数都不显含  $t$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial i} = j \frac{\partial \Pi}{\partial i} + j' \frac{\partial \Pi'}{\partial i}$$

也不显含  $t$ , 故积分后得

$$\begin{aligned} Q = Q_0 + Am' \left[ \sum \frac{\partial P_0}{\partial i} \cos Q_0 - \sum P_0 \frac{\partial Q_0}{\partial i} \sin Q_0 \right] t \\ + Am' \left[ \sum \frac{\partial P}{\partial i} \frac{\sin Q}{pn + p'n'} + \sum P \frac{\partial Q}{\partial i} \frac{\cos Q}{pn + p'n'} \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

其中  $Q_0$  为积分常数, 第一个方括号用  $\beta$  表示, 第二个方括号为时间  $t$  的周期函数, 仍记为  $P. T.$  则

$$Q = Q_0 + \beta t + P. T.,$$

其它轨道根数情况相同, 只是  $M_0$  的情况值得提一下, 方程为



$$\dot{M}_0 = -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = A \frac{\partial R}{\partial e} + B \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (4.101)$$

第一项没有什么特殊情况。第二项对  $a$  求偏导数时，因  $Q$  中有平均角速度  $n$ ，隐含  $a$ 。但在第三章 § 8 中已讲明，在  $M_0$  的方程中，

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right),$$

即求偏导数时，不管近点角中隐含的  $a$ 。于是

$$\left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) = m' \left[ \sum \frac{\partial P_0}{\partial a} \cos Q_0 + \sum \frac{\partial P}{\partial a} \cos Q \right]$$

$\partial R / \partial e$  的形式相同，故代入 (4.101) 式后，与  $Q$  的形式一样，积分后可得

$$M_0 = (M_0)_0 + \beta t + P.T.,$$

其中  $(M_0)_0$  为积分常数。只是平近点角  $M$  应为

$$M = \int n dt + M_0. \quad (4.102)$$

综上所述，如只考虑一阶摄动，各轨道根数的解为下列形式：

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + P.T. \\ e &= e_0 + \beta t + P.T. \\ i &= i_0 + \beta t + P.T. \\ Q &= Q_0 + \beta t + P.T. \\ \omega &= \omega_0 + \beta t + P.T. \\ M_0 &= (M_0)_0 + \beta t + P.T. \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

2. 在 (4.103) 式中， $a_0, e_0, \dots$  是  $t = 0$  时初轨的轨道根数。 $\beta t$  这一项包含时间  $t$  作因子，当  $t \rightarrow +\infty$  时， $\beta t \rightarrow \pm \infty$  (由  $\beta$  的符号决定)。这样的项叫做长期项或长期摄动。一般说来，含有  $t^m$  因子的项都是长期项。这种项反映出轨道根数的

一种变化趋势,在天体演化中占重要地位。

值得注意的是半长径  $a$  在仅讨论一阶摄动时没有长期项。但考虑二阶和高阶摄动后是否会有长期项出现呢? 下节专门讨论这个问题。

偏心率  $e$  存在长期项,在天体演化中也很重要。若  $e$  无限增大,则必然要从  $e < 1$  的椭圆轨道变成  $e > 1$  的双曲线轨道。如果行星是这样情况,则太阳系就不稳定了。讨论高阶摄动后,  $e$  包含有  $e_1 t + e_2 t^2 + \dots$ , 都是长期项。下面列出地球、金星、木星到二阶摄动的长期项:

$$e_{\oplus} = 0.0167498 - 0.0000426 t - 0.000000137 t^2,$$

$$e_{\ominus} = 0.00681636 - 0.00005384 t + 0.000000126 t^2,$$

$$e_{\text{木}} = 0.04833475 + 0.000164180 t - 0.000000468 t^2.$$

其中  $t$  为从 1900.0 起算的时间,以 100 年为单位。如只从上式看,几十万年后则有  $e_{\text{木}} < 0$ ,  $e_{\oplus} < 0$ ,  $e_{\ominus} > 1$ 。这样的结果显然是不可能的。这是因为只讨论到二阶摄动的缘故。讨论高阶摄动后,会出现  $t$  的高次幂项,故  $e$  可表为时间  $t$  的幂级数。但幂级数也可能表示周期函数,例如

$$\sin t + \cos t = 1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \dots$$

就是周期函数。因此,长期项是否真正表示为“长期”还成问题。有待今后继续研究。

3. (4.103) 式中用  $P, T$  表示的项就叫周期项或周期摄动。由于在  $Q$  中,  $t$  的系数为  $pn + p'n'$ , 故积分后的周期项的形式为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{m'F}{pn + p'n'} \sin[(pn + p'n')t + G] \\ & \frac{m'F}{pn + p'n'} \cos[(pn + p'n')t + G], \end{aligned} \right\} \quad (4.104)$$

其中  $p, p'$  为任意整数, 不同时为 0. 因为  $n, n'$  为二行星的平均角速度, 在一般情况下,  $pn + p'n'$  不是小量. 故相应的周期

$$T = \frac{2\pi}{pn + p'n'}$$

不大, 系数也不大. 这样的项叫做短周期项或短周期摄动.

如果  $pn + p'n'$  是小量, 相应的周期  $T$  就很长, 系数也较大, 这种项就叫做长周期项或长周期摄动. 这种情况是存在的. 当  $n, n'$  之比很接近于简单分数时, 对应于  $p, p'$  适当的值, 可使  $pn + p'n'$  很小, 这种情况叫做近于通约或共振.

在太阳系中, 这种情况是有的. 例如, 木星和土星的平均角速度为

$$n = 299''13/\text{天}, \quad n' = 120''45/\text{天}.$$

于是当  $p = -2, p' = 5$  时,

$$pn + p'n' = 3''99.$$

这一项的周期几乎是木星周期的 75 倍, 约为 890 年. 相应的系数也很大, 如木星对土星的黄经摄动中, 这一项的系数达到  $50'$ .

天王星和海王星平均角速度  $n = 42''24/\text{天}, n' = 21''53/\text{天}$ . 当  $p = -1, p' = 2$  时,  $pn + p'n' = 0''82$ ; 这项的周期约为 4300 年!

在小行星运动中, 讨论木星的摄动时, 接近通约的情况就更多, 这种情况已成为小行星摄动理论的困难问题之一. 有待继续研究.

## § 6 关于太阳系的稳定性问题

太阳系的稳定性问题, 是天体演化学和天体力学的基本

问题之一，主要是轨道半长径  $a$  和偏心率  $e$  的长期摄动问题，因为其它轨道根数都是角度，它们的长期变化对太阳系的稳定性不起直接作用。关于偏心率  $e$  的长期摄动情况，上节已作介绍，但还没有解决。本节对半长径  $a$  的长期摄动问题进行一些讨论，同时也作为讨论二阶摄动的一个例子。

1. 讨论二阶摄动时，摄动方程右端的函数要对各轨道根数取偏导数。为了讨论简单起见，摄动函数的展开形式进行适当改变。在上节的讨论中，摄动函数已采用下面形式：

$$\left. \begin{aligned} R &= m' \sum P_0 \cos Q_0 + m' \sum P \cos Q, \\ \text{其中} \quad Q &= pM + p'M' + j\Pi + j\Pi', \\ Q_0 &= j\Pi + j\Pi'. \end{aligned} \right\} \quad (4.105)$$

在  $P \cos Q$  中，包含有三个辅助量： $I, \Pi, \Pi'$ 。它们是轨道根数  $(i, \omega, Q, i', \omega', Q')$  的函数，现在设法把含  $i, i'$  的部份并入系数  $P$  中，含  $\omega, \omega', Q, Q'$  的部份并入角度  $Q$  中。

根据§ 2 的图 18，从其中的球面三角形  $IQQ'$  可得下列关系：

$$\cos I = \cos i \cos i' + \sin i \sin i' \cos(Q - Q'), \quad (4.106)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin I \sin \Phi &= \sin i' \sin(Q - Q'), \\ \sin I \sin \Phi' &= \sin i \sin(Q - Q'), \\ \sin I \cos \Phi &= \cos i' \sin i - \sin i' \cos i \cos(Q - Q'), \\ \sin I \cos \Phi' &= -\cos i' \cos i \\ &\quad + \sin i' \sin i \cos(Q - Q'). \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

其中

$$\Phi = \omega - \Pi, \quad \Phi' = \omega' - \Pi'. \quad (4.108)$$

从§ 2 讨论可知， $I$  只包含在系数中，而且是以  $\delta^{2k} = \sin^{2k} \frac{I}{2}$  的形式出现。由 (4.106) 式可得

$$\sin^2 \frac{I}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos I)$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \cos i \cos i' - \sin i \sin i' \cos(Q - Q')],$$

因此

$$\sin^{2k} \frac{I}{2} = \frac{1}{2^k} [1 - \cos i \cos i' - \sin i \sin i' \cos(Q - Q')]^k,$$

显然可以表为  $Q - Q'$  的三角多项式，而且是余弦的多项式，即

$$\sin^{2k} \frac{I}{2} = \sum_{s=0}^k E_s \cos^s(Q - Q'). \quad (4.109)$$

其中  $E_s = E_s(i, i')$ ，为  $i, i'$  的函数。以(4.109)式代入摄动函数的系数中，再把  $\cos Q \cos^s(Q - Q')$  化为和差角的余弦函数。则只要把  $Q$  改为

$$Q = pM + p'M' + s(Q - Q') + j\Pi + j\Pi'$$

就行了，系数中就不再包含  $Q, Q'$ 。

另外，由(4.108)式知， $\Pi = \omega - \Phi, \Pi' = \omega' - \Phi'$ 。故  $Q$  可以写为

$$Q = pM + p'M' + s(Q - Q') + j\omega + j'\omega' - j\Phi - j'\Phi' = Q_1 - j\Phi - j'\Phi',$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= pM + p'M' + s(Q - Q') + j\omega + j'\omega', \\ \cos Q &= \cos Q_1 \cos(j\Phi + j'\Phi') \\ &\quad + \sin Q_1 \sin(j\Phi + j'\Phi'). \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

在  $I \approx 0$  时，可取

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin I} &= (1 - \cos^2 I)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2s)} \cos^{2s} I. \end{aligned}$$

用(4.106)式代入可展开为  $Q - Q'$  的余弦级数，即

$$\frac{1}{\sin I} = \sum D_s \cos(sQ - sQ'),$$

$D_s$  为  $i, i'$  的函数。于是根据 (4.107) 式可得

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= \sin i' \sin(Q - Q') \sum D_s \cos(sQ - sQ') \\ &= \sum F_r \sin(rQ - rQ'), \end{aligned}$$

即为  $Q - Q'$  的正弦级数。同理,  $\sin \Phi'$  也是  $Q - Q'$  的正弦级数;  $\cos \Phi, \cos \Phi'$  则为  $(Q - Q')$  的余弦级数。由于余弦级数乘余弦级数或正弦级数乘正弦级数的结果都是余弦级数, 余弦级数和正弦级数相乘的结果是正弦级数, 因此, 把  $\cos j\Phi$  化为  $\cos \Phi$  的多项式后, 由于  $\cos \Phi$  是  $Q - Q'$  的余弦级数, 则  $\cos j\Phi$  也可表示为  $Q - Q'$  的余弦级数。  $\cos j'\Phi'$  的情况相同。又因  $\sin j\Phi$  可表为  $\sin \Phi$  乘上  $\cos \Phi$  的多项式, 故  $\sin j\Phi$  是  $Q - Q'$  的正弦级数;  $\sin j'\Phi'$  也是正弦级数。由此可推出

$$\cos(j\Phi + j'\Phi') = \cos j\Phi \cos j'\Phi' - \sin j\Phi \sin j'\Phi',$$

是  $Q - Q'$  的余弦级数;

$$\sin(j\Phi + j'\Phi') = \sin j\Phi \cos j'\Phi' + \cos j\Phi' \sin j'\Phi',$$

是  $Q - Q'$  的正弦级数。

代入 (4.110) 式后可整理为

$$\cos Q = \sum L_m \cos(Q_0 + mQ - m'Q').$$

$\cos Q_0$  也有同样的结果, 其中  $L_m$  是  $i, i'$  的函数。代入  $R$  后, 可以整理为下列形式:

$$\text{其中} \left. \begin{aligned} R &= m' \sum G_0 \cos K_0 + m' \sum G \cos K, \\ K &= pM + p'M' + j\omega + j'\omega' + lQ + l'Q', \\ K_0 &= j\omega + j'\omega' + lQ + l'Q'. \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

系数  $G_0, G$  中只包含轨道根数  $(a, e, i)$  和  $(a', e', i')$ 。  $K$  中包含另外几个轨道根数  $(Q, \omega, M_0)$  和  $(Q', \omega', M'_0)$ ;  $K_0$  中则没有  $M_0, M'_0$ 。

若  $I = 0$ , 则  $\sin^2 \frac{I}{2} = 0, \Phi = \Phi' = 0$ , 故摄动函数原来

的展开式就是 (4.111) 式的形式。

以 (4.111) 式代入行星摄动运动方程 (3.134)。由于  $(a, e, i)$  的方程只有  $R$  对  $(Q, \omega, M_0)$  的偏微商;  $(Q, \omega, M_0)$  的方程只有  $R$  对  $(a, e, i)$  的偏微商。因此, 如只讨论一阶摄动时, 各轨道根数的一阶周期摄动有下面规律:  $a, e, i$  的周期摄动为余弦函数;  $Q, \omega, i$  的周期摄动为正弦函数。即为下面形式( $m'$  写在外面):

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + m' \sum A \cos K, \\ e &= e_0 + m' \beta t + m' \sum A \cos K, \\ i &= i_0 + m' \beta t + m' \sum A \cos K, \\ Q &= Q_0 + m' \beta t + m' \sum B \sin K, \\ \omega &= \omega_0 + m' \beta t + m' \sum B \sin K, \\ M_0 &= (M_0)_0 + m' \beta t + m' \sum B \sin K. \end{aligned} \right\} \quad (4.112)$$

其中  $K$  就是 (4.111) 式所定义的量。周期项中不再有常数项。

2. 在这样的基础上来讨论半长径  $a$  的二阶摄动。根据 § 1 的讨论可知,  $a$  的二阶摄动为两项:  $m'^2 a^{(0,2)}$  和  $m m' a^{(1,1)}$ 。由公式 (4.11) 得

$$\left. \begin{aligned} a^{(0,2)} &= \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\partial F}{\partial p_j} \right)_0 p_j^{(0,1)}, \\ a^{(1,1)} &= \sum_{j=1}^6 \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \right)_0 q_j^{(1,0)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.113)$$

其中  $p_j = (a, e, i, \omega, Q, M_0)$ ,  $q_j = (a', e', i', \omega', Q', M_0')$ ,

$$F = \frac{2}{n a m'} \frac{\partial R}{\partial M_0}$$

以 (4.111) 中的  $R$  代入得

$$F = \sum H \sin K \quad (4.114)$$

其中  $H$  仍为  $(a, e, i)$ ,  $(a', e', i')$  的函数, 而且 (4.114) 式

中没有常数项， $K$  中的平近点角  $M, M'$  应为

$$M = \int n dt + M_0, \quad M' = \int n' dt + M'_0.$$

为符号简单起见，令

$$\text{则} \quad \left. \begin{aligned} \rho &= \int n dt, & \rho' &= \int n' dt, \\ M &= \rho + M_0, & M' &= \rho' + M'_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.115)$$

讨论二阶摄动时，要用  $F$  对  $a$  的偏导数，此时就必须考虑  $M$  中隐含的  $a$  (通过  $\rho$ )。由于在所有轨道根数中， $\rho$  只是  $a$  的函数，故利用微分关系可得

$$\frac{\partial F}{\partial a} \Delta a = \left( \frac{\partial F}{\partial a} \right) \Delta a + \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial a} \Delta a = \left( \frac{\partial F}{\partial a} \right) \Delta a + \frac{\partial F}{\partial \rho} \Delta \rho.$$

其中带括号的项表示只对  $F$  的系数  $H$  中的  $a$  取偏微商。于是 (4.113) 式中  $\dot{a}^{(0,2)}$  项可写为

$$\begin{aligned} \dot{a}^{(0,2)} &= \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial a} \right) \right]_0 a^{(0,1)} + \left[ \frac{\partial F}{\partial \rho} \right]_0 \rho^{(0,1)} + \left[ \frac{\partial F}{\partial e} \right]_0 e^{(0,1)} \\ &\quad + \dots \dots \dots, \end{aligned} \quad (4.116)$$

其中  $\rho^{(0,1)}$  为  $\rho$  的一阶摄动，即

$$\rho^{(0,1)} = \int n^{(0,1)} dt,$$

$n^{(0,1)}$  为  $n$  的一阶摄动，可从  $n$  与  $a$  的关系

$$n^2 a^3 = \mu$$

求出：

$$\Delta n = - \frac{3n}{2a} \Delta a,$$

即

$$n^{(0,1)} = - \frac{3n_0}{2a_0} a^{(0,1)},$$

则

$$\rho^{(0,1)} = \int - \frac{3n_0}{2a_0} a^{(0,1)} dt. \quad (4.117)$$



根据(4.112)式的一阶扰动结果可得

$$\left. \begin{aligned} a^{(0,1)} &= \sum A \cos K, \\ e^{(0,1)} &= \beta t + \sum A \cos K, \\ i^{(0,1)} &= \beta t + \sum A \cos K, \\ Q^{(0,1)} &= \beta t + \sum B \sin K, \\ \omega^{(0,1)} &= \beta t + \sum B \sin K, \\ M_0^{(0,1)} &= \beta t + \sum B \sin K, \end{aligned} \right\} \quad (4.118)$$

代入(4.116)式就可求出 $\dot{a}^{(0,2)}$ 。下面逐项讨论。

因 
$$\left( \frac{\partial F}{\partial a} \right) = \sum \frac{\partial H}{\partial a} \sin K,$$

则

$$\left( \frac{\partial F}{\partial a} \right)_0 a^{(0,1)} = \left[ \sum \frac{\partial H}{\partial a} \sin K \right] \cdot \sum A \cos K = P.T..$$

因正弦级数乘余弦级数结果为正弦级数,不含常数项,故记为周期项 $P.T.$ 。又

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \sum p H \cos K,$$

而由(4.117), (4.118)式知

$$\rho^{(0,1)} = - \int \frac{3n_0}{2a_0} a^{(0,1)} dt = \sum C \sin K,$$

则

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \rho} \right]_0 \rho^{(0,1)} = \left[ \sum p H \cos K \right] \cdot \sum C \sin K = P.T..$$

又由

$$\frac{\partial F}{\partial e} = \sum \frac{\partial H}{\partial e} \sin K,$$

则

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial F}{\partial e} \right]_0 e^{(0,1)} &= t \sum \beta \frac{\partial H}{\partial e} \sin K + \\ &\left[ \sum \frac{\partial H}{\partial e} \sin K \right] \cdot \sum A \cos K = t(P.T.) + P.T.. \end{aligned}$$

同理:

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial i} \right]_0^{i^{(0,1)}}, \left[ \frac{\partial F}{\partial Q} \right]_0^{Q^{(0,1)}}, \left[ \frac{\partial F}{\partial \omega} \right]_0^{\omega^{(0,1)}}, \left[ \frac{\partial F}{\partial M_0} \right]_0^{M_0^{(0,1)}}$$

的形式仍为  $t[P.T.] + P.T.$ , 因此

$$\dot{a}^{(0,2)} = t(P.T.) + P.T.$$

积分后得

$$a^{(0,2)} = t(P.T.) + P.T., \quad (4.119)$$

其中  $t(P.T.)$  为时间  $t$  乘周期函数, 叫做混合项. 故  $a^{(0,2)}$  只有周期项和混合项, 没有长期项. 用同样方法可得  $a^{(1,1)}$  是相同形式. 而且考虑四体或更多体问题时, 结果也相同. 因此可得下面一个定理:

在行星之间相互摄动作用下, 行星的轨道半长径的一阶和二阶摄动中, 只有周期项和混合项, 不存在长期项.

这个结论首先由柏松在十九世纪初求出, 后又由很多人进一步完善, 正式予以肯定.

如果讨论三阶摄动, 勒沃里叶 (Leverrier) 和厄吉尼提斯 (Eginitis) 等人找出了  $a$  的一个长期项. 廿世纪以来, 又有不少人进行研究. 1955年美伏罗瓦 (Meffroy) 又找出  $a$  的三阶长期项为

$$\frac{3^3 \times 11}{2^6} m'^3 t a^{7/2} a'^{-3} e'^2 \sin(2\omega - 2\omega'),$$

因此  $a$  的三阶长期摄动可肯定是存在了.

但是关于太阳系的稳定性问题, 人们只是增加怀疑, 还没有解决. 有待今后继续研究.

## § 7 限制性三体问题

在太阳系中, 讨论小行星、彗星和其它小质量天体(如人

造地球卫星)在太阳和某一个大行星吸引下的运动时,可以把小天体的质量看做无限小.从力学观点来说,就是忽略小天体对太阳和大行星的吸引,只讨论小天体在太阳和某一个大行星吸引下的运动规律.这样的问题就叫做限制性三体问题,是天体力学的基本问题之一.当然,对一般三体问题加上一些限制条件后,都可以叫做限制性三体问题.但在天体力学中,如不具体讲明,限制性三体问题都是指上面所讲的情况.

一般把两个大质量的天体叫做有限体,把小质量天体叫做无限小质量体,或简称小天体.因为不考虑小天体对两个有限体的吸引,故讨论两个有限体的运动时,只考虑它们的相互吸引,成为二体问题.因此它们的轨道为圆锥曲线.根据圆锥曲线的具体轨道情况,又可将限制性三体问题分为下面几种类型.当圆锥曲线为圆时,叫做圆型限制性三体问题;圆锥曲线为椭圆时,叫做椭圆型限制性三体问题;同样,还有抛物线型限制性三体问题和双曲线型限制性三体问题;前两种类型讨论得较多,本节主要介绍一下圆型限制性三体问题的一些基本知识,作为摄动运动方程的一种特解.

1. 为了方程形式简单起见,取两个有限体  $P_1, P_2$  的质量之和等于 1 (质量单位). 设  $P_2$  的质量较小,用  $\mu$  表示; 则  $P_1$  的质量为  $1 - \mu$ . 显然,  $\mu \leq 0.5$ . 由于圆锥曲线为平面曲线,取两个有限体的轨道平面为参考坐标面  $\xi\eta$ ; 取  $P_1, P_2$  的质量中心  $O$  为坐标原点;  $\xi$  轴转向  $\eta$  轴时同  $P_1, P_2$  的运动方向一致. 另一坐标轴  $\zeta$  垂直于  $\xi\eta$  平面,与  $\xi, \eta$  轴成右手系. 设  $P_1, P_2$  的坐标分别为  $(\xi_1, \eta_1, 0)$ , 和  $(\xi_2, \eta_2, 0)$ ; 小天体的坐标为  $(\xi, \eta, \zeta)$ . 则  $P$  同  $P_1$  或  $P_2$  的距离  $r_1, r_2$  应为

$$r_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2}.$$

因为二有限体的轨道为圆形,故它们之间的距离为常数,可取

作距离的单位。再取适当的时间单位，可使万有引力常数等于 1。则小天体的运动方程可写为 [参看 (3.2) 式]

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= -(1-\mu) \frac{\xi - \xi_1}{r_1^3} - \mu \frac{\xi - \xi_2}{r_2^3}, \\ \ddot{\eta} &= -(1-\mu) \frac{\eta - \eta_1}{r_1^3} - \mu \frac{\eta - \eta_2}{r_2^3}, \\ \ddot{\zeta} &= -(1-\mu) \frac{\zeta}{r_1^3} - \mu \frac{\zeta}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.120)$$

容易证明二有限体绕其质量中心也是沿圆形轨道运动。设角速度为  $n$  (常数), 在上述的单位中,  $n = 1$ 。

现在选取一种新的坐标系  $O-xyz$ , 坐标原点  $O$  不动, 取  $xy$  平面与  $\xi\eta$  平面重合,  $z$  轴与  $\zeta$  轴重合;  $x$  轴固定在  $P_1P_2$  联线上, 并指向  $OP_2$ , 随着  $P_1P_2$  旋转;  $y$  轴与  $x$  轴垂直, 当  $x$  轴与  $\xi$  轴重合时,  $y$  轴也同  $\eta$  轴重合。设在  $t = 0$  时,  $x, y$  轴同  $\xi, \eta$  轴重合; 由于  $P_1, P_2$  运动角速度  $n = 1$ , 故在任一时刻  $t$  时,  $x$  轴从  $\xi$  轴旋转了一个角度  $t$ 。根据坐标旋转的关系式可得

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos t - y \sin t, \\ \eta &= x \sin t + y \cos t, \\ \zeta &= z. \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

设  $P_1, P_2$  在新坐标系中的坐标为  $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)$ 。由于  $x$  轴在  $P_1P_2$  线上, 故  $y_1 = y_2 = 0$ ; 又因原点  $O$  为  $P_1, P_2$  的质量中心, 而  $x$  轴方向为  $OP_2$ , 则有关系:

$$x_1 = -\mu, \quad x_2 = 1 - \mu, \quad y_1 = y_2 = 0. \quad (4.122)$$

设小天体的新坐标为  $(x, y, z)$ 。用变换 (4.121) 代入 (4.120) 式可得

$$\begin{aligned} & (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \cos t - (\dot{y} + 2\dot{x} - y) \sin t \\ &= - \left\{ (1-\mu) \frac{x - x_1}{r_1^3} + \mu \frac{x - x_2}{r_2^3} \right\} \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right\} y \sin t, \\
& (\ddot{x} - 2\dot{y} - x) \sin t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y) \cos t \\
& = - \left\{ (1-\mu) \frac{x-x_1}{r_1^3} + \mu \frac{x-x_2}{r_2^3} \right\} \sin t \\
& \quad - \left\{ \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right\} y \cos t, \\
& \ddot{z} = -(1-\mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}.
\end{aligned}$$

在前两式中容易消去时间  $t$ 。以  $\cos t$  乘第一式同  $\sin t$  乘第二式相加；以  $\sin t$  乘第一式同  $\cos t$  乘第二式相减；都可消去  $t$ ，即得

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - (1-\mu) \frac{x-x_1}{r_1^3} - \mu \frac{x-x_2}{r_2^3}, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= y - (1-\mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3}.
\end{aligned} \right\} (4.123)$$

$z$  的式子不变。其中

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}, \\
r_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}.
\end{aligned}$$

如果定义函数  $U = U(x, y, z)$  为

$$U = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (4.124)$$

则 (4.123) 式连同  $z$  的式子可以简化为

$$\left. \begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\
\ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}.
\end{aligned} \right\} (4.125)$$

(4.125) 式就是圆型限制性三体问题在旋转坐标系中的基本

方程。在方程中,除基本变量  $x, y, z$  外,都是常数,而且不显含  $t$ 。故在讨论圆型限制性三体问题时,常用(4.125)式,而不常用(4.120)式。因在(4.120)式中,  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$  是时间  $t$  的函数,故(4.120)式中显含时间  $t$ 。函数  $U$  也可以看作小天体受两个有限体吸引的位函数。

(4.125)式容易得出一个初积分,以  $2\dot{x}$  乘第一式,  $2\dot{y}$  乘第二式,  $2\dot{z}$  乘第三式,一起相加可得

$$2(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z}) = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z}\right) = 2\frac{dU}{dt}.$$

积分可得

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C, \quad (4.126)$$

其中  $C$  为积分常数。这个积分叫做雅哥比积分,在圆型限制性三体问题中占有重要地位。

(4.126)式左端就是小天体在旋转坐标系中的速度的平方,当速度等于 0 时,(4.126)式成为

$$2U - C = 0,$$

即

$$2U = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C. \quad (4.127)$$

这是一个曲面的方程,叫做零速度面。根据小天体的初值决定积分常数  $C$ ,也就决定了零速度面。

2. 现在从(4.125)和(4.127)式来讨论圆型限制性三体问题的特解。如果存在某些点  $(x, y, z)$ , 满足关系

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (4.128)$$

则这些点(坐标是常数)必然满足方程(4.125)式;因此是(4.125)式的特解。下面就来讨论(4.128)式是否有解。

用(4.124)式代入(4.128)式可得

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x-x_1) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-x_2) = 0, \quad (4.129)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{1-\mu}{r_1^3} y - \frac{\mu}{r_2^3} y = 0, \quad (4.130)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1-\mu}{r_1^3} z - \frac{\mu}{r_2^3} z = 0. \quad (4.131)$$

先讨论(4.131)式,它就是

$$z \left( \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0.$$

括号内的量为正数,而在有限空间内( $r_1, r_2$ 为有限值)不可能等于0.因此,如果有解,必然为 $z=0$ .也就是说,如果有特解,则在 $xy$ 平面上.此时 $r_1, r_2$ 可简单一些,即

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}.$$

再由(4.130)式得

$$y \left( 1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0.$$

只有两种可能:

$$y = 0, \quad (4.132)$$

或

$$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0. \quad (4.133)$$

先讨论(4.133)式的情况.以 $x$ 乘(4.133)式与(4.129)式相减可得

$$\frac{1-\mu}{r_1^3} x_1 + \frac{\mu x_2}{r_2^3} = 0.$$

但 $x_1, x_2$ 已知,用(4.122)式的值代入得

$$-\frac{\mu(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(1-\mu)}{r_2^3} = 0,$$

由此得 $r_1^3 = r_2^3$ ,即 $r_1 = r_2$ .

代入(4.133)式可得

$$r_1 = r_2 = 1.$$

但长度单位就是二有限体之间的距离。因此当  $r_1 = r_2 = 1$  时，表明这些点与  $P_1, P_2$  组成一个等边三角形。在  $xy$  平面上只有两个这样的点，对称于  $x$  轴，就是图 19 中的  $L_4, L_5$  点。其中  $L_4$  的  $y > 0$ ， $L_5$  的  $y < 0$ 。容易求出  $L_4, L_5$  的坐标  $(X_4, Y_4), (X_5, Y_5)$  为

$$\begin{aligned} X_4 &= \frac{1}{2} - \mu, & Y_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ X_5 &= \frac{1}{2} - \mu, & Y_5 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

这两点是(4.125)式的特解。即若小天体初始位置在  $L_4$  或  $L_5$  点，而且速度为 0（相对旋转坐标系），则小天体在二有限体吸引下仍永远不动。在惯性坐标系中，就是随着有限体一起作圆形轨道运动，永远保持与  $P_1, P_2$  组成等边三角形。因此这两个特解又叫做等边三角形解。

现在来讨论(4.132)式， $y = 0$  的情况。由于  $r_1, r_2$  为距离，应为正值，故此时

$$r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2} = |x - x_1|, \quad r_2 = |x - x_2|.$$

此时相应的(4.129)式成为

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{1 - \mu}{|x - x_1|^3} (x - x_1) \\ &\quad - \frac{\mu}{|x - x_2|^3} (x - x_2) = 0, \end{aligned} \quad (4.134)$$

其中  $x_1, x_2$  为(4.122)式的值。

从(4.134)式可看出，函数  $F(x)$  在  $x = x_1, x = x_2$  这两点不连续，而对其它任何实数值都是连续的。在  $x$  由  $-\infty \rightarrow +\infty$  变化时，分为三个区间来讨论，即  $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, +\infty)$ 。

由(4.134)式可知



$$F(-\infty) = -\infty < 0,$$

而在区间 $(-\infty, x_1)$ 内,  $F(x)$ 为连续函数, 并有关系  $x < x_1 < x_2$ , 故(4.134)式可写为

$$F(x) = x + \frac{1-\mu}{(x_1-x)^2} + \frac{\mu}{(x_2-x)^2},$$

则

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1 + \frac{2(1-\mu)}{(x_1-x)^3} + \frac{2\mu}{(x_2-x)^3} > 0. \quad (4.135)$$

即  $F(x)$  在区间 $(-\infty, x_1)$ 内为单调增加函数. 而当  $x$  从左边(小于  $x_1$ )无限接近  $x_1$  时, 记为  $x \rightarrow x_1 - 0$ . 由(4.135)式可得

$$F(x_1 - 0) = +\infty.$$

这就是说, 当  $x$  由  $-\infty \rightarrow x_1$  时,  $F(x)$  由  $-\infty$  单调增加到  $+\infty$ , 则  $F(x) = 0$  在区间 $(-\infty, x_1)$ 内有一个而且只有一个解. 相应的  $x$  记为  $X_3$ , 在  $x$  轴上的位置应在  $P_1$  点的左边, 即图 19 中的  $L_3$  点.

同样的讨论可知,  $F(x) = 0$  在区间  $(x_1, x_2), (x_2, +\infty)$

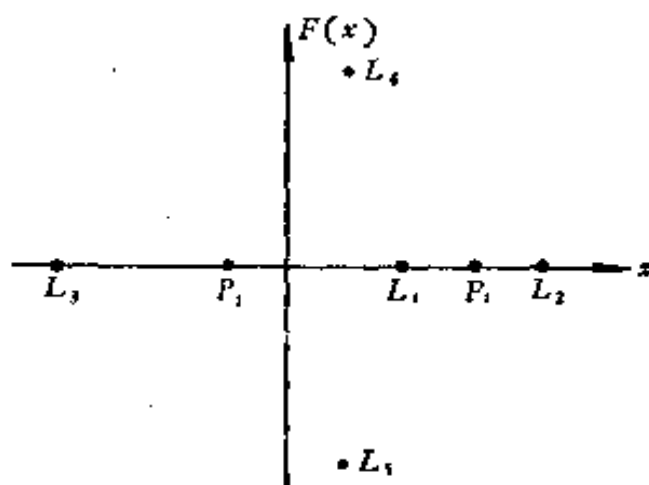


图 19

内也各有一个解, 相应的值记为  $X_1, X_2$ ; 相应于图 19 中的  $L_1, L_2$  点.  $L_1, L_2, L_3$  三点的坐标  $X_1, X_2, X_3$  要从(4.134)式解

出来,是 $\mu$ 的函数.当 $\mu$ 较小时,可用 $\mu$ 的级数表示,结果为

$$X_1 = (1 - \mu) - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} \\ + \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} - \dots$$

$$X_2 = (1 - \mu) + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} \\ - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \dots$$

$$X_3 = -1 - \frac{5}{12} \mu + \frac{23 \times 7^2}{12^2} \mu^2 + \dots$$

具体解法较繁,在这里不谈,可参看其它书籍<sup>1)</sup>.

上面一共得到五个特解,都是相对于 $P_1, P_2$ 为固定点, $L_1, L_2, L_3$ 与 $P_1, P_2$ 在同一直线上,叫做直线解.这五个解统称为平动解,相应的五个点称为平动点.

3. 根据(4.127)式,零速度面的方程为

$$2U = C,$$

故此曲面上任一点的法线方向余弦同

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

成比例.对平动点来说,正好满足关系:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

因此在平动点处,法线方向不确定.故平动点为零速度面上的奇点.

零速度面是空间曲面,平面图上不好绘出来,但五个平动点都在 $xy$ 平面上,故讨论零速度面在 $xy$ 平面的截线,也可以

1) Moulton, F. R: Introduction to Celestial Mechanics, p. 291—293.

看出平动点在零速度面上的地位. 当  $z = 0$  时, (4.127) 式化为

$$(x^2 + y^2) + \frac{2(1 - \mu)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}} = C, \quad (4.136)$$

这是  $xy$  平面上的曲线方程, 也可以叫做零速度线. 由于  $C$  为积分常数, 故 (4.136) 式为一个曲线族. 因为左端三项都是正 ( $x, y$  在实数域中时), 则  $C$  也应取正值. 由 (4.136) 式可得, 零速度线同  $x$  轴对称.

当  $C$  的数值非常大时, 左端可能有三种情况: 一是  $(x^2 + y^2)$  非常大, 此时另外两项很小, 故 (4.136) 式的曲线是远离原点的一条近于圆形的闭曲线, 用  $S_1'$  表示; 二是第二项很大, 即  $r_1$  很小, 故 (4.136) 式又可以是一条围绕  $P_1$  点的很小的闭曲线, 记为  $S_1$ ; 三是第三项很大, 即  $r_2$  很小, 故 (4.136) 式又可以是一条围绕  $P_2$  点的一条很小的闭曲线, 也记为  $S_1$ . 也就是说, 当  $C$  非常大时, (4.136) 式表示的曲线由上述三个闭曲线组成. 当  $C$  值逐渐减小时, 外面的闭曲线逐渐缩小;  $P_1, P_2$  附近的两个小的闭曲线逐渐扩大. 当  $C$  减小到一定程度时, 里面的两个小曲线扩大到相碰, 相碰的点为自交点(奇点); 显然在该点的曲面的法线方向不确定, 即为  $L_1$ . 相碰时里面的曲线记为  $S_2$ , 外面的曲线记为  $S_2'$ . 当  $C$  继续减小到一定程度时, 里面的曲线相碰后继续扩大为一个闭曲线  $S_3$ , 同不断缩小的外面曲线  $S_3'$  相碰于  $L_2$  点. 当  $C$  继续减小, 里外两曲线变成一条闭曲线, 里面一半继续扩大, 外面一半继续缩小; 到一定程度又在  $L_3$  处自己相交, 此时曲线记为  $S_4$ . 当  $C$  继续减小, 曲线分裂为上下两半, 再继续收缩, 到一定程度时, 上下两半都收缩成为一个点, 即  $L_4, L_5$ . 见图 20.

以上是大致讨论.  $L_1, L_2, L_3$  的确切位置,  $C$  的数值, 以及曲线的具体形状, 都同  $\mu$  的数值有关. 零速度面在圆型限

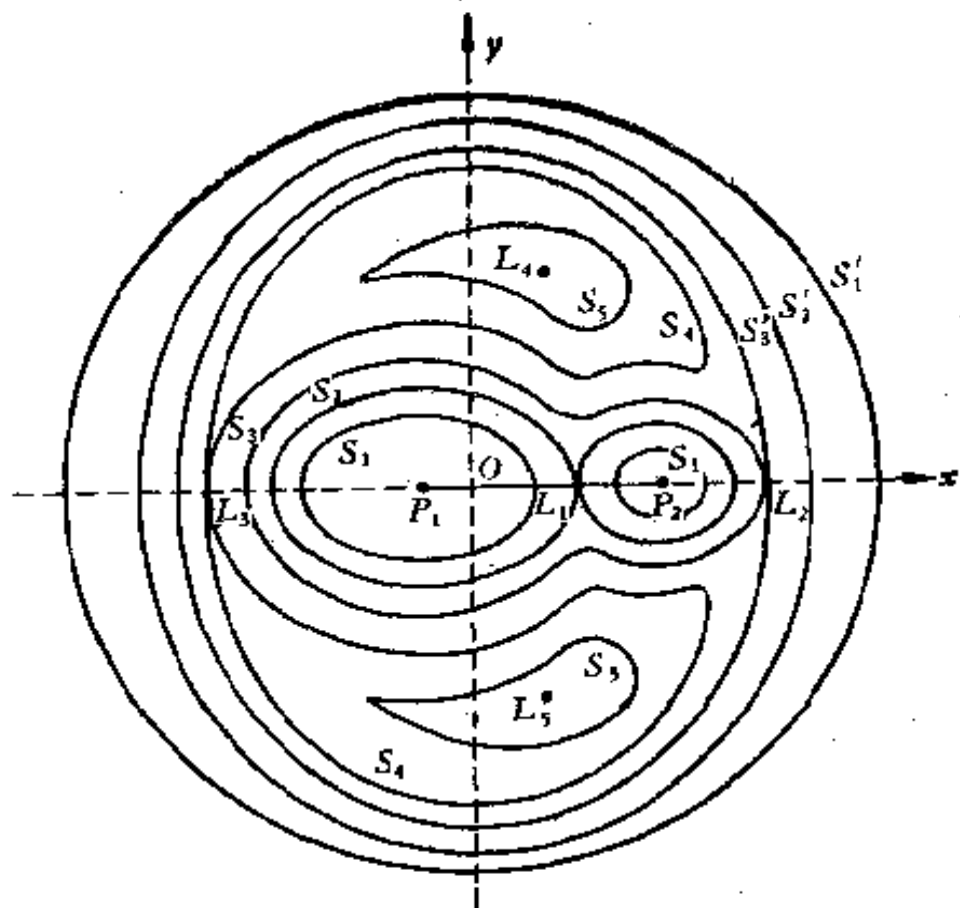


图 20

限制性三体问题的理论中占有重要地位。在有的书中，又把它叫做希耳 (Hill) 曲面。

4. 在椭圆型限制性三体问题和更一般的三体问题中，也存在等边三角形解和直线解。而且在太阳系中，已找到实际例子。脱罗央群 (Trojan) 小行星就是位于太阳、木星的等边三角形解的附近。已经发现了十五个，有九个在平动点  $L_5$  附近，有六个在平动点  $L_4$  附近。直线解的例子还不可靠，有人认为对日照就是聚结在太阳、地球的平动点  $L_2$  附近的尘埃反射太阳光形成的。

## 第五章 摄动运动方程的数值解法

第四章已介绍了摄动运动方程的分析解法，即用级数解把天体的坐标或轨道根数表示为时间  $t$  的函数。但是由于展开为偏心率  $e$ ， $e'$  和行星轨道半长径之比  $\alpha = a/a'$  以及  $\delta^2 = \sin^2 \frac{I}{2}$  ( $I$  为行星轨道间的交角) 的幂级数。因此当下列几种情况之一出现时，分析方法就效果不好，甚至不能用。(1)  $e$  或  $e'$  较大时(大于0.4的效果已不好,大于 0.6627已不能用);(2)  $\alpha$  较大时(大于 0.6 已效果不好);(3)  $I$  较大时;(4) 二行星的平均角速度  $n, n'$  接近于通约时。而在太阳系中,有不少天体符合上述情况,如彗星和部分小行星与卫星。因此,在分析方法尚未进一步完善以前,必须考虑其他方法。

早在十八世纪,就用数值方法研究过彗星的运动。十九世纪中讨论一些小行星运动时,使数值方法得到一定发展。只是由于计算工具落后,数值方法未能引起普遍重视。自二十世纪五十年代以后,由于现代高速电子计算机的发展和广泛应用,为数值方法的发展提供了物质条件。常用的天体力学实际问题,可以用数值方法来解决。因此,天体力学的数值方法,又叫做特殊摄动方法,已发展成为天体力学的一个重要分支。

本章主要介绍当前在天体力学中常用的两种方法,即科威耳(Cowell)方法和龙格-库塔(Rung-Kutta)方法。并对于天体接近碰撞时产生的困难,再介绍两种解决这种困难的变换。

## § 1 数值方法的原理, 第一科威耳方法

从第三章可知, 天体的摄动运动方程主要有两种形式: 一是以直角坐标为基本变量的二阶常微分方程组, 一种是以轨道根数为基本变量的一阶常微分方程组. 所谓天体力学的数值方法, 就是这两种类型的常微分方程组的数值解法. 在计算数学中, 数值解法很多, 这里要介绍的龙格-库塔方法就是其中的一种.

科威耳方法是针对二阶方程组(不含一阶微商), 为了计算彗星的摄动坐标, 在十九世纪已有的“外推法”基础上发展起来的. 所谓外推法, 就是从已知某些时刻的函数值, 用迭代法逐步推出以后时刻的函数值.

以直角坐标为基本变量的摄动运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

其中摄动函数  $R$  也是直角坐标的函数, 里面包含的摄动行星坐标  $(x', y', z')$  可用与 (5.1) 式相同的方程组表出, 同 (5.1) 式一起联立解. 故三体问题共有六个二阶方程. 如讨论多体问题, 则只要摄动函数的项数增加, 相应的方程数目增加就行了.

用一个方程就可以说明方法的原理. 设为  $x$ , 方程可仿照 (5.1) 式形式记为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(x), \quad (5.2)$$

而  $x$  是时间  $t$  的函数, 记为

$$x = f(t). \quad (5.3)$$

设  $t = a$  为初始时刻, 用  $w$  表示时间间隔的单位, 又叫步长. 下面就讨论时间  $t$  按  $w$  作等间距变化时, 从  $x_0 = f(a)$ , 计算出  $x = f(t) = f(a + nw)$  的值, 其中  $n$  为任意整数.

令  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , 可根据相应的值  $f(a + nw)$  列出各次差. 同内插法一样, 定义:

$$f(a + \overline{n+1}w) - f(a + nw) = f^{(1)}\left(a + n + \frac{1}{2}w\right),$$

$$f^{(1)}\left(a + n + \frac{1}{2}w\right) - f\left(a + n - \frac{1}{2}w\right) = f^{(2)}(a + nw),$$

.....

其中  $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$  代表函数  $f$  的一次差, 二次差, 三次差, ..... 它们的关系用下表列出, 为符号简单起见, 用  $f_n^{(k)}$  表示  $f^{(k)}(a + nw)$ .

		$f_{-3}$							
	$f_{-2}^{-1}$	$f_{-2}^{-1}$	$f_{-5/2}^{(1)}$	$f_{-2}^{(2)}$					
	$f_{-1}^{-2}$	$f_{-1}^{-1}$	$f_{-3/2}^{(1)}$	$f_{-1}^{(2)}$	$f_{-3/2}^{(3)}$				
	$f_0^{-3}$	$f_0^{-1/2}$	$f_{-1/2}^{(1)}$	$f_0^{(2)}$	$f_{-1/2}^{(3)}$	$f_{-1}^{(4)}$			
	$f_1^{-2}$	$f_1^{-1}$	$f_{1/2}^{(1)}$	$f_1^{(2)}$	$f_{1/2}^{(3)}$	$f_0^{(4)}$	$f_{-1/2}^{(5)}$		
	$f_2^{-2}$	$f_{3/2}^{-1}$	$f_{3/2}^{(1)}$	$f_2^{(2)}$	$f_{3/2}^{(3)}$	$f_1^{(4)}$	$f_{1/2}^{(5)}$	$f_0^{(6)}$	
		$f_{5/2}^{-1}$	$f_{5/2}^{(1)}$						
		$f_3$							

其中  $f^{-1}, f^{-2}$  叫做一次和, 二次和. 关系与前面一样, 定义为

$$f_{1/2}^{-1} - f_{-1/2}^{-1} = f_0, \quad f_{3/2}^{-1} - f_{1/2}^{-1} = f_1, \dots$$

$$f_1^{-2} - f_0^{-2} = f_{1/2}^{-1}, \quad f_0^{-2} - f_{-1}^{-2} = f_{-1/2}^{-1}, \dots$$

由于  $f_{n+1} = f(a + nw + w)$ ,  $f_{n-1} = f(a + nw - w)$ . 故可用泰勒级数展开得

$$f_{n+1} = f_n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \left( \frac{d^m f}{dt^m} \right)_n,$$

$$f_{n-1} = f_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{w^m}{m!} \left( \frac{d^m f}{dt^m} \right)_n.$$

后面的括号外面的脚数  $n$  表示求完微商后, 令  $t = a + nw$ . 上两式相加可得

$$f_{n+1} + f_{n-1} = 2f_n + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^{2m}}{(2m)!} \left( \frac{d^{2m} f}{dt^{2m}} \right)_n.$$

根据一次差, 二次差的定义可得

$$\begin{aligned} f_n^{(2)} &= f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^{2m}}{(2m)!} \left( \frac{d^{2m} f}{dt^{2m}} \right)_n \\ &= w^2 \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right)_n + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{w^{2m}}{(2m)!} \left( \frac{d^{2m} f}{dt^{2m}} \right)_n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

由 (5.2) 式知

$$w^2 \left( \frac{d^2 f}{dt^2} \right)_n = w^2 \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_n = w^2 g[x(a + nw)] = w^2 g_n.$$

用符号

$$F_n = F(a + nw) = w^2 g_n, \quad (5.5)$$

则 (5.4) 式可写为

$$\begin{aligned} f_n^{(2)} &= F_n + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{w^{2m-2}}{(2m)!} \left( \frac{d^{2m-2} F}{dt^{2m-2}} \right)_n \\ &= F_n + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^{2m}}{(2m+2)!} \left( \frac{d^{2m} F}{dt^{2m}} \right)_n. \end{aligned} \quad (5.6)$$

函数值  $F_n$  也可同样有各次差  $F_n^{(k)}$  或  $F_n^{(k)}/k!$ . 根据斯特林 (Stirling) 内插公式可得

$$F(a + nw + sw) = F_n + sF_n^{(1)} + \frac{s^2}{2!} F_n^{(2)}$$





把  $f_n^{(2)}$  还原成原函数可得

$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= 2f_n - f_{n-1} + F_n + \varphi_n, \\
 \text{其中} \quad \varphi_n &= \frac{1}{12} F_n^{(2)} - \frac{1}{240} F_n^{(4)} + \frac{31}{60480} F_n^{(6)} \\
 &\quad - \frac{289}{3628800} F_n^{(8)} + \frac{317}{22809600} F_n^{(10)} \\
 &\quad - \frac{6803477}{2165348736000} F_n^{(12)} + \dots
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.10)式就是第一科威耳方法的基本公式。可从已知的  $f_n, f_{n-1}$  外推出  $f_{n+1}$ ，其中  $\varphi_n$  包含有  $F$  的各次差值，要用迭代法逐步求出。具体计算步骤将在下节讲述。

## § 2 第二科威耳方法

1910年，科威耳和其他工作者在研究哈雷彗星的运动时，对上述方法又作了修改，引入了二次和，可少用二次差，就是第二科威耳方法。根据上节第一科威耳方法的基本公式知

$$f_k^{(2)} = F_k + \frac{1}{12} F_k^{(2)} - \frac{1}{240} F_k^{(4)} + \frac{31}{60480} F_k^{(6)} - \dots \tag{5.11}$$

由各次和差之间的关系可知

$$F_k^{(2m)} = F_{k+1/2}^{(2m-1)} - F_{k-1/2}^{(2m-1)}. \tag{5.12}$$

求和可得

$$\sum_{k=0}^p F_k^{(2m)} = F_{p+1/2}^{(2m-1)} - F_{-1/2}^{(2m-1)} = F_{p+1}^{(2m-2)} - F_p^{(2m-2)} - F_{-1/2}^{(2m-1)}.$$

再对  $p$  求和可得

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p F_k^{(2m)} = F_n^{(2m-2)} - F_0^{(2m-2)} - n F_{-1/2}^{(2m-1)}. \tag{5.13}$$

因此，利用关系式(5.13)把(5.11)式的每一项都照上面

这样取两次求和则得

$$\begin{aligned}
 f_n - f_0 - n f_{-1/2} &= F_n^{-2} - F_0^{-2} - n F_{-1/2}^{-1} \\
 &+ \frac{1}{12} [F_n - F_0 - n F_{-1/2}^{(1)}] \\
 &- \frac{1}{240} [F_n^{(2)} - F_0^{(2)} - n F_{-1/2}^{(2)}] \\
 &+ \frac{31}{60480} [F_n^{(4)} - F_0^{(4)} - n F_{-1/2}^{(4)}] - \dots \dots \dots (5.14)
 \end{aligned}$$

其中  $F_n^{-2}$ ,  $F_n^{-1}$  表示二次和, 一次和的值, 从一次和值同函数值之间的关系可知, 一次和值中有一个可以任意取, 对函数值没有影响. 因为函数值为已知, 函数值只表为两个一次和值之差. 同理, 二次和值中也有一个可以任意取, 对一次和值没有影响. 为公式简单起见, 取

$$F_{-1/2}^{-1} = f_{-1/2} - \frac{1}{12} F_{-1/2}^{(1)} + \frac{1}{240} F_{-1/2}^{(3)} - \frac{31}{60480} F_{-1/2}^{(5)} + \dots \quad (5.15)$$

$$F_0^{-2} = f_0 - \frac{1}{12} F_0 + \frac{1}{240} F_0^{(2)} - \frac{31}{60480} F_0^{(4)} + \dots \quad (5.16)$$

因此, (5.14) 式就化为 (写出到  $F_n^{(10)}$  的项)

$$\begin{aligned}
 f_n &= F_n^{-2} + \frac{1}{12} F_n - \frac{1}{240} F_n^{(2)} + \frac{31}{60480} F_n^{(4)} \\
 &- \frac{289}{3628800} F_n^{(6)} + \frac{317}{22809600} F_n^{(8)} \\
 &- \frac{6803477}{2615348736000} F_n^{(10)} + \dots \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

(5.17) 式就是第二科威耳方法的基本公式. 其中二次和及一次和的初值由 (5.15), (5.16) 式决定, 不再有任何任意性了. 但 (5.16) 式就是 (5.17) 式中  $n = 0$  的情况, 故一般不单独列出.

根据最近几年来的实践, (5.17) 式中的函数差分  $F_n^{(k)}$  最

好用函数值  $F_n$  等代替,以便减少电子计算机内的储存量。根据差分的定义可得

$$\left. \begin{aligned} F_n^{(3)} &= F_{n+1} - 2F_n + F_{n-1}, \\ F_n^{(4)} &= F_{n+2} - 4F_{n+1} + 6F_n - 4F_{n-1} + F_{n-2}. \end{aligned} \right\} (5.18)$$

如果用 (5.17) 式计算时忽略六次差(在天体力学中一般问题已足够了),即可得

$$\begin{aligned} F_n^{(6)} &= F_{n+3} - 6F_{n+2} + 15F_{n+1} - 20F_n \\ &\quad + 15F_{n-1} - 6F_{n-2} + F_{n-3} = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

(5.19) 式就给出一个相邻七个函数值之间的一个关系式,利用它可以从连续六个函数值,向前或向后推出另一个函数值。如要保留六次差,忽略八次差,则根据  $F_n^{(8)} = 0$  可得连续九个函数值之间的关系。由此可类推下去。

如忽略六次差,用 (5.18) 式代入 (5.17) 式可得第二科威耳方法的基本公式为

$$\begin{aligned} f_n &= F_n^{-2} + \frac{1}{60480} [31F_{n+2} - 376F_{n+1} + 5730F_n \\ &\quad - 376F_{n-1} + 31F_{n-2}]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

为了便于外推,可利用关系 (5.19),把 (5.20) 式中  $F_{n+2}$ ,  $F_{n+1}$  化为  $F_n, F_{n-1}, \dots$  的式子,即得

$$\begin{aligned} f_n &= F_n^{-2} + \frac{1}{60480} [4125F_n + 3094F_{n-1} - 4234F_{n-2} \\ &\quad + 3036F_{n-3} - 1171F_{n-4} + 190F_{n-5}]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

甚至还可以把其中的  $F_n$  化为  $F_{n-1}, F_{n-2}, \dots$  即

$$\begin{aligned} f_n &= F_n^{-2} + \frac{1}{60480} [27844F_{n-1} - 66109F_{n-2} + 85536F_{n-3} \\ &\quad - 63046F_{n-4} + 24940F_{n-5} - 4125F_{n-6}]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

对于二次和  $F_n^{-2}$ , 根据定义也可得关系:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= F_{n+1}^{-2} - 2F_n^{-2} + F_{n-1}^{-2}, \\ F_{n+1}^{-2} &= 2F_n^{-2} - F_{n-1}^{-2} + F_n. \end{aligned} \right\} (5.23)$$

由此可从  $F_n^{-2}$ ,  $F_{n\pm 1}^{-2}$  外推出  $F_{n\pm 2}^{-2}$ 。

具体计算步骤如下:如已知  $n = 0, 1$  时的坐标值  $f_0, f_1$  (表示  $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ ), 可用它们算出初轨, 用二体问题公式算出近似值  $f_{-1}, f_{\pm 2}, f_{\pm 3}$ 。再由 (5.5) 式算出相应的近似值  $F_0, F_{\pm 1}, F_{\pm 2}, F_{\pm 3}$ 。其中  $F_0, F_1$  为准确值。对于这七个初值, 相应的 (5.20) 式可写为

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= F_0^{-2} + \frac{1}{60480} [31F_2 - 376F_1 + 5730F_0 \\ &\quad - 376F_{-1} + 31F_{-2}], \\ f_{\pm 1} &= F_{\pm 1}^{-2} + \frac{1}{60480} [31F_{\pm 3} - 376F_{\pm 2} \\ &\quad + 5730F_{\pm 1} - 376F_0 + 31F_{\mp 1}], \\ f_{\pm 2} &= F_{\pm 2}^{-2} + \frac{1}{60480} [-190F_{\pm 3} + 5265F_{\pm 2} \\ &\quad + 244F_{\pm 1} - 434F_0 + 186F_{\mp 1} - 31F_{\mp 2}], \\ f_{\pm 3} &= F_{\pm 3}^{-2} + \frac{1}{60480} [4125F_{\pm 3} + 3094F_{\pm 2} \\ &\quad - 4234F_{\pm 1} + 3036F_0 \\ &\quad - 1171F_{\mp 1} + 190F_{\mp 2}]. \end{aligned} \right\} (5.24)$$

其中  $f_{\pm 2}, f_{\pm 3}$  式内原有  $F_{\pm 4}, F_{\pm 5}$  都已用关系 (5.19) 化为  $F_{\pm 3}, F_{\pm 2}, F_{\pm 1}, F_0$  了。然后通过下面两个步骤进行迭代:

(1) 用 (5.24) 式的前两式, 根据  $f_0, f_{\pm 1}$  和  $F_0, F_{\pm 1}, F_{\pm 2}, F_{\pm 3}$  的近似值算出二次和  $F_0^{-2}, F_1^{-2}$  的近似值, 再用 (5.23) 式外推出全部七个二次和  $F_n^{-2} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$ 。

(2) 用所得的七个函数值  $F_n$  及二次和  $F_n^{-2}$  代入 (5.24) 式重新算出七个坐标  $f_n$  (其中  $f_0, f_1$  不变), 再用 (5.5) 式算出相应的  $F_n$  (其中  $F_0, F_1$  不变)。

重复迭代 (1), (2) 两步, 直到新求出的七个坐标值  $f_n$  与上一次的相同为止 (在所要求的精度范围内)。相应的  $F_n, F_n^{-2}$

也认为是准确的了。

用上面得到的初值很容易外推下去。先在(5.23)式中，令  $n = 3$ ，可由  $F_3^{-2}$ ， $F_2^{-2}$ ， $F_3$  推出  $F_4^{-2}$ ，代入(5.22)式(令  $n = 4$ )可算出  $f_4$ 。再代入(5.5)式求出  $F_4$ ；再代入(5.22)式(令  $n = 4$ )重新算出  $f_4$ 。如与前面不同，再迭代下去直到相同为止。同样可继续推下去求出  $f_5, f_6, \dots$  直到所需时刻为止。

关于步长的选取问题，要根据所要求的精度和公式中取到几次差而定。在同一精度要求下，公式中所取差值次数愈高，则步长可取长一些，反之要短些。一般是先固定取几次差，取步长为  $w$ ， $w/2$  试验，如计算结果相同，则取步长为  $w$ ；若不相同，则取  $w/4$  试验，若与  $w/2$  的结果相同，则取步长为  $w/2$ 。步长大小也不能完全固定，若变量变化快，则步长应取短些(如在近日点或近地点附近运动)；反之取长些。所谓长短是相对于天体运动周期而言。如现用的五个外行星(木，土，天，海，冥)的坐标表，是用第二科威耳方法，准到八次差，步长取为 40 平太阳日，约为木星公转周期的百分之一。如计算人造地球卫星的摄动坐标，因为它运动快，周期短，步长也要短得多(一般都取到百分之一或几百分之一周期)。

数值解法中的累计误差问题必须认真对待。计算次数愈多，累计误差愈大。到现在还没有可靠的结果。有的研究结果表明<sup>1)</sup>，由于舍入误差累计的误差约为  $0.11 N^{3/2} \epsilon$ 。其中  $N$  为所计算的步数， $\epsilon$  为每一步的误差。从这个结果可看出，若用步长为周期的百分之一，则算一百个周期后，步数  $N = 10^4$ ，故累计误差可达  $10^5$  量级。对大多数人造卫星而言，一百个周期只有几天。因此，用科威耳方法计算较长(相对于运动周

1) 参看 Мячин, В. Ф.: Бюлл. ИГА., 8. № 8, 1962.

期)时间的情况,结果还不可靠,有待继续研究.

### § 3 龙格-库塔方法

对于一阶常微分方程组,例如用轨道根数为基本变量的摄动运动方程和正则方程组,常用龙格-库塔方法进行数值解.上面讲的二阶方程组在引入速度分量作为变量后,也可化为一阶方程组.仍可用龙格-库塔方法来解.

在说明方法原理时,用一个方程就行了;计算时要所有方程一起进行.设方程的形式为

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (5.25)$$

步长为 $w$ ;  $t_n = t_0 + nw$ ,  $t_{n+1} = t_0 + (n+1)w$ 为第 $n$ 步和第 $n+1$ 步的时刻.(5.25)式在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 进行积分得

$$x_{n+1} - x_n = x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x, t) dt.$$

上式右端是一个定积分,根据数值积分方法的原理,上面积分值可以表为

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (t_{n+1} - t_n) \sum_{i=0}^k a_i K_i + O(w^l) \\ &= w \sum_{i=0}^k a_i K_i + O(w^l). \end{aligned} \quad (5.26)$$

其中 $K_i$ 为 $f(x, t)$ 在区间 $[t_n, t_{n+1}]$ 内某些点的值; $a_i$ 为待定常数; $O(w^l)$ 表示只取前面几项时的误差是 $w^l$ 的数量级.先讨论 $k=3$ 的情况,(5.26)式成为

$$x_{n+1} - x_n = w[a_0 K_0 + a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3] + O(w^l). \quad (5.27)$$

$K_i$ 的值取作  $t_0 = t_n$ ,  $t_1 = t_n + mw$ ,  $t_2 = t_n + qw$ ,  $t_3 = t_n + lw$

时的值,其中  $m, q, l$  为小于 1 的正数,为待定常数. 相应的  $x_i$  取作

$$\begin{aligned}x_0 &= x_n, & x_1 &= x_n + mwK_0, \\x_2 &= x_n + (q-p)wK_0 + pwK_1, \\x_3 &= x_n + (l-s-r)wK_0 + swK_1 + rwK_2.\end{aligned}$$

其中  $p, s, r$  也是待定常数,于是有

$$\left. \begin{aligned}K_0 &= f[x_n, t_n], \\K_1 &= f[x_n + mwK_0, t_n + mw], \\K_2 &= f[x_n + (q-p)wK_0 + pwK_1, t_n + qw], \\K_3 &= f[x_n + (l-s-r)wK_0 + swK_1 + rwK_2, t_n + lw].\end{aligned} \right\} (5.28)$$

代入(5.27)式,两端按泰勒级数展开,其中

$$x_{n+1} = x(t_{n+1}) = x(t_n + w),$$

可按泰勒级数展开为

$$x_{n+1} = x_n + w \left( \frac{dx}{dt} \right)_n + \frac{w^2}{2!} \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_n + \dots$$

而用(5.25)式,  $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ . (5.27)式右端各  $K_i$  按泰勒级数展开后,同左端展开式比较  $w$  的同次幂系数,如只比较到  $w^4$  为止,则有下列关系:

$$\left. \begin{aligned}a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1, \\a_1m + a_2q + a_3l &= \frac{1}{2}, \\a_1m^2 + a_2q^2 + a_3l^2 &= \frac{1}{3}, \\a_1m^3 + a_2q^3 + a_3l^3 &= \frac{1}{4}, \\a_2mp + a_3(qr + ms) &= \frac{1}{6}, \\a_2mpq + a_3l(qr + ms) &= \frac{1}{8},\end{aligned} \right\} (5.29)$$



$$\left. \begin{aligned} a_2 m^2 p + a_3 (q^2 r + m^2 s) &= \frac{1}{12}, \\ a_3 m p r &= \frac{1}{24}. \end{aligned} \right\}$$

(5.29) 式共 8 个方程, 但有十个未知量, 故有无穷多组解. 但只要满足(5.29)式的解都可以符合要求. 选择其中最简单的一组解为

$$a_0 = \frac{1}{6}, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{6},$$

$$m = p = q = \frac{1}{2}, \quad s = 0, \quad l = r = 1.$$

于是得到了准到  $w^4$  的结果为

$$x_{n+1} = x_n + \frac{w}{6} (K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3) + O(w^5),$$

其中

$$K_0 = f(x_n, t_n),$$

$$K_1 = f\left(x_n + \frac{w}{2} K_0, t_n + \frac{1}{2} w\right),$$

$$K_2 = f\left(x_n + \frac{w}{2} K_1, t_n + \frac{1}{2} w\right),$$

$$K_3 = f(x_n + w K_2, t_n + w).$$

(5.30)

这就是准到  $w^4$  的龙格-库塔方法的公式. 用同样方法可得出准到  $w^5$  的公式如下(不再推导):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{w}{192} [23K_0 + 125K_2 - 81K_4 + 125K_5] + O(w^6),$$

其中

$$K_0 = f(x_n, t_n),$$

$$K_1 = f\left(x_n + \frac{w}{3} K_0, t_n + \frac{1}{3} w\right),$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_2 &= f \left[ x_n + \frac{\omega}{25} (6K_1 + 4K_0), t_n + \frac{2}{5} \omega \right], \\
 K_3 &= f \left[ x_n + \frac{\omega}{4} (15K_2 - 12K_1 + K_0), t_n + \omega \right], \\
 K_4 &= f \left[ x_n + \frac{\omega}{81} (8K_3 - 50K_2 + 90K_1 \right. \\
 &\quad \left. + 6K_0), t_n + \frac{2}{3} \omega \right], \\
 K_5 &= f \left[ x_n + \frac{\omega}{75} (8K_3 + 10K_2 + 36K_1 \right. \\
 &\quad \left. + 6K_0), t_n + \frac{4}{5} \omega \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

如有需要,还可以推出准到  $\omega^6$  或更高次幂的公式。但在天体力学实际运用中,一般用(5.30)或(5.31)式就够了;而根据所要求的精度情况,对步长  $\omega$  的大小进行选择。

用龙格-库塔方法具有下列优点:

1. 可直接从已知的  $x_n$  算出  $x_{n+1}$  的准确值,不需要迭代。
2. 在电子计算机上进行计算时,程序简单,存贮量小。
3. 在机上可根据函数值的变化情况,自动地改变步长。
4. 方法是稳定的。

但在天体力学中,遇到二阶方程组的情况仍常用科威耳方法,尽管迭代次数多,但精度较高,并能适合二阶方程组的特点。

#### § 4 恩克变换和梯勒变换

用数值方法解决实际问题的过程中,当函数值变化较快时,可用变换步长来解决。但有时会碰到一些特殊情况,例如一些彗星在近日点附近时,非常接近太阳(有的几乎要碰到

太阳表面)。此时坐标  $(x, y, z)$  变化得非常快,  $r$  非常小, 实际上, 从摄动方程 (5.1) 可看出:  $r = 0$  时, 方程右端为无穷大, 即  $r = 0$  是摄动运动方程的一个奇点。这种奇点, 在天体力学上叫做碰撞奇点。怎样消除或减轻天体在奇点附近的影响, 就成为数值方法中的一个重要问题。本节就是讲两种解决这个问题方法。

1. 恩克 (Encke) 变换。从直角坐标的摄动运动方程出发, 即

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{\mu x}{r^3} + Gm' \left( \frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right). \quad (5.32)$$

$y, z$  的式子相同。其中摄动函数只写出一个摄动行星的式子, 如不止一个摄动行星, 则增加类似的项就行了;

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

在方程中可以看出, 当  $r$  非常小时, 方程右端会非常大。恩克在讨论彗星运动时, 提出一种办法, 就是不直接计算摄动坐标  $(x, y, z)$ , 而是计算坐标的摄动值  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 即

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0, \quad \zeta = z - z_0, \quad (5.33)$$

其中  $(x_0, y_0, z_0)$  为无摄动坐标, 由方程

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{\mu x_0}{r_0^3}, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = -\frac{\mu y_0}{r_0^3}, \quad \frac{d^2z_0}{dt^2} = -\frac{\mu z_0}{r_0^3} \quad (5.34)$$

所决定,  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ 。计算  $x_0, y_0, z_0$  时不是用 (5.34) 式进行数值解法, 而是用初值定出轨道根数, 再用二体问题中从轨道根数计算直角坐标的公式, 算出各时刻  $t_n = t_0 + n\omega$  的坐标  $x_0, y_0, z_0$ 。

由 (5.32), (5.33) 式可得

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_0}{dt^2} = Gm' \left( \frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) + \mu \left( \frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right). \quad (5.35)$$

$y, z$  的式子相同。由于

$$\frac{x_0}{r^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{x - \xi}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \left[ x \left( 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) - \xi \right], \quad (5.36)$$

但

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2 \\ &= r_0^2 + 2 \left[ \left( x_0 + \frac{1}{2} \xi \right) \xi + \left( y_0 + \frac{1}{2} \eta \right) \eta \right. \\ &\quad \left. + \left( z_0 + \frac{1}{2} \zeta \right) \zeta \right], \end{aligned}$$

故可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{r^2}{r_0^2} &= 1 + 2q, \\ \text{其中} \quad q &= \frac{1}{r_0^2} \left[ \left( x_0 + \frac{1}{2} \xi \right) \xi + \left( y_0 + \frac{1}{2} \eta \right) \eta \right. \\ &\quad \left. + \left( z_0 + \frac{1}{2} \zeta \right) \zeta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

因此,

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_0^3}{r^3} &= (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{2!} q^2 \\ &\quad - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3!} q^3 + \dots = 1 - fq, \\ \text{其中} \quad f &= 3 - \frac{3 \cdot 5}{2!} q + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3!} q^2 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

因此,用(5.36),(5.38)式可把(5.35)式化为下面形式:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = Gm' \left( \frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r^3} \right) + \frac{\mu}{r_0^3} (fqx - \xi). \quad (5.39)$$

$\eta, \zeta$  的式子相同。里面的  $x, y, z$  再改为  $x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta$ 。这样的(5.39)式就是恩克变换的基本公式。由于  $q,$

$\xi$  (包括  $\eta, \zeta$ ) 都是与摄动行星质量  $m'$  同数量级, 故虽然有  $r_0^3$  作为分母, 影响会减小, 步长可取大些. 在  $r$  不太小时, 也可以用 (5.39) 式作数值解法的摄动运动方程, 所用步长比不作恩克变换时要大些.

方程中还有两个距离  $\Delta$  和  $r'$ , 由于前面已有因子  $m'$ , 故当  $\Delta, r'$  很小时, 影响不大.

2. 梯勒 (Thiele) 变换. 当  $r$  很小时, 用恩克变换只能减轻影响, 并不能消除  $r = 0$  这个奇点. 以后有不少人考虑消除这种奇点的办法. 但到目前为止, 只是对平面圆型限制性三体问题的运动方程, 找到了一些变换, 可以消除这种奇点. 梯勒变换就是其中用得较多的一种.

在第四章 § 7 中已讨论了圆型限制性三体问题. 如果小天体的初始位置和速度都在有限体所在的平面内, 就成为平面圆型限制性三体问题, 它是三体问题中最简单的一种情况. 在公式 (4.125) 中, 令  $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$ , 即得平面圆型限制性三体问题的方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{y} - x &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ V &= \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

其中

如用广义坐标的拉格朗日方程表示, 则为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } T &= \frac{1}{2}(\dot{x} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} + \dot{x})^2 \\
 &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\
 &= T_2 + T_1 + T_0.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

雅可比积分可表为

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V + h, \\
 \text{即 } T_2 &= T_0 + V + h.
 \end{aligned} \right\} \tag{5.43}$$

现在取一组新坐标  $(u, v)$  代替  $(x, y)$ , 定义为

$$\left. \begin{aligned}
 x + \sqrt{-1}y &= \frac{1}{2} - \mu + \frac{1}{2}\cos(u + \sqrt{-1}v), \\
 \text{即 } x &= \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \frac{1}{2}\cos u \cos hv, \\
 y &= -\frac{1}{2}\sin u \sin hv.
 \end{aligned} \right\} \tag{5.44}$$

此式是新旧变量之间的一个变换, 就是梯勒变换. 如用  $(u, v)$  作广义坐标, 则拉格朗日方程形式不变, 仍为

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} &= \frac{\partial V}{\partial u}, \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial T}{\partial v} &= \frac{\partial V}{\partial v}.
 \end{aligned} \right\} \tag{5.45}$$

由 (5.44) 式可得

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{5.46}$$

因此变换 (5.44) 式的雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} (\sin^2 u \cos h^2 v + \cos^2 u \sin h^2 v) \\
&= \frac{1}{4} (\cos h^2 v - \cos^2 u) \\
&= \frac{1}{8} (\cos h 2v - \cos 2u). \tag{5.47}
\end{aligned}$$

并有关系:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} = \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} - \frac{\partial y}{\partial u} \dot{v}, \\
\dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} = \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} - \frac{\partial x}{\partial u} \dot{v}.
\end{aligned}$$

故相应的

$$\left. \begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2} J(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \\
T_1 &= \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \dot{u} + \left( x \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial x}{\partial v} \right) \dot{v}, \\
T_0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \mu \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \mu \right) \cos u \cos h v \\
&\quad + \frac{1}{16} (\cos h 2v + \cos 2u).
\end{aligned} \right\} \tag{5.48}$$

由于  $T_0$  不包含  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$ , 故 (5.45) 式可写为

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial u} \\
= \frac{\partial T_2}{\partial u} + \frac{\partial T_0}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial u}, \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{v}} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial v} \\
= \frac{\partial T_2}{\partial v} + \frac{\partial T_0}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial v}.
\end{aligned} \right\} \tag{5.49}$$

但从 (5.48) 式可得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{u}} \right) &= \frac{d}{dt} (J\dot{u}), \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial u} &= \frac{d}{dt} \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial u} \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \dot{u} - \frac{\partial}{\partial u} \left( x \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial x}{\partial v} \right) \dot{v} \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \dot{u} + \frac{\partial}{\partial v} \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \dot{v} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial u} \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) \dot{u} - \frac{\partial}{\partial u} \left( x \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial x}{\partial v} \right) \dot{v} \\
&= \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( x \frac{\partial y}{\partial u} - y \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left( x \frac{\partial y}{\partial v} - y \frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] \dot{v} \\
&= \left[ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \dot{v} \\
&= -2J\dot{v}.
\end{aligned}$$

又由 (5.48) 式和 (5.43) 式可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_2}{\partial u} + \frac{\partial T_0}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial u} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) \\
+ \frac{\partial}{\partial u} (T_0 + V) &= \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial u} (T_0 + V + h) \\
+ \frac{\partial}{\partial u} (T_0 + V + h) &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial u} [J(T_0 + V + h)].
\end{aligned}$$

上面三式代入 (5.49) 式的第一式得

$$\frac{d}{dt} (J\dot{u}) - 2J\dot{v} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial u} [J(T_0 + V + h)],$$

同理

$$\frac{d}{dt} (J\dot{v}) + 2J\dot{u} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial v} [J(T_0 + V + h)].$$

若定义

$$dt = Jd\tau, \tag{5.50}$$



$$\Omega = J(T_0 + V + h), \quad (5.51)$$

则上式可化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} - 2J \frac{dv}{d\tau} &= \frac{\partial \Omega}{\partial u}, \\ \frac{d^2 v}{d\tau^2} + 2J \frac{du}{d\tau} &= \frac{\partial \Omega}{\partial v}. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

(5.52) 式就是用梯勒变换后得到的平面圆型限制性三体问题的方程。相应的雅可比积分为

$$\left( \frac{du}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dv}{d\tau} \right)^2 = 2\Omega. \quad (5.53)$$

(5.50) 式也是梯勒变换的一部分，是自变量的一种变换。(5.52) 式就不再有相当于  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 0$  的奇点了。因为由变换 (5.44) 式可得

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos u \cosh v \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \sin u \sin hv \right)^2 = \frac{1}{4} (\cosh v + \cos u)^2, \\ r_2^2 &= (x - 1 + \mu)^2 + y^2 = \frac{1}{4} (\cosh v - \cos u)^2. \end{aligned}$$

因此可得

$$V = \frac{1 - \mu}{\cosh v + \cos u} + \frac{\mu}{\cosh v - \cos u},$$

连同 (5.48) 式中的  $T_0$  和 (5.47) 式中的  $J$ ，代入 (5.51) 式后得

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} (1 - \mu) (\cosh v - \cos u) + \frac{1}{2} \mu (\cosh v + \cos u) \\ &\quad + \frac{1}{32} \left( \frac{1}{2} - \mu \right) (\cosh 3v \cos u - \cosh v \cos 3u) \\ &\quad + \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \mu \right)^2 + h \right] (\cosh 2v - \cos 2u) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{256} (\cos h4v - \cos 4u), \quad (5.54)$$

故用(5.54)式的 $Q$ 代入方程(5.52)式中,可看出(5.52)式不再有奇点.也就是说,碰撞奇点消去了,而且小天体同二有限体可能碰撞的两个奇点 $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 0$ 都消去了.此时(5.50)式成为

$$dt = Jd\tau = \frac{1}{4} (\cos h^2v - \cos^2u) d\tau = r_1 r_2 d\tau,$$

因此

$$t = \int r_1 r_2 d\tau = \int \frac{1}{4} (\cos h^2v - \cos^2u) d\tau. \quad (5.55)$$

于是可用 $\tau$ 作自变量,对(5.52)式进行数值解法.相应的时刻 $t$ 要用(5.55)式进行数值积分得出.

梯勒变换提出后,在研究平面圆型限制性三体问题中得到了广泛的应用.五十年代以后,又在月球火箭的近似理论中得到应用.由于变换是用超越函数表示,为进一步深入讨论和更广泛应用造成一定困难.近年来,有不少人正在研究一些其他变换,不仅使碰撞奇点能够消除,而且还使变换后的方程更简单.这样的变换就不仅用于数值方法,也可以用于分析解法.这种类型的变换叫做正规化变换,即通过变换使摄动运动方程的奇点正规化(变成正规点).用正规化变换研究天体力学中的微分方程,是今后天体力学发展中的一个重要课题.

## 第六章 地球的自转理论

在球面天文学和天体测量学中,讲述了岁差、章动和地极移动等现象,以及它们对确定天体视位置的影响。产生这些现象的原因是地球自己的自转运动。本章就是从力学上讨论地球的自转运动理论,从而阐明岁差、章动、地极移动等天文现象的力学原理,为进一步研究地球自转打下基础。

以前几章都是讨论天体作为一个质点(质量集中于质量中心)在空间的运动(又叫做移动)。而天体有一定的大小、形状和密度分布规律。天体除了质量中心在空间的运动外,还有绕自己质量中心的转动,也就是自转。本章通过讨论地球这个具体天体的自转,从而给出了天体自转理论的一个例子。

这里所讨论的地球自转理论,是假定地球作为刚体,即地球中任意两点之间的距离不变。本章以理论力学中的刚体动力学为基础,建立起地球的自转理论。

### § 1 地球对外面一质点吸引的力函数

根据对地球的实际考察,地球的质量分布对称于三个相互垂直的平面,其中之一接近于赤道面;地球形状是接近于旋转椭球体,赤道半径比极半径大些。在这样的前提下,再把地球看成刚体,讨论它对外一点的引力。这里就不是把地球看成质点了,而是讨论具有一定大小、形状和密度分布的天体对较近一质点的吸引。下面先把对地球的假设变成数学式子。

取地球质量中心 $O$ 为原点,并为讨论简单起见,取中心惯

性主轴(即对质量中心  $O$ ) 为坐标轴, 记为  $x, y, z$  轴. 从刚体动力学可知, 由于假定地球质量分布有三个相互垂直的对称面, 这三个面的三个交线(也是相互垂直的)是对称轴, 而且这三个对称轴就是中心惯性主轴. 因此, 取三个中心惯性主轴为坐标轴, 则三个对称面就是坐标面. 取接近于赤道面的那个对称面为  $xy$  平面, 取接近于北极方向的轴为  $z$  轴;  $x, y, z$  轴成右手系. 这样的坐标系是固定在地球体上的.

在这样的条件下, 若  $P$  为地球体内任意一质点, 坐标为  $(x, y, z)$ , 质量为  $dm$ . 则根据对称关系, 有下列结果 ( $dm$  即  $\sigma dx dy dz$ ,  $\sigma$  为密度函数):

$$\iiint x dm = \iiint y dm = \iiint z dm = 0, \quad (6.1)$$

$$\iiint yz dm = \iiint zx dm = \iiint xy dm = 0, \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \iiint x^3 dm &= \iiint x^2 y dm = \iiint x^2 z dm = 0, \\ \iiint y^3 dm &= \iiint y^2 x dm = \iiint y^2 z dm = 0, \\ \iiint z^3 dm &= \iiint z^2 x dm = \iiint z^2 y dm = 0. \end{aligned} \right\} (6.3)$$

其中每个三重积分都是对整个地球体的体积积分. 其实, 被积函数只要有  $x, y, z$  中任一奇函数因子, 体积积分都等于 0.

再用  $A, B, C$  表示地球的三个主惯性矩(对于质量中心  $O$ ), 即

$$\left. \begin{aligned} A &= \iiint (y^2 + z^2) dm, \\ B &= \iiint (z^2 + x^2) dm, \\ C &= \iiint (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \right\} (6.4)$$

设  $Q$  为另一天体, 看作质点; 设距离  $OQ = \rho$ ,  $OP = r$ ,  $PQ = \Delta$ ; 用  $\theta$  表示  $OP$  同  $OQ$  之间的交角. 再设  $OQ$  在这个坐标系中的方向余弦为  $(l, m, n)$ ,  $P$  点的坐标为  $(x, y, z)$ . 若再取一坐标系: 仍以  $O$  为原点, 以  $OQ$  为坐标轴  $\xi$  的方向; 以通过  $O$  点垂直于  $\xi$  轴的平面为  $\eta\zeta$  平面, 由于后面不需要  $\eta, \zeta$  轴的方向, 故这里不具体定义. 在这个坐标系中, 设  $P$  的坐标为  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 则有关系:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos \theta = lx + my + nz, \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

故有关系:

$$\Delta^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \theta = \rho^2 + r^2 - 2\rho\xi.$$

地球对  $Q$  吸引 (按万有引力定律) 的力函数, 为地球内每一质点对  $Q$  的吸引的力函数的总和. 设天体  $Q$  的质量为  $M$ , 则力函数  $U$  为

$$U = GM \iiint \frac{dm}{\Delta}. \quad (6.6)$$

这里主要讨论其他天体的吸引对地球自转的影响. 月球是最近的一个天体, 以月球为例, 则  $\rho$  比  $r$  大得多 ( $\rho > 60r$ ). 故  $r/\rho$  可以看作小量, 因此用 (6.5) 式有

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \rho^2 \left( 1 - \frac{2\rho\xi - r^2}{\rho^2} \right), \\ \frac{1}{\Delta} &= \rho^{-1} \left( 1 - \frac{2\rho\xi - r^2}{\rho^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \rho^{-1} \left[ 1 + \frac{\xi}{\rho} + \frac{3\xi^2 - r^2}{2\rho^2} + \frac{5\xi^3 - 3\xi r^2}{2\rho^3} \right. \\ &\quad \left. + \dots \dots \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

代入 (6.6) 式, 由于  $\rho$  同积分无关, 故可整理为下面形式:

$$U = \frac{GM}{\rho} \left[ x_0 + \frac{x_1}{\rho} + \frac{x_2}{2\rho^2} + \frac{x_3}{2\rho^3} + \dots \right]. \quad (6.8)$$

其中

$$x_0 = \iiint dm = E \text{ (地球总质量)}. \quad (6.9)$$

利用关系 (6.5) 和 (6.1) 式得

$$x_1 = \iiint \xi dm = \iiint (lx + my + nz) dm = 0. \quad (6.10)$$

又从 (6.5) 式可得

$$\begin{aligned} x_2 &= \iiint (3\xi^2 - r^2) dm = \iiint (2r^2 - 3\eta^2 - 3\zeta^2) dm \\ &= \iiint [(y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) + (x^2 + y^2)] dm \\ &\quad - 3 \iiint (\eta^2 + \zeta^2) dm. \end{aligned}$$

设  $I$  为地球对  $OQ$  轴的转动惯量, 上式后面的那个积分就是  $I$ . 再用 (6.4) 式可得

$$x_2 = A + B + C - 3I. \quad (6.11)$$

再利用关系 (6.5) 可得

$$\begin{aligned} x_3 &= \iiint (5\xi^3 - 3\xi r^2) dm \\ &= \iiint [5(lx + my + nz)^3] dm \\ &\quad - 3 \iiint (lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2) dm. \end{aligned}$$

上式被积函数展为  $x, y, z$  的多项式后, 利用关系 (6.3) 可得

$$x_3 = 0. \quad (6.12)$$

因此, 若略去  $r/\rho$  或  $\xi/\rho$  的四次幂项 (相对误差小于  $60^{-4}$ , 即  $8 \times 10^{-8}$ ), 则可得

$$U = GM \left( \frac{E}{\rho} + \frac{A + B + C - 3I}{2\rho^3} \right). \quad (6.13)$$

$I$  可以改变形式, 从 (6.5) 式可得

$$I = \iiint (\eta^2 + \zeta^2) dm = \iiint (r^2 - \xi^2).$$

由于  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , 故再利用 (6.5) 式, 上式成为

$$\begin{aligned} I &= \iiint [(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2] dm \\ &= \iiint [l^2(y^2 + z^2) + m^2(z^2 + x^2) + n^2(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2lmxy - 2mnyz - 2nlzx] dm. \end{aligned}$$

再从关系 (6.2) 和 (6.4) 式知

$$I = l^2 A + m^2 B + n^2 C = A - (A - B)m^2 + (C - A)n^2. \quad (6.14)$$

其中利用了关系  $l^2 = 1 - m^2 - n^2$ . 若用  $(X, Y, Z)$  表示  $Q$  对  $O-xyz$  坐标系的坐标, 则应有关系:

$$\frac{X}{\rho} = l, \quad \frac{Y}{\rho} = m, \quad \frac{Z}{\rho} = n. \quad (6.15)$$

代入 (6.14) 式, 则 (6.13) 式成为

$$\begin{aligned} U &= GM \left[ \frac{E}{\rho} + \frac{B + C - 2A}{\rho^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(A - B)Y^2 - 3(C - A)Z^2}{2\rho^5} \right]. \quad (6.16) \end{aligned}$$

(6.16) 式就是地球对外面一质点吸引的力函数, 也是天体  $Q$  (看作质点) 对地球引力的力函数. 若天体为月球, 则 (6.16) 式中的  $M, \rho, Y, Z$  分别代表月球的质量, 距离和坐标; 若  $Q$  是太阳, 则上述四个量改为太阳的有关量就行了. 若同时考虑太阳和月球的吸引, 则 (6.16) 式改为太阳的力函数与月球的力函数之和.

由于本章讨论地球的自转, 只要考虑月球和太阳的吸引, 而且用 (6.16) 式这样的近似展开式就足够了. 如果讨论地球对人造地球卫星吸引的力函数, 由于人造卫星距离近, 地球形状和内部结构的很多细节都会对人造卫星运动产生影响. 因此 (6.16) 式就不能符合要求, 相应的展开式要复杂得多,

具体结果可参看有关人造地球卫星运动理论的书籍。

## § 2 地球自转的运动方程

由于已把地球看作刚体,故所谓地球自转运动,就是要找出地球自转角速度  $\omega$  的变化规律,即自转速率  $\omega$  的变化规律以及自转轴在地球内部和空间的变化规律。要得到这些结果,必须选择适当的变量和坐标系,首先列出运动方程。

1. 欧拉角。设以地球质量中心  $O$  为球心作一球面,把定义的坐标系都投影到这个球面上。在图 21 中,设  $O-X_0 Y_0 Z_0$  为历元  $t_0$  时的黄道直角坐标系,同地球自转无关;  $Z_0$  为  $t_0$  时的北黄极方向,  $X_0$  的严格定义在后面再讲。再设  $X, Y, Z$  轴与地球中心惯性主轴重合,  $Z$  轴接近于北天极方向,  $N$  为大圆  $X_0 Y_0$  对大圆  $XY$  的升交点,也就是大圆  $Z_0 Z$  的极。用下面定义的三个量  $\theta, \varphi, \psi$  表示  $XYZ$  坐标系相对于  $X_0 Y_0 Z_0$  的位置。

$\theta$  定义为大圆  $X_0 Y_0$  同  $XY$  的交角,应等于弧长  $Z_0 Z$ 。由于  $XY$  平面接近于赤道面,可把  $N$  点近似地看作春分点,  $\theta$  角近似地看作黄赤交角。

$\varphi$  的定义为弧长  $NX$ ,由  $N$  点沿  $XY$  方向计量,它就是大圆  $ZY$  同大圆  $Z_0 ZH$  的交角。

$\psi$  的定义为大圆弧  $X_0 N$ ,由  $X_0$  点沿  $Y_0 X_0$  方向计量,它就是大圆  $Z_0 Z$  同大圆  $Z_0 Y_0$  的交角。

照这样定义的  $\theta, \varphi, \psi$  称为欧拉角。这三个量确定后,坐标系  $XYZ$  同  $X_0 Y_0 Z_0$  之间的相对位置也就确定了。如以  $X_0 Y_0 Z_0$  为固定坐标系,则  $\theta, \varphi, \psi$  决定  $XYZ$  的位置。

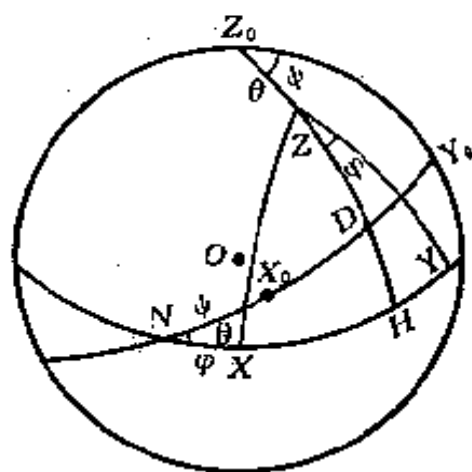


图 21



设  $(l_3, m_3, n_3)$  为  $OZ$  对坐标系  $X_0Y_0Z_0$  的方向余弦, 利用球面三角关系可得

$$\left. \begin{aligned} l_3 &= \cos ZX_0 = \sin \theta \sin \phi, \\ m_3 &= \cos ZY_0 = \sin \theta \cos \phi, \\ n_3 &= \cos ZZ_0 = \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

若月球或太阳对  $O-XYZ$  系统的坐标为  $(x, y, z)$ , 对  $O-X_0Y_0Z_0$  系统的坐标为  $(\xi, \eta, \zeta)$ , 则有关系:

$$\begin{aligned} x &= l_3\xi + m_3\eta + n_3\zeta \\ &= \xi \sin \theta \sin \phi + \eta \sin \theta \cos \phi + \zeta \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.18)$$

于是上节得到的力函数公式 (6.16) 成为

$$U = GM \left[ \frac{E}{\rho} + \frac{B + C - 2A}{2\rho^3} + \frac{3(A - B)y^2 - 3(C - A)z^2}{2\rho^5} \right]. \quad (6.19)$$

其中  $y, z$  即为月球或太阳对于  $O-XYZ$  系统的坐标.

## 2. 欧拉角的微商同角速度的关系.

由于  $O-XYZ$  坐标系在随着地球自转, 故  $\theta, \varphi, \psi$  也因地球自转而不断变化. 因此, 地球的瞬时自转角速度也应该能用  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  来表示. 设  $p, q, r$  为地球瞬时自转角速度  $\omega$  投影在  $X, Y, Z$  轴上的分量, 利用投影定律可得出  $p, q, r$  同  $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  之间的关系.

因为这些量都是角速度, 都是绕一定的轴旋转的量. 如我们统一规定反时针方向的旋转为正, 则根据  $\theta, \varphi, \psi$  的定义,  $\dot{\theta}$  是绕  $ON$  轴, 但增加方向是顺时针, 故为负;  $\dot{\varphi}$  是绕  $OZ$  轴, 增加方向为正;  $\dot{\psi}$  是绕  $OZ_0$  轴, 增加方向为负. 可是  $p, q, r$  分别绕  $OX, OY, OZ$  轴, 因此从投影定律可得下列关系:

$$\left. \begin{aligned} p &= -\dot{\theta} \cos XN + \dot{\varphi} \cos XZ - \dot{\psi} \cos XZ_0, \\ q &= -\dot{\theta} \cos YN + \dot{\varphi} \cos YZ - \dot{\psi} \cos YZ_0, \\ r &= -\dot{\theta} \cos ZN + \dot{\varphi} \cos ZZ - \dot{\psi} \cos ZZ_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

其中各方向余弦很容易求出。显然有

$$\begin{aligned}\cos XZ &= \cos YZ = \cos ZN = 0, \\ \cos ZZ &= 1, \quad \cos ZZ_0 = \cos \theta, \\ \cos XN &= \cos \varphi, \quad \cos YN = -\sin \varphi.\end{aligned}$$

又从球面三角形  $XNZ_0$  中可得

$$\cos XZ_0 = \sin \varphi \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \varphi \sin \theta;$$

从球面三角形  $YZ_0Z$  中可得

$$\cos YZ_0 = \sin \theta \cos(180^\circ - \varphi) = -\sin \theta \cos \varphi.$$

故一起代入 (6.20) 式得

$$\left. \begin{aligned}p &= -\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta, \\ q &= \dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta, \\ r &= \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta.\end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

这就是要求的关系式。

3. 欧拉方程。若用  $\theta, \varphi, \psi$  为广义坐标, 可用拉格朗日方程列出刚体的运动方程。由于我们要讨论地球自转轴在地球体内以及在空间的两种运动, 而讨论地球自转轴在地球体内的运动时, 要用  $p, q, r$  作为变量。下面先推出以  $p, q, r$  为变量的方程。但  $p, q, r$  为角速度分量, 不能作为广义坐标, 故需要从  $\theta, \varphi, \psi$  为广义坐标的方程中导出。

根据刚体动力学可知, 刚体绕质量中心  $O$  运动的总动能  $T$  可表为

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2. \quad (6.22)$$

其中  $A, B, C$  即为地球绕  $OX, OY, OZ$  轴的转动惯量, 应为常量;  $p, q, r$  为地球自转角速度在这三个坐标轴上的分量。

由于外力存在力函数  $U$ , 故  $-U$  为总位能。根据拉格朗日方程, 对广义坐标  $\varphi$  的方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (6.23)$$

由(6.21)式知,  $p, q, r$  为  $\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  的函数, 故用(6.22)式代入(6.23)式后可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( Ap \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + Bq \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + Cr \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} \right) \\ & - \left( Ap \frac{\partial p}{\partial \varphi} + Bq \frac{\partial q}{\partial \varphi} + Cr \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= A\dot{p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + B\dot{q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + C\dot{r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} \\ &+ Ap \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + Bq \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right] + Cr \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

但由(6.21)式知

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} = 1, \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= q, \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi} = -p, \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

代入(6.24)式得

$$C\dot{r} - (A - B)pq = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (6.25)$$

同理, 对  $\theta$  的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= A\dot{p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\theta}} + B\dot{q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\theta}} + C\dot{r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\theta}} \\ &+ Ap \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + Bq \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \dot{\theta}} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\partial q}{\partial \theta} \right] + Cr \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

由(6.21)式可得

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\cos \varphi, \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = \dot{\psi} \sin \theta,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi \\ &= (\dot{\psi} - \dot{\psi} \cos \theta) \sin \varphi = r \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial q}{\partial \theta} = \dot{\psi} \cos \varphi - \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi = r \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial r}{\partial \theta} = -\frac{\partial r}{\partial \theta} = \dot{\psi} \sin \theta = p \sin \varphi + q \cos \varphi.$$

代入 (6.26) 式后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \theta} &= -A\dot{p} \cos \varphi + B\dot{q} \sin \varphi + (A - C)pr \sin \varphi \\ &\quad + (B - C)qr \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.27)$$

同样,对  $\psi$  的方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \psi} &= A\dot{p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}} + B\dot{q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}} + C\dot{r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}} \\ &\quad + A p \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial p}{\partial \psi} \right] + B q \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial q}{\partial \psi} \right] + C r \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial r}{\partial \psi} \right]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

根据 (6.21) 式得

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = \frac{\partial q}{\partial \psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}} = \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{\psi}} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial \dot{\psi}} = -\cos \theta.$$

因此

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned} \right\} (6.29)$$

从(6.21)式解出 $\theta, \varphi$ 为 $p, q, r$ 的函数可得

$$\dot{\theta} = q \sin \varphi - p \cos \varphi,$$

$$\dot{\varphi} \sin \theta = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \cos \theta + r \sin \theta.$$

代入(6.29)式中得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \dot{\phi}} \right) = q \cos \theta + r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \dot{\phi}} \right) = -p \cos \theta - r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial \dot{\phi}} \right) = (q \sin \varphi - p \cos \varphi) \sin \theta.$$

故(6.28)式成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \phi} &= A \dot{p} \sin \theta \sin \varphi + B \dot{q} \sin \theta \cos \varphi \\ &\quad - C \dot{r} \cos \theta + A p (q \cos \theta + r \sin \theta \cos \varphi) \\ &\quad - B q (p \cos \theta + r \sin \theta \sin \varphi) \\ &\quad + C r \sin \theta (q \sin \varphi - p \cos \varphi). \end{aligned}$$

其中 $C \dot{r}$ 用(6.25)式代入,各项除以 $\sin \theta$ 得

$$\begin{aligned} A \dot{p} \sin \varphi + B \dot{q} \cos \varphi - (B - C) q r \sin \varphi \\ + (A - C) p r \cos \varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

把(6.27), (6.30)式按 $\dot{p}, \dot{q}$ 整理得

$$\left. \begin{aligned} A \dot{p} - (B - C) q r &= \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \\ \left( \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) - \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial \theta} & \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} B\dot{q} - (C - A)rp &= \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \left( \cos\theta \frac{\partial U}{\partial\varphi} + \frac{\partial U}{\partial\phi} \right) + \sin\varphi \frac{\partial U}{\partial\theta} &, \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

以及(6.25)式

$$C\dot{r} - (A - B)pq = \frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

就是欧拉方程。在后面讨论地球的惯性转动时要用到。

4. 岁差和章动的基本方程。地球自转轴在空间的变化就产生岁差和章动,必须用 $\theta, \varphi, \phi$ 作变量来讨论。由于地球非常接近于旋转椭球体,故 $A - B$ 很小,从实际观测表明

$$\left| \frac{A - B}{C} \right| < 3 \times 10^{-7},$$

故在讨论岁差章动时(主要是月球和太阳的吸引)可以略去。因此可以令 $A = B$ 。于是力函数 $U$ 的(6.16)式可写为

$$U = GM \left( \frac{E}{\rho} + \frac{C - A}{2\rho^3} - 3 \frac{C - A}{2\rho^5} z^2 \right). \quad (6.32)$$

其中 $z$ 为月球(或太阳)在 $O$ - $XYZ$ 系中的坐标。但用 $\theta, \varphi, \phi$ 作广义坐标的运动方程中,只出现 $U$ 对 $\theta, \varphi, \phi$ 的偏微商。而(6.32)式中,除 $z$ 外,都与 $\theta, \varphi, \phi$ 无关,则(6.32)式可写为

$$U = -GM \frac{3(C - A)}{2\rho^5} z^2.$$

若用 $S, \rho_1, z_1$ 表示太阳的质量、同地心的距离和 $z$ 坐标,则日,月两天体对地球吸引的力函数为

$$U = -GM \frac{3(C - A)}{2\rho^5} z^2 - GS \frac{3(C - A)}{2\rho_1^5} z_1^2. \quad (6.33)$$

根据(6.18)式可知

$$\left. \begin{aligned} z &= \xi \sin \theta \sin \psi + \eta \sin \theta \cos \psi + \zeta \cos \theta, \\ z_1 &= \xi_1 \sin \theta \sin \psi + \eta_1 \sin \theta \cos \psi + \zeta_1 \cos \theta. \end{aligned} \right\} (6.34)$$

其中  $(\xi, \eta, \zeta), (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  表示月球和太阳相对于固定坐标系  $O-X_0Y_0Z_0$  的坐标, 同  $\theta, \varphi, \psi$  无关. 由 (6.34) 式知,  $z, z_1$  不含  $\varphi$ , 即  $U$  不含  $\varphi$ , 因而  $\partial U / \partial \varphi = 0$ . 在 (6.31) 式的第三式中令  $A = B, \partial U / \partial \varphi = 0$ , 可得

$$Cr = 0,$$

积分得

$$r = \text{常数} = \omega,$$

即

$$r = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta = \omega. \quad (6.35)$$

其他两式也容易推出. 由于  $A = B$ , 故 (6.22) 式成为

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2$$

用 (6.21) 式代入得

$$2T = A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + C(\dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta)^2. \quad (6.36)$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} &= A\dot{\psi} \sin^2 \theta - C \cos \theta (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta) \\ &= A\dot{\psi} \sin^2 \theta - C\omega \cos \theta, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= A\dot{\theta}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C\dot{\psi} \sin \theta (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \cos \theta) \\ &= A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C\omega \dot{\psi} \sin \theta. \end{aligned} \right\} (6.37)$$

用 (6.37) 式代入拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

由于  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  数值很小, 略去高次项  $\dot{\theta}\dot{\phi}$ , 而  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\phi}$  更小亦可略去, 则上式可简化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \dot{\phi}}, \\ \dot{\phi} &= -\frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

这就是讨论岁差和章动的基本方程。

### § 3 地球的惯性转动, 地极移动

现在先讨论地球自转轴在地球体内的运动, 需要求出  $p$ ,  $q$ ,  $r$  表为时间  $t$  的函数。但事先估计一下力函数  $U$  的大小, 以便决定简化方案。

1. 力函数  $U$  的估计。欧拉方程中主要是  $T, U$  在起作用。由于  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  很小 (与  $\omega$  比较), 则 (6.36) 式可近似地表为

$$2T = A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + C\omega^2 \approx C\omega^2. \quad (6.39)$$

而日、月产生的力函数  $U$ , 可从 (6.33) 式知

$$U = -\frac{3(C-A)}{2} \left( GM \frac{z^2}{\rho^5} + GS \frac{z_1^2}{\rho_1^5} \right). \quad (6.40)$$

设  $a_1$ ,  $n_1$  表示地球公转轨道的半长径和平均角速度, 则近似地有关系:

$$GS = n_1^2 a_1^3.$$

代入 (6.40) 式可整理为

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3(C-A)}{2} n_1^2 a_1^3 \left( \frac{M}{S} \frac{z^2}{\rho^5} + \frac{z_1^2}{\rho_1^5} \right) \\ &= -\frac{3(C-A)}{2} n_1^2 \left[ \left( \frac{z_1}{\rho_1} \right)^2 \left( \frac{a_1}{\rho_1} \right)^3 \right] \end{aligned}$$



$$+ \frac{M}{S} \left( \frac{z}{\rho} \right)^2 \left( \frac{a}{\rho} \right)^3 \left( \frac{a_1}{\rho_1} \right)^3 \Big]. \quad (6.41)$$

定义符号:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{3}{2} (C - A) \frac{n_1^2}{C\omega}, \\ L &= \frac{M}{S} \left( \frac{a_1}{a} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

则(6.41)式可写为

$$-\frac{U}{C\omega} = K \left[ L \left( \frac{a}{\rho} \right)^3 \left( \frac{z}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{z_1}{\rho_1} \right)^2 \left( \frac{a_1}{\rho_1} \right)^3 \right]. \quad (6.43)$$

由(6.42)式定义的  $K, L$  为天文学基本常数, 它们的数值在后面再讲.  $a$  为月球公转轨道的半长径. (6.43) 式是后面讨论岁差章动时所用的公式.

现在来近似估计  $U$  的数量级. 近似地把  $XY$  平面看作赤道面, 则  $z = \rho \sin \delta$ ,  $z_1 = \rho_1 \sin \delta_1$ . 其中  $\delta, \delta_1$  为月球和太阳的赤纬. 若略去地球和月球公转轨道的偏心率, 则  $\rho = a$ ,  $\rho_1 = a_1$ . 故(6.40)式可写为

$$U = -\frac{3(C-A)}{2} \left( GM \frac{\sin^2 \delta}{a^3} + GS \frac{\sin^2 \delta_1}{a_1^3} \right).$$

又因  $\delta, \delta_1$  的最大值为  $29^\circ < 30^\circ$ , 故  $\sin \delta, \sin \delta_1$  的最大值小于 0.5. 再用  $n$  表示月球公转的平均角速度, 则  $G(M+E) = n^2 a^3$ ,  $GS \approx n_1^2 a_1^3$ . 故从上式可得

$$\begin{aligned} |U| &< \frac{3}{2} (C-A) \left[ \frac{1}{4} \frac{M}{E+M} n^2 + \frac{1}{4} n_1^2 \right] \\ &< \frac{3}{8} (C-A) \left( \frac{M}{E} n^2 + n_1^2 \right). \end{aligned}$$

再利用(6.39)式得

$$\frac{|U|}{T} < \frac{3}{4} \frac{C-A}{C} \left( \frac{n_1}{\omega} \right)^2 \left( 1 + \frac{M}{E} \frac{n^2}{n_1^2} \right). \quad (6.44)$$

其中各量的近似值为

$$\frac{C-A}{C} \approx \frac{1}{304}, \quad \frac{n_1}{\omega} \approx \frac{1}{366.25},$$

$$\frac{M}{E} = \frac{1}{81}, \quad \frac{n}{n_1} = 13.$$

代入(6.44)式后可知

$$\frac{|U|}{T} < 10^{-7}. \quad (6.45)$$

这是很小的量，故在讨论地球自转轴在地球体内的微小变化时，可以略去  $U$ 。这就是说，不考虑外力的影响，只考虑惯性转动。

2. 在欧拉方程(6.31)式中，略去  $U$  后得

$$A\dot{p} - (B-C)qr = 0, \quad (6.46)$$

$$B\dot{q} - (C-A)rp = 0, \quad (6.47)$$

$$C\dot{r} - (A-B)pq = 0. \quad (6.48)$$

由这三式容易得到两个积分。以  $p, q, r$  分别乘(6.46), (6.47), (6.48)三式相加得

$$A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r} = 0,$$

积分得

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = 2h. \quad (6.49)$$

其中  $h$  为积分常数。左端就是地球绕质量中心  $O$  转动的总动能  $T$  的两倍，故(6.49)式即为  $T = h$ ，即  $T$  为常数。故  $h$  为能量常数，(6.49)式就是能量积分。

再用  $A p, B q, C r$  分别乘(6.46), (6.47), (6.48)相加得

$$A^2 p \dot{p} + B^2 q \dot{q} + C^2 r \dot{r} = 0;$$

积分后得

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = G^2. \quad (6.50)$$

其中  $G^2$  也是积分常数。而左端就是地球绕质量中心  $O$  转动

的总动量矩大小的平方，故  $G$  即为总动量矩的大小。(6.50) 式表明总动量矩大小为常数，则为动量矩积分。

利用 (6.49), (6.50) 式，可解出 (6.46), (6.47), (6.48) 式，把  $p, q, r$  表为时间的函数。但根据地球的具体情况，可近似地取  $A = B$ ，此时 (6.48) 式成为

$$C\dot{r} = 0,$$

积分得

$$r = \omega_0. \quad (6.51)$$

相应的 (6.46), (6.47) 式中，令

$$b = \frac{C - A}{A}, \quad (6.52)$$

则得

$$\dot{p} + b\omega_0 q = 0, \quad (6.53)$$

$$\dot{q} - b\omega_0 p = 0. \quad (6.54)$$

由 (6.53) 式可得

$$p + b\omega_0 \dot{q} = 0,$$

以 (6.54) 式代入得

$$p + b^2\omega_0^2 p = 0.$$

这是振动方程，一般解为

$$\left. \begin{aligned} p &= \alpha \cos(b\omega_0 t + \beta), \\ q &= \alpha \sin(b\omega_0 t + \beta), \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

其中  $\alpha, \beta$  为积分常数。这里共有三个积分常数  $\omega_0, \alpha, \beta$ ，同  $h, G^2$  应存在函数关系，因为 (6.46), (6.47), (6.48) 只有三个独立的积分常数。

以 (6.51), (6.55) 式代入 (6.49), (6.50) 式，并在其中令  $A = B$ ，可得

$$A\alpha^2 + C\omega_0^2 = 2h,$$

$$A^2\alpha^2 + C^2\omega_0^2 = G^2.$$

由此可解出

$$\omega_0^2 = \frac{G^2 - 2Ah}{C(C-A)},$$

$$\alpha^2 = \frac{2Ch - G^2}{A(C-A)} = \omega_0^2 \frac{C(2Ch - G^2)}{A(G^2 - 2Ah)} = \omega_0^2 \sigma^2.$$

即得

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{2Ch - G^2}{C(C-A)}}, & \alpha &= \omega_0 \sigma, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{C(2Ch - G^2)}{A(G^2 - 2Ah)}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

于是 (6.46), (6.47), (6.48) 式的解成为

$$\left. \begin{aligned} p &= \omega_0 \sigma \cos(b\omega_0 t + \beta), \\ q &= \omega_0 \sigma \sin(b\omega_0 t + \beta), \\ r &= \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.57)$$

其中  $\omega_0, \sigma, \beta$  为积分常数,  $b$  由 (6.52) 式确定;  $\omega_0, \sigma$  同总动能  $h$  和总动量矩大小  $G$  的关系由 (6.56) 式确定.

3. 地极移动. 根据 (6.57) 式的结果, 地球自转角度速度  $\omega$  为

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \sigma^2}. \quad (6.58)$$

由此可知地球自转角速度大小  $\omega$  为常量. 其中  $\sigma^2$  由 (6.56) 式确定, 是很小的量 (约  $10^{-12}$  数量级). 由于  $p, q, r$  是角速度  $\omega$  在坐标轴  $OX, OY, OZ$  上的投影, 于是地球的瞬时自转轴在此坐标系中的方程为

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r},$$

即

$$\frac{x}{\omega_0 \sigma \cos(b\omega_0 t + \beta)} = \frac{y}{\omega_0 \sigma \sin(b\omega_0 t + \beta)} = \frac{z}{\omega_0}. \quad (6.59)$$

于是,由于 $\sigma$ 是很小的量,地球瞬时自转轴同地面的交点 $P$ ,在 $z$ 轴同地面的交点 $P_0$ 附近;而且 $P$ 可看作瞬时自转轴同平面 $z=1$ (地球极半径为单位)的交点.从(6.59)式可知, $P$ 点的 $x, y$ 坐标就是

$$x = \sigma \cos(b\omega_0 t + \beta), \quad y = \sigma \sin(b\omega_0 t + \beta). \quad (6.60)$$

这表明 $P$ 点在平面 $z=1$ 上(可看作在地面上)围绕 $P_0$ 点作圆形运动,此圆的半径就是 $\sigma$ ,运动周期为

$$\frac{2\pi}{b\omega_0} = \frac{A}{C-A} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (6.61)$$

由(6.58)式可知, $\omega_0$ 非常接近于地球自转角速度 $\omega$ ,即 $2\pi/\omega_0$ 接近于一个恒星日,而 $A/C - A$ 约为303,故 $P$ 绕 $P_0$ 点运动的周期约为303恒星日,或约302平太阳日.这个周期是根据刚体运动的欧拉方程,只考虑惯性运动得到的,故常叫做欧拉周期.根据 $\sigma$ 的数值,相当于地面上距离15米左右. $P$ 点叫做地球的瞬时极.

以上是认为地球是刚体,故 $P_0$ 点在地面上不变.事实上,地球不是严格的刚体.不仅液体部份有潮汐变化,固体部份也有潮汐,而且地球内部的地质活动是不停地进行的.从十九世纪末发现地极移动现象以来,实际观测表明,地球瞬时极在地面上的变化是很复杂的.大致有两种周期变化:一种是周期为一年,变幅不到 $0''.1$ ;一种的周期为432天左右,变幅约为 $0''.2$ .另外还有不规则的变化.

关于地球自转角速度 $\omega$ 的大小,从(6.58)式表明它是常数,但用了 $A=B$ 这个前提.事实上 $(A-B)/C$ 约为 $3 \times 10^{-7}$ ;如认为 $A \neq B$ ,则解出的 $\omega$ 为变量,但只存在周期项.这些周期项的系数很小,总和不超过 $0''.0001$ .可是,这个结论是在地球为刚体的前提下得到的.由于地球不是刚体, $\omega$ 的变化存在长期项.根据月球等天体的长期观测表明,恒星

日的长度每一百年约增加千分之一秒左右，这主要是由潮汐摩擦所产生的。用原子钟、分子钟作为标准进行观测， $\omega$ 除上述的长期变化外，还有周期变化和不规则变化。

#### § 4 力函数 $U$ 的展开式

下面讨论地球自转轴在空间的运动。需要具体考虑月球和太阳的力函数  $U$  的影响，先要展开  $U$  为欧拉角  $\psi$ ,  $\theta$  和时间  $t$  的显函数。

根据 (6.43) 式可知

$$U = -C\omega K \left[ L \left( \frac{a}{\rho} \right)^3 \left( \frac{z}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{z_1}{\rho_1} \right)^2 \left( \frac{a_1}{\rho_1} \right)^3 \right], \quad (6.62)$$

其中  $K, L$  为常数，由 (6.42) 式定义。  $\rho, a$  为月球的地心距和轨道半长径；  $\rho_1, a_1$  为太阳的地心距和地球轨道半长径。  $z, z_1$  为

$$\left. \begin{aligned} z &= \xi \sin \theta \sin \psi + \eta \sin \theta \cos \psi + \zeta \cos \theta, \\ z_1 &= \xi_1 \sin \theta \sin \psi + \eta_1 \sin \theta \cos \psi + \zeta_1 \cos \theta. \end{aligned} \right\} (6.63)$$

其中  $(\xi, \eta, \zeta), (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  为月球和太阳对于固定坐标系  $O-X_0Y_0Z_0$  的坐标，它们同  $\psi, \theta$  无关。

在 (6.62) 式中，只要展开月球的项，太阳的项可照样写出，而且还要简单些。

图 22 表示以地球质量中心  $O$  为心的天球。  $X_0, Y_0, Z_0$  为固定坐标轴（取为  $t_0$  时的黄道直角坐标）方向。大圆  $ACE$  为讨论时刻  $t$  时的黄道， $K$  是它的北极；  $i$  为它对大圆  $X_0Y_0$

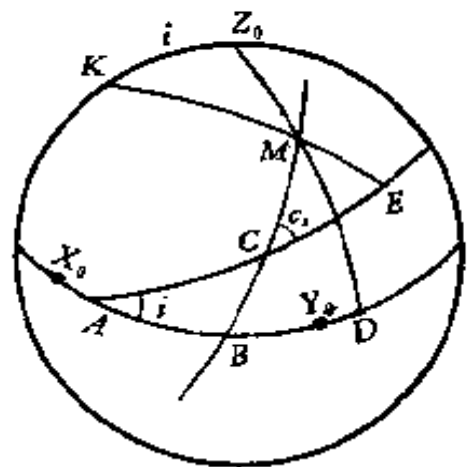


图 22

的交角。BCM 为时刻  $t$  时的月球轨道，M 表示  $t$  时的月球位置；C 为月球轨道对时刻  $t$  时黄道的升交点， $c_1$  为倾角(约  $5^{\circ}8'$ )。

要展开  $U$ ，主要是展开  $(a/\rho)^3$  和  $(z/\rho)^3$ 。由于

$$\frac{z}{\rho} = \frac{\xi}{\rho} \sin \theta \sin \phi + \frac{\eta}{\rho} \sin \theta \cos \phi + \frac{\zeta}{\rho} \cos \theta, \quad (6.64)$$

在图 22 中，定义  $X_0D = L^*$ ， $MD = B^*$ ，则  $(L^*, B^*)$  就是月球在  $t$  时位置对于  $t_0$  时黄道的黄经和黄纬。利用直角坐标同球坐标之间的关系可得

$$\xi = \rho \cos B^* \cos L^*, \quad \eta = \rho \cos B^* \sin L^*, \quad \zeta = \rho \sin B^*.$$

代入 (6.64) 式得

$$\frac{z}{\rho} = \cos B^* \sin \theta \sin(L^* + \phi) + \sin B^* \cos \theta. \quad (6.65)$$

$L^*, B^*$  为时间  $t$  的函数，需要表示为时间  $t$  的显函数，下面逐步把它们化出来。

定义  $X_0A + AE = l$ ， $EM = b$ ，则  $l, b$  为 M 对于  $t$  时黄道的黄经和黄纬，只是由于  $X_0$  不是春分点，使  $l$  同真黄经相差一个数值。则在球面三角形  $KZ_0M$  中， $KZ_0 = i$ ， $Z_0M = 90^\circ - B^*$ ， $KM = 90^\circ - b$ ， $\angle KZ_0M = 90^\circ + L^* - Q$  (此处  $X_0A = Q$ )， $\angle Z_0KM = 90^\circ - (l - Q)$ 。

于是从球面三角公式可得

$$\left. \begin{aligned} \sin B^* &= \sin b \cos i + \cos b \sin i \sin(l - Q), \\ \cos^* B \sin(L^* - Q) &= -\sin b \sin i + \cos b \cos i \sin(l - Q), \\ \cos^* B \cos(L^* - Q) &= \cos b \cos(l - Q). \end{aligned} \right\} (6.66)$$

再定义  $X_0A + AC = N$ ，即由  $X_0$  点起算的月球轨道对  $t$  时黄道升交点的经度；又定义  $N + CM = v$ ，则从球面三角形  $MCE$  知， $MC = v - N$ ， $ME = b$ ， $CE = l - N$ ， $\angle MCE = c_1$ ， $\angle MEC = 90^\circ$ ；故用球面三角公式可得

$$\left. \begin{aligned} \cos(v - N) &= \cos b \cos(l - N), \\ \cos c_1 \sin(v - N) &= \cos b \sin(l - N), \\ \sin c_1 \sin(v - N) &= \sin b. \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

在(6.65)式中,记  $L^* + \phi = (L^* - Q) + (\phi + Q)$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{z}{\rho} &= \sin \theta \cos(\phi + Q) [\cos B^* \sin(L^* - Q)] \\ &\quad + \sin \theta \sin(\phi + Q) [\cos B^* \cos(L^* - Q)] \\ &\quad + \cos \theta [\sin B^*]. \end{aligned} \quad (6.68)$$

方括弧中的量可用(6.66)式代入, 由于  $i$  很小(每年变化  $0''47$ ), 可令  $\sin i = i$ ,  $\cos i = 1$ . 又由于  $c_1$  不大,  $\sin c_1 < 0.1$ , 略去  $\sin^2 c_1$  项, 则可令

$$s = \sin c_1, \quad \cos c_1 = 1 - \frac{1}{2} s^2; \quad \text{还可略去 } i \sin c_1. \quad \text{故(6.66)}$$

式可化为

$$\begin{aligned} \sin B^* &= \sin b + i \cos b \sin(l - Q) \\ &= \sin b + i \cos b \sin[(l - N) + (N - Q)] \\ &= \sin b + i \cos b \sin(l - N) \cos(N - Q) \\ &\quad + i \cos b \cos(l - N) \sin(N - Q), \end{aligned}$$

用(6.67)式代入得

$$\begin{aligned} \sin B^* &= \sin c_1 \sin(v - N) \\ &\quad + i \cos c_1 \sin(v - N) \cos(N - Q) \\ &\quad + i \cos(v - N) \sin(N - Q) \\ &= s \sin(v - N) + i \sin(v - N) \cos(N - Q) \\ &\quad + i \cos(v - N) \sin(N - Q) \\ &= s \sin(v - N) + i \sin(v - Q), \end{aligned}$$

同理

$$\left. \begin{aligned} \cos B^* \sin(L^* - Q) &= \left(1 - \frac{1}{4} s^2\right) \sin(v - Q) \\ &\quad - \frac{s^2}{4} \sin(v - 2N + Q), \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} \cos B^* \cos(L^* - Q) &= \left(1 - \frac{1}{4} s^2\right) \cos(v - Q) \\ &+ \frac{s^2}{4} \cos(v - 2N + Q). \end{aligned} \right\} (6.69)$$

代入(6.68)式可得

$$\begin{aligned} \frac{z}{\rho} &= \left(1 - \frac{s^2}{4}\right) \sin \theta \sin(v + \phi) + s \cos \theta \sin(v - N) \\ &+ i \cos \theta \sin(v - Q) - \frac{s^2}{4} \sin \theta \sin(v - 2N - \phi). \end{aligned} \quad (6.70)$$

(6.70)式平方,略去 $i^2$ ,  $s^4$ ,  $is$ 等项则得

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 &= \frac{1}{2} s^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} s^2\right) \sin^2 \theta \\ &- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} s^2\right) \sin^2 \theta \cos(2v + 2\phi) \\ &- \frac{s^2}{4} \sin^2 \theta \cos(2N + 2\phi) + i \sin \theta \cos \theta \cos(Q + \phi) \\ &+ s \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) \sin^2 \theta \cos \theta \cos(N + \phi) + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (6.71)$$

其中角度为  $2v - 2N$ ,  $2v - 3N - \phi$ ,  $2v - N + \phi$  和  $2v - Q + \phi$  的短周期项没有写出来,在严格的讨论中是应该写出.

$(a/\rho)^3$  可以展开成平近点角  $M$  的三角级数,如只准到  $e^2$ , 式子很简单:

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} e^2 + 3e \cos M + \frac{9}{2} e^2 \cos 2M. \quad (6.72)$$

另外,  $v$  可写为  $f + \tilde{\omega}$ ; 其中  $f$  为真近点角,  $\tilde{\omega}$  为月球的近地点经度(由  $X_0$  点起算).  $f$  可以展为  $M$  的三角级数,即

$$f = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots \dots \dots \quad (6.73)$$

以(6.73)式代入(6.71)式后再乘上(6.72)式,略去其中不含  $\theta$  和  $\phi$  的项(因  $U$  要对  $\theta$  或  $\phi$  取偏微商),只写出几个主要项得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} s^2\right) \sin^2 \theta \\
&+ s \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} s^2\right) \sin \theta \cos \theta \cos(N + \phi) \\
&- \frac{1}{4} s^2 \sin^2 \theta \cos(2N + 2\phi) \\
&+ i \sin \theta \cos \theta \cos(Q + \phi) + \frac{3}{2} e \sin^2 \theta \cos M \\
&- \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos(2M + 2\tilde{\omega} + 2\phi) + \dots \quad (6.74)
\end{aligned}$$

此式对太阳的项完全适用, 只是  $e_1$  应为 0, 即  $s = \sin e_1 = 0$ ; 再把其中的  $M, e, \tilde{\omega}$  换为地球轨道的相应量  $M_1, e_1, \tilde{\omega}_1$ , 就变成  $(a_1/\rho_1)^3 (z_1/\rho_1)^2$  的展式. 因此(6.62)式可整理为

$$\begin{aligned}
-\frac{U}{KC\omega} &= L \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \left(\frac{z}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{\rho_1}\right)^3 \left(\frac{z_1}{\rho_1}\right)^2 \\
&= \left[ L \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} s^2\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_1^2 \right] \sin^2 \theta \\
&+ Ls \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} s^2\right) \sin \theta \cos \theta \cos(N + \phi) \\
&- \frac{1}{4} Ls^2 \sin^2 \theta \cos(2N + 2\phi) \\
&- \frac{1}{2} [L \cos(2M + 2\tilde{\omega} + 2\phi) \\
&+ \cos(2M_1 + 2\tilde{\omega}_1 + 2\phi)] \sin^2 \theta \\
&+ i(L + 1) \cos(Q + \phi) \sin \theta \cos \theta \\
&+ \frac{3}{2} (Le \cos M + e_1 \cos M_1) \sin^2 \theta + \dots \quad (6.75)
\end{aligned}$$

其中用到的月球轨道根数, 相对于地球的根数而言, 变化较快. 主要起作用的是  $N$  (升交点经度), 在 18.6 年内减少  $2\pi$ . 而地球的轨道根数在几千年内都可以看作长期变化, 有关的

量可以写为下面形式:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_0 + e't, \\ i \sin Q &= gt + ht^2, \\ i \cos Q &= g_1t + h_1t^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.76)$$

其中  $e'$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $g_1$ ,  $h_1$  是由其他行星对地球轨道的摄动, 都是很小的量; 例如  $e' = 0.0000418$ ,  $g_1 \approx 0''.47 = 10^{-5}$ ;  $g$ ,  $h$ ,  $h_1$  还更小. 在后面讨论中略去  $e'$ ,  $h$ ,  $h_1$ , 则有

$$\left. \begin{aligned} i \cos(\psi + Q) &= (i \cos Q) \cos \psi - (i \sin Q) \sin \psi \\ &= (g_1 \cos \psi - g \sin \psi)t, \\ e_1^2 &= e_0^2 + 2e_0e't. \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

代入 (6.75) 式, 为了使长期项和周期项分开, 定义:

$$\left. \begin{aligned} F &= K \left[ L \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} s^2 \right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_0^2 \right], \\ G &= K(L + 1), \\ H &= \frac{3}{2} K e_0 e', \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{K} &= s \left( 1 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin \theta \cos \theta \cos(N + \psi) \\ &\quad - \frac{1}{4} L s^2 \sin^2 \theta \cos(2N + 2\psi) \\ &\quad - \frac{1}{2} [L \cos(2M + 2\tilde{\omega} + 2\psi) \\ &\quad + \cos(2M_1 + 2\tilde{\omega}_1 + 2\psi)] \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{3}{2} (L e \cos M + e_1 \cos M_1) \sin^2 \theta + \dots. \end{aligned} \quad (6.79)$$

因此可得  $U$  的展开式为

$$\begin{aligned} - \frac{U}{C\omega} &= F \sin^2 \theta + [G(g_1 \cos \psi - g \sin \psi) \sin \theta \cos \theta \\ &\quad + H \sin^2 \theta] t + V. \end{aligned} \quad (6.80)$$

其中  $V$  只含有周期项。这就是展开式的结果，这里只写出了主要项，但从前面的讨论，可以推出更详细的结果。

### § 5 岁差章动基本方程的解

现在就根据  $U$  的展开式来解岁差章动的基本方程。由 (6.38) 式知：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{C\omega \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

用上面  $U$  的展开式代入得

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= 2F \cos \theta + [G(g_1 \cos \psi - g \sin \psi) \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \\ &\quad + 2H \cos \theta] t + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (6.82)$$

$$\dot{\theta} = G \cos \theta (g_1 \sin \psi + g \cos \psi) t - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \psi}. \quad (6.83)$$

为了使长期项和周期项分开，记为

$$\psi = \psi_m + \Delta\psi, \quad \theta = \theta_m + \Delta\theta. \quad (6.84)$$

其中定义：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_m &= 2F \cos \theta + [G(g_1 \cos \psi - g \sin \psi) \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} \\ &\quad + 2H \cos \theta] t, \\ \dot{\theta}_m &= G(g_1 \sin \psi + g \cos \psi) t; \end{aligned} \right\} \quad (6.85)$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \frac{d\Delta\theta}{dt} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \psi}. \quad (6.86)$$

从实际观测已知， $\psi$ ， $\theta$  的变化很慢（ $\psi$  要 70 年左右才增加  $1^\circ$ ， $\theta$  是微小的周期变化，振幅小于  $15''$ ），而且若定义  $X_0$

点就是  $t_0$  时的春分点, 则  $\psi$  值在几十年内都很小. 由于 (6.85) 式中含  $\psi$  的项都有微小因子  $Gg_1$  和  $Gg$ , 因此在足够精确的前提下, 可以令  $\sin \psi = 0$ ,  $\cos \psi = 1$ ,  $\theta = \theta_0$ . 于是 (6.85) 式成为

$$\left. \begin{aligned} \psi_m &= 2F \cos \theta_0 + \left( Gg_1 \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0} + 2H \cos \theta_0 \right) t, \\ \dot{\theta}_m &= Gg \cos \theta_0 t. \end{aligned} \right\} (6.87)$$

积分后可得

$$\psi_m = \psi_0 + at + bt^2, \quad \theta_m = \theta_0 + ct^2. \quad (6.88)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= 2F \cos \theta_0, & c &= \frac{1}{2} Gg \cos \theta_0, \\ b &= \frac{1}{2} \left( Gg_1 \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0} + 2H \cos \theta_0 \right). \end{aligned} \right\} (6.89)$$

(6.88) 式就是日月岁差的结果, 后面再讨论. 下面先解出 (6.86) 式. 以 (6.79) 式代入 (6.86) 式, 对  $\psi, \theta$  求过偏微商后, 令  $\theta = \theta_0$  得,

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\psi}{dt} &= KLs \left( 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{3}{2} e^2 \right) \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0} \cos(N + \psi) \\ &\quad - K \cos \theta_0 \left[ \frac{s^2}{2} L \cos(2N + 2\psi) \right. \\ &\quad + L \cos(2M + 2\tilde{\omega} + 2\psi) \\ &\quad + \cos(2M_1 + 2\tilde{\omega}_1 + 2\psi) \\ &\quad \left. - 3(Le \cos M + c_1 \cos M_1) + \dots \right] \quad (6.90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\theta}{dt} &= KLs \left( 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos \theta_0 \sin(N + \psi) \\ &\quad - K \sin \theta_0 \left[ \frac{1}{2} Ls^2 \sin(2N + 2\psi) \right. \\ &\quad + L \sin(2M + 2\tilde{\omega} + 2\psi) \\ &\quad \left. + \sin(2M_1 + 2\tilde{\omega}_1 + 2\psi) + \dots \right] \quad (6.91) \end{aligned}$$

在上式中除了  $N, \phi, M, M_1$  外, 都可以看作常数.  $M, M_1$  是平近点角, 可直接写为

$$M = nt + M_0, \quad M_1 = n_1 t + M_{10}.$$

$\phi$  可用  $\phi_0 + at$  表示(略去  $b$ ),  $N$  为月球轨道升交点, 有长期变化(18.6 年减少  $360^\circ$ ), 可记为

$$N = N_0 - N' t.$$

则

$$N + \phi = \beta - at; \quad \beta = N_0 + \phi_0, \quad \alpha = N' - a. \quad (6.92)$$

由于  $a$  比  $n, n_1$  要小很多倍 ( $n_1 > 25000a, n > 300000a$ ), 故  $\phi$  与  $M$  或  $M_1$  在一起积分时, 可以只考虑  $M$  和  $M_1$ . 为符号简单起见, 定义:

$$\alpha D = KLs \left( 1 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \frac{\cos 2\theta_0}{\sin \theta_0}, \quad (6.93)$$

$$\alpha E = KLs \left( 1 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos \theta_0. \quad (6.94)$$

(6.90), (6.91) 式积分后, 把所有积分常数都归到  $\phi_0$  和  $\theta_0$ , 则得

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & -D \sin(N + \phi) + K \cos \theta_0 \left[ \frac{Ls^2}{4\alpha} \sin(2N + 2\phi) \right. \\ & - \frac{L}{2n} \sin(2M + 2\tilde{\omega} + 2\phi) \\ & - \frac{1}{2n_1} \sin(2M_1 + 2\tilde{\omega}_1 + 2\phi) \\ & \left. + 3 \left( \frac{Le}{n} \sin M + \frac{e_1}{n_1} \sin M_1 \right) + \dots \right]. \quad (6.95) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta = & E \cos(N + \phi) - K \sin \theta_0 \left[ \frac{Ls^2}{4\alpha} \cos(2N + 2\phi) \right. \\ & - \frac{L}{2n} \cos(2M + 2\tilde{\omega} + 2\phi) \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2n_1} \cos(2M_1 + 2\bar{\omega}_1 + 2\phi) + \dots \dots \dots \Big\}. \quad (6.96)$$

所得的 (6.88), (6.95), (6.96) 式就是岁差章动的公式, 即

$$\phi = \phi_m + \Delta\phi, \quad \theta = \theta_m + \Delta\theta. \quad (6.97)$$

其中  $\phi_m, \theta_m$  为长期项, 叫做日月岁差项;  $\Delta\phi, \Delta\theta$  是周期项, 叫做章动项. 下面进行一些讨论.

1. 日月岁差和行星岁差. 如果只考虑长期项  $\phi_m, \theta_m$ , 不考虑周期项  $\Delta\phi, \Delta\theta$ ; 由  $\phi_m, \theta_m$  决定的赤道和春分点就叫做平赤道和平春分点. 若取  $X_0$  点为时刻  $t_0$  时的春分点, 则  $\phi_0 = 0$ .

即

$$\phi_m = at + bt^2. \quad (6.98)$$

在图 23 中,  $NX_0A$  表示  $t_0$  时的黄道; 若黄道本身不变,

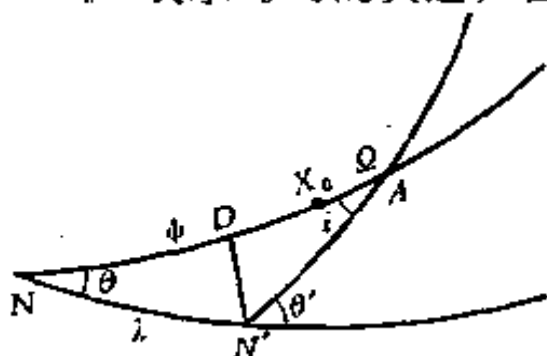


图 23

$NN'$  表示  $t$  时的赤道; 则  $N$  为  $t$  时的春分点,  $X_0N = \phi$ ,  $\theta$  就是  $t$  时的黄赤交角. 但是由于行星对地球的摄动, 黄道也在不断变化. 设时刻  $t$  时的黄道为  $N'A$ ,  $X_0A = Q$ ,  $i$  为  $t$  时黄道对  $t_0$  时黄道的倾角, 则  $N'$  才是时刻  $t$  时的春分点,  $\theta'$  为  $t$  时黄赤交角.

根据前面 (6.76) 式可知

$$\left. \begin{aligned} i \sin Q &= gt + ht^2, \\ i \cos Q &= g_1t + h_1t^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

由于  $i$  是微小的量, 从  $N'$  作大圆弧  $N'D$  垂直于  $t_0$  时的黄道

$NX_0A$ , 则  $D$  可看作春分点  $N'$  在  $t_0$  时黄道上的投影. 记  $X_0D = \psi'$ , 则  $\psi' - \psi$  为行星对黄道摄动产生的岁差, 叫做行星岁差. 根据  $i$  的变化方向知, 由于行星摄动, 使黄道逆时针旋转, 春分点向东移 (以图面为准).  $\psi' = \psi + (\psi' - \psi)$  就叫做总岁差. 下面求出它们之间的关系.

在球面三角形  $NN'A$  中,  $AN = Q + \psi$ ; 设  $NN' = \lambda$  为春分点在赤道上的位移; 则由以角度为标准的余弦公式得

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos i - \sin \theta \sin i \cos(Q + \psi).$$

记  $\theta' = \theta + \Delta\theta$ , 则  $\Delta\theta$  与  $i$  为同数量级的小量, 只准到二阶的关系为

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} \Delta\theta^2\right) \cos \theta - \Delta\theta \sin \theta \\ = \left(1 - \frac{1}{2} i^2\right) \cos \theta - i \sin \theta \cos(Q + \psi). \end{aligned}$$

如只准到一阶小量, 则为

$$\Delta\theta = i \cos(Q + \psi). \quad (6.100)$$

准到二阶小量的结果为

$$\Delta\theta = i \cos(Q + \psi) + \frac{1}{2} i^2 \text{ctg} \theta \sin^2(Q + \psi). \quad (6.101)$$

用 (6.99) 式以及  $\psi = at + bt^2$ ,  $\theta = \theta_0 + ct^2$  代入, 只取到  $t^2$  项则得

$$\Delta\theta = g_1 t + \left( h_1 - ag + \frac{1}{2} g^2 \text{ctg} \theta_0 \right) t^2. \quad (6.102)$$

因此

$$\left. \begin{aligned} \theta' = \theta + \Delta\theta = \theta_0 + Q_1 t + Q_2 t^2, \\ Q = g_1, \quad Q_1 = c + h_1 - ag + \frac{1}{2} g^2 \text{ctg} \theta_0. \end{aligned} \right\} (6.103)$$

(6.103) 式就是考虑日月岁差和行星岁差后的黄赤交角公式.



另外，在直角球面三角形  $NN'D$  中， $NN' = \lambda$ ， $DN = \psi - \psi'$ ，则可得

$$\operatorname{tg}(\psi - \psi') = \operatorname{tg} \lambda \cos \theta,$$

由于  $\lambda$ ， $\psi - \psi'$  都是小量，如只准到二阶，则得

$$\psi - \psi' = \lambda \cos \theta = \sin \lambda \cos \theta = \sin \lambda \cos \theta_0. \quad (6.104)$$

但从三角形  $NN'A$  中， $NA = Q + \psi$ ，用正弦定律知

$$\sin \lambda = \frac{\sin i \sin(Q + \psi)}{\sin \theta'} = \frac{i \sin(Q + \psi)}{\sin \theta'}. \quad (6.105)$$

因  $i$  为小量，故  $\sin \theta'$  只要准到一阶小量就够了，即

$$\begin{aligned} \sin \theta' &= \sin(\theta + \Delta\theta) = \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta \\ &= \sin \theta [1 + i \operatorname{ctg} \theta \cos(Q + \psi)]. \end{aligned}$$

代入 (6.105) 式后，再把 (6.105) 式代入 (6.104) 式，并可令  $\theta = \theta_0$ ，则得

$$\begin{aligned} \psi - \psi' &= i \sin(Q + \psi) \operatorname{ctg} \theta_0 \\ &\quad - i^2 \sin(Q + \psi) \cos(Q + \psi) \operatorname{ctg}^2 \theta_0. \end{aligned} \quad (6.106)$$

再用 (6.99) 式代入，取右端的  $\psi = at$  (因  $i$  有  $t$  的因子) 即得

$$\psi - \psi' = (gt + ht^2 + ag_1 t^2) \operatorname{ctg} \theta_0 - gg_1 t^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_0. \quad (6.107)$$

以  $\psi = at + bt^2$  代入左端则得

$$\begin{aligned} \psi' &= P_1 t + P_2 t^2, \\ \text{其中} \quad P &= a - g \operatorname{ctg} \theta_0, \\ P_2 &= b - (h + ag_1) \operatorname{ctg} \theta_0 + gg_1 \operatorname{ctg}^2 \theta_0. \end{aligned} \quad (6.108)$$

(6.108) 式就是日月和行星摄动影响产生的黄经总岁差。

(6.103) 式是黄赤交角的总岁差。

由于行星摄动，使时刻  $t$  时的春分点从  $N$  移动到  $N'$ ，天体的赤经相应要减小  $\lambda = NN'$ 。由 (6.104) 和 (6.108) 式可得

$$\begin{aligned} \lambda &= (\psi - \psi') \sec \theta_0 = (gt + ht^2 + ag_1 t^2) \operatorname{csc} \theta_0 \\ &\quad - gg_1 t^2 \operatorname{ctg} \theta_0 \operatorname{csc} \theta_0 = \lambda' t + \lambda'' t^2, \end{aligned} \quad (6.109)$$

其中

$$\lambda' = g \csc \theta_0, \quad \lambda'' = (h + ag_1 - gg_1 \operatorname{ctg} \theta_0) \csc \theta_0. \quad (6.110)$$

在习惯上把  $\lambda$  叫做行星岁差，只改正天体的赤经(不影响赤纬)。

2. 章动椭圆。只作了岁差改正的春分点，赤道和天极叫做平春分点，平赤道和平天极；相应的时刻  $t$  叫做历元。加上章动改正  $\Delta\phi$ ， $\Delta\theta$  后得到的春分点，赤道和天极叫做历元  $t$  时的真春分点，真赤道和真天极。天体的位置也分别叫做平位置和真位置。在章动项中，主要项为含  $N + \phi$  的项，记为

$$d\phi = -D \sin(N + \phi), \quad d\theta = E \cos(N + \phi). \quad (6.111)$$

其余项总和记为  $\delta\phi$ ， $\delta\theta$ ，则章动记为

$$\Delta\phi = d\phi + \delta\phi, \quad \Delta\theta = d\theta + \delta\theta. \quad (6.112)$$

$\delta\phi$  的系数的总和比  $d\phi$  的系数小得多， $\delta\theta$  也是一样。章动主要项  $d\phi$ ， $d\theta$  的周期与月球升交点变化周期相近，约 18.6 年。与观测发现的真天极的变化周期相同。如只考虑主要项，可近似地看出真天极  $P$  绕平天极  $P_0$  的变化情况。

图 24 中  $Z_0$  为黄极， $P_0$  为时刻  $t$  时的平天极， $P$  为真天极。联结大圆  $Z_0P_0$ ， $Z_0P$ ，并作垂直大圆  $PB$  垂直于  $P_0Z_0$ 。由于  $P$ ， $P_0$  非常接近，在近似讨论中可认为  $Z_0P = Z_0B$ ，也就是  $d\theta = P_0B$ 。又因  $d\phi$  是  $\angle PZ_0P_0$ ，可近似地认为  $PB = d\phi \sin \theta = d\phi \sin \theta_0$ 。如果把  $P_0$  附近的天球看作平面，以  $P_0$  为原点，以  $Z_0P_0$  方向作  $x$  轴，垂直方向作  $y$  轴，则  $P$  相对于  $P_0$  点的坐标应为

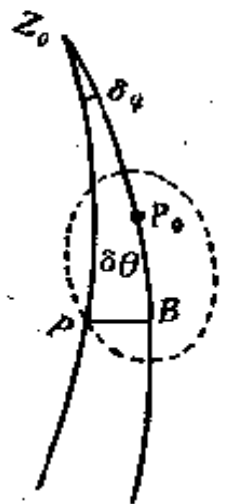


图 24

$$x = d\theta, \quad y = d\phi \sin \theta_0;$$

即

$$\left. \begin{aligned} x &= E \cos(N + \phi), \\ y &= -D \sin(N + \phi) \sin \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.113)$$

由此可得

$$\frac{x^2}{E^2} + \frac{y^2}{D^2 \sin^2 \theta_0} = 1. \quad (6.114)$$

此式表明  $P$  相对于  $P_0$  的运动轨迹为椭圆，叫做章动椭圆。椭圆的两个半径为  $E$  和  $D \sin \theta_0$ 。按照  $D$ 、 $E$  的定义 (6.93)，(6.94) 式可知

$$D \sin \theta_0 = \frac{E \cos 2\theta_0}{\cos \theta_0} < E,$$

因为  $\theta_0$  近于  $23^\circ 5'$ ，故  $\cos 2\theta_0 < \cos \theta_0$ 。这表明  $E$  为半长径， $D \sin \theta_0$  为半短径。

因此真天极在空间的运动很复杂。平天极  $P_0$  在围绕黄极运动 (岁差)，真天极又围绕  $P_0$  接近似于椭圆的轨道运动。

## § 6 岁差和章动的系数

上节得到了岁差和章动的公式，其中的系数和积分常数都还未确定。关于地球和月球的轨道根数，可根据天体力学中所得到的它们的运动理论求出，还有一些量要从观测直接定出来。总岁差常数  $P$ 、 $P_1$ ，章动常数  $E$ ，以及  $t_0$  时的黄赤交角  $\theta_0$ ，是天文基本常数，必须由观测定出。

测定岁差常数需要观测恒星的长期位置变化，必须改正恒星的自行。而恒星自行又可分为三类：①恒星本身的不规则运动；②由于太阳在银河系内运动产生的相对运动；③银河系的自转。因此，需要用大量的恒星的长期观测才能定出总岁差常数。目前所采用的数值是纽康 (Newcomb, S) 在 1896 年根据前人的观测结果，比较了 2527 个恒星的长期视位置变化所得到的。数值如下 (历元为 1900 年 1 月 0 日平中午)：

$$\text{总岁差常数: } \psi' = PT + P_1 T^2,$$

其中  $P = 5025''.64, P_1 = 0''.011.$

日月岁差常数:  $\psi = aT + bT^2,$

其中  $a = 5037''.08, b = 0''.0025.$

黄赤交角:  $\theta' = \theta_0 + QT + Q_1T^2,$

其中  $\theta_0 = 23^\circ 27' 08''.26,$

$Q = -46''.84, Q_1 = -0''.0035.$

相应的行星岁差值  $\lambda$  也可以求出:

$\lambda = \lambda'T + \lambda''T^2, \lambda' = 0.1248, \lambda'' = -0''.0095.$

以及

$i \sin Q = gT + hT^2, i \cos Q = g_1T + h_1T^2,$

$g = 4''.584, h = 0''.1995,$

$g_1 = -46''.84, h_1 = 0''.00533,$

$c_1 = e_0 + e'T, e_0 = 0.016751,$

$e' = -0.0000418, e = 0.054900,$

$c_1 = 5^\circ 8' 43''.427, s = \sin c_1.$

其中  $T$  表示从 1900 年 1 月 0 日格林尼治平中午起算的时间, 以儒略世纪 (36525 日) 为单位.

目前采用的章动常数  $E$ , 是由拱极星位置所确定的真天极位置在 18.6 年的周期内的变化情况定出的, 仍然用纽康 1896 年得到的数值, 即

$$E = 9''.210.$$

根据  $E, a, \theta_0$  以及  $s, e, e_0$  的值, 由关系

$$E\alpha = KLs \left( 1 - \frac{1}{2} s^2 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos \theta_0,$$

$$a = 2F \cos \theta_0$$

$$= 2K \left[ L \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 s^2 \right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_0^2 \right] \cos \theta_0,$$

可解出  $KL, K$ . 其中  $\alpha$  为

$$\alpha = N' - a,$$

$\alpha$  为已知,  $N'$  为月球轨道升交点的变化角速度, 可从月球运动理论和月球位置的长期观测定出. 结果为

$$\alpha = 0.337328 \text{ 弧度/年.}$$

由此解出的值为

$$KL = 37''9405,$$

$$K = 17''4238,$$

相应的

$$L = 2.163.$$

有了  $K, L$  和地月轨道根数后, 就可以算出章动公式中的所有系数. 现在通用的章动公式是伍拉尔德 (Woolard) 在 1953 年所推导, 1960 年开始采用的. 附录中列出了公式的详细结果.

根据  $K, L$  的数值, 可以推出地月质量之比和地球的力学椭率  $(C - A)/C$ . 由关系

$$L = \frac{M}{S} \left( \frac{a_1}{a} \right)^3 = \frac{M}{E + M} \cdot \frac{E + M}{S} \left( \frac{a_1}{a} \right)^3,$$

以关系  $G(E + M) = n^2 a^3$ ,  $GS = n_1^2 a_1^3$  代入得

$$L = \frac{M}{E + M} \cdot \frac{n^2}{n_1^2}$$

其中  $n, n_1$  为月球和地球的平均运动角速度, 为已知量, 因此可求出

$$\mu = \frac{M}{E} = \frac{1}{81.45},$$

再由

$$K = \frac{3}{2} \left( \frac{C - A}{C} \right) \frac{n_1^2}{\omega^2},$$

可算出地球力学椭率为

$$\frac{C - A}{C} = \frac{1}{305.32}.$$

这些数值同其他方法得到的结果接近。

近年来对岁差章动常数又作了很多研究。由于纽康所用的是十九世纪的观测资料,精度较差;而且在处理恒星自行时没有考虑银河系的自转,因此所得岁差值不会很准的。二十世纪以来,从下面三种途径来改正岁差常数值。

1. 分析星表中的恒星自行。在恒星自行中对视差位移和银河系自转作改正后,从恒星的本动来求出岁差常数的改正值。

2. 由行星运动定出岁差常数改正值。即由太阳和行星的长期观测确定春分点位置的变化,从而改正岁差值。

3. 从星表中的恒星自行,同这些恒星相对于河外星云的自行比较,求出岁差常数改正值。

根据 1966 到 1971 年得到的结果,日月岁差常数  $\alpha$  和行星岁差常数  $\lambda'$  都有  $+1''$  左右的改正值。而且有不少人认为,日月岁差常数  $\alpha$  中包含有  $+1''92$  的相对论改正值。在 1970 年举行的国际第三届天文常数系统会议上,建议从 1980 年开始正式改用新的岁差常数值。

关于章动常数  $E$ , 由于章动理论是在地球为刚体这个假定之下建立起来的,而地球不是严格的刚体。自 1965 年以后,不少人从不同的地球非刚体模型出发,利用长期的(超过 18.6 年)纬度观测资料进行分析归算,得到了不同的章动常数  $E$  和其余几个主要项的系数值。所得的结果是  $E = 9''2014$  左右,还有待今后继续研究。

# 附 录

## 一 习 题

### 第 一 章

1. 若取太阳  $S$  和某一行星  $P$  的质量中心为坐标原点, 只考虑它们之间的万有引力(都看做质点), 试列出  $S$  和  $P$  的运动方程, 并说明由这些方程解出的轨道与  $P$  相对于  $S$  运动的轨道有什么不同?

2. 在椭圆运动中, 如用真近点角  $f$  作自变量, 试求出行星向径  $r$  在公转一周内的平均值。(提示: 用  $r$  和  $f$  的关系式, 对  $f$  求积分取  $r$  的平均值)。

3. 同上题, 但用时间  $t$  作自变量, 求出向径  $r$  在一周内的平均值, 并说明为什么与上式的结果不同?

4. 试证: 行星在公转一周内受到太阳辐射热的平均值与  $a^2\sqrt{1-e^2}$  成反比。(辐射热量与距离平方成反比)。

5. 在椭圆轨道上任意一点, 设  $\theta$  为向径正方向与速度正方向(即切线正方向)之间的交角, 试证明下面的结果:

$$\operatorname{tg} \theta = r \frac{df}{dr} = \frac{1 + e \cos f}{e \sin f},$$

$$\cos \theta = \frac{e \sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}.$$

6. 同上, 设  $\alpha$  为速度正方向同椭圆轨道长轴方向(指向近

日点方向为正)之间的交角,试证明下面的结果:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\cos f + e}{\sin f},$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sin f}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\cos f + e}{\sqrt{1 + 2e \cos f + e^2}}.$$

7. 在 §1 中的拉普拉斯积分常数  $F_1, F_2, F_3$  不是独立的, 试利用面积积分(常数为  $A, B, C$  或  $h, Q, i$ )和活力积分(常数为  $1/a$ )证明下面的关系式:

$$AF_1 + BF_2 + CF_3 = 0,$$

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = -\frac{\mu}{a}(A^2 + B^2 + C^2) + \mu^2.$$

8. 设  $(F_1, F_2, F_3)$  为向量  $F$  在日心黄道直角坐标系  $S-xyz$  中的三个分量,再根据 §5 中的向量  $P(l_1, m_1, n_1)$  和  $Q(l_2, m_2, n_2)$  的定义,证明下面关系成立:

$$l_1 F_1 + m_1 F_2 + n_1 F_3 = -\mu e,$$

$$l_2 F_1 + m_2 F_2 + n_2 F_3 = 0.$$

并结合第 7 题的结果,找出向量  $F$  的大小和具体方向,向量  $F$  又叫做拉普拉斯向量.

9. 利用椭圆运动中的近点角关系证明下面的式子成立:

$$(1) \quad \sqrt{r} \cos \frac{f}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2},$$

$$(2) \quad \sqrt{r} \sin \frac{f}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2},$$

$$(3) \quad \frac{df}{dE} = \frac{\sqrt{1+e}(1+\cos f)}{\sqrt{1-e}(1+\cos E)} = \frac{\sin f}{\sin E}.$$

10. 试说明 (1.31) 式与开普勒第三定律不同的原因.



11. 在 § 13 中引入了函数  $F_i, G_i (i = 1, 3)$ , 试用 § 5 中的  $(x, y, z)$  和  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  的表达式证明:

$$F_i = \frac{\cos(E_i - E_2) - e \cos E_2}{1 - e \cos E_2},$$

$$G_i = \frac{\sin(E_i - E_2) - e(\sin E_i - \sin E_2)}{1 - e \cos E_2}.$$

12. 若把地球看作质点, 在距地心  $r_0$  处用速率  $v_0$  发射人造卫星, 设速度  $v_0$  同向径  $r_0$  之间的交角为  $\alpha$ , 若轨道为椭圆, 试求出下列各点的坐标: (1) 近地点; (2) 远地点; (3) 椭圆中心; (4) 椭圆短径的端点.

13. 若轨道为椭圆的人造卫星相对于地心赤道坐标系的轨道根数为已知, 试求出卫星从纬度等于  $\varphi_1$  运动到纬度等于  $\varphi_2$  所需时间的公式.

14. 算出月球相对于地球的引力作用范围, 并求出在月球的引力作用范围边界处, 相对于月球的脱离速度值.

15. 根据日、月和地球的质量和相互距离的数值, 证明太阳对月球的引力约等于地球对月球引力的两倍, 并说明为什么月球仍然是绕地球转动?

16. 设地球和月球的公转轨道都是圆形, 并在同一个平面上, 试求出月球相对于太阳运动的轨道方程, 并粗略地画出曲线形状.

17. 设各大行星的公转轨道都是圆形, 而且在同一平面上, 用双切轨道从地球上向它们发射宇宙火箭, 试求出向各大行星发射宇宙火箭的初始速度以及到达各大行星所需的时间. (各行星的轨道半径为: 水星 0.387, 金星 0.723, 地球 1, 火星 1.524, 木星 5.203, 土星 9.539, 天王星 19.191, 海王星 30.071, 冥王星 39.673, 长度单位都是天文单位).

18. 根据白塞耳函数的性质证明下列的关系式成立:

$$(1) \quad \frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x),$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x).$$

19. 试证明：用白塞耳函数和拉格朗日级数展开  $E$  为  $M$  的级数是相同的（只算到  $e^4$  为止）。

20. 展开真近点角  $f$  为  $M$  的级数，准到  $e^4$  为止。

21. 在解 (1.67) 式时，因为它是  $\lg f/2$  的三次代数方程，试说明 § 4 中所叙述的解法得到的结果就是所需要的根。

22. 若行星沿着椭圆轨道运动，试证明它的运动速度分解在垂直于向径方向的分量以及垂直于长轴方向的分量全都是常量。

23. 设地球轨道为圆形，半径为一个天文单位；若一彗星在黄道面上沿抛物线轨道运动，设此彗星轨道的近日距为  $q$ ，试求出此彗星穿过地球轨道内部所需的时间。

## 第 二 章

1. 高斯方法的基本方程是由 (2.12) 式推导出来的，而 (2.12) 式又是从 (2.11) 一个式子按不同形式整理出来的三个方程，这三个方程不是互相独立的。可是得到的基本方程 (2.19) 式又是三个独立的方程，试解释这个原因。

2. 在用 (2.35)，(2.37) 式解  $\rho_2$  和  $r_2$  时，是用这两式同时解出  $\rho_2$  和  $r_2$  两个量的值。为什么不在这两式中消去一个量（ $\rho_2$  或  $r_2$ ）后，由消去后的一个方程解一个量的值？

3. 试说明三角形和扇形面积之比  $\bar{y}$  所满足的方程 (2.69) 的正根大于 1，而且接近于 1。

4. 试分析高斯方法的优缺点，并指出其中需要改进的主要问题。

5. 若已求出行星在某时刻的日心赤道直角坐标  $(x, y, z)$  和速度分量  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , 试根据二体问题的基本公式求出: (1) 行星轨道为椭圆时的轨道根数; (2) 行星轨道为抛物线时的轨道根数; (3) 行星轨道为双曲线时的轨道根数.

6. 若用其他方法求出了行星的两个轨道根数  $\Omega, i$ , 试找出一种从两个时刻的观测值  $(\alpha_1, \delta_1), (\alpha_2, \delta_2)$  计算其余四个轨道根数的方法. (从行星的轨道面出发).

7. 人造地球卫星的轨道根数是相对于地心赤道坐标系:  $X$  轴指向春分点. 若观测站的地理坐标为  $\lambda, \varphi$ , 试根据观测时刻  $t$  时的恒星时  $s$  计算出观测站在时刻  $t$  时的地心赤道直角坐标.

8. 若在同一个观测站, 在三个不同时刻  $t_i$  观测到人造地球卫星的  $(\alpha_i, \delta_i)$ , 试用拉普拉斯方法的原理, 列出计算人造卫星轨道根数的基本公式.

9. 若三次观测值是由三个不同的观测站得到的, 上题求出的基本公式有什么改变?

10. 试仿照椭圆轨道的计算方法, 提出一种计算双曲线轨道的计算方法.

11. 根据所用的电子计算机, 编出高斯方法和拉普拉斯方法的计算程序.

### 第 三 章

1. 若天体之间的吸引力是同天体的质量成正比, 同天体之间的距离的  $p$  次方成反比, 则  $n$  体问题中的力函数形式怎样? 运动方程有什么改变? 十个初积分有哪些还成立?

2. 试用球坐标  $(x_i = r_i \cos \theta_i \cos \varphi_i, y_i = r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, z_i = r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i)$  建立  $n$  体问题的运动方程, 并求出相应的初积分.

3. 设三体  $P_0, P_1, P_2$  的质量为  $m_0, m_1, m_2$ ; 讨论  $P_1$  的运动时, 以  $P_0$  为坐标原点; 讨论  $P_2$  的运动时, 以  $P_0 P_1$  的质量中心  $G$  为坐标原点; 两个直角坐标系的坐标轴互相平行. 试列出此三体在这样的坐标系中的摄动运动方程. (这种坐标系叫做雅哥比坐标系).

4. 在 § 6 中, 用哈密顿-雅哥比方法解二体问题时, 只求出了三个积分 (已包含六个相互独立的积分常数); 试求出另外三个积分.

5. (3.130) 式定义的柏松括弧, 在天体力学中经常用到. 对于正则共轭变量  $q_i, p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和时间  $t$  的任何两个函数  $F = F(q, p, t), G = G(q, p, t)$ , 都可以定义它们的柏松括弧为

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right].$$

试由这个定义证明下列性质:

$$(1) \{F, G\} = -\{G, F\},$$

$$(2) \{F, F\} = 0,$$

$$(3) \{-F, G\} = \{G, F\} = -\{F, G\},$$

$$(4) \frac{d}{dt} \{F, G\} = \left\{ \frac{dF}{dt}, G \right\} + \left\{ F, \frac{dG}{dt} \right\},$$

$$(5) \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

6. 试证:  $F(q, p, t) = \text{常数}$  是正则方程组

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

的一个积分的必要和充分条件为

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\},$$

7. 若  $F_1(q, p, t) = \text{常数}, F_2(q, p, t) = \text{常数}$  是上题

中正则方程组的两个积分,试证

$$\{F_1, F_2\} = \text{常数}$$

也是这个正则方程组的一个积分.

8. 根据 § 3 中所述的  $N$  体问题的正则方程组 (3.29) 式, 试写出十个初积分在这种变量系统的表达式, 记为

$$F_r (\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \phi_i, \psi_i, \chi_i) = C_r (\text{常数})$$

的形式, 其中  $F_r$  不再包含任何积分常数 ( $r = 1, 2, 3, \dots, 10$ ); 再根据上题结果, 算出所有  $\{F_r, F_s\}$ , 看看是否能得到新积分.

9. 由于太阳辐射, 它的质量在不断减少, 设太阳的质量为  $M = M_0 - qt$ , 其中  $M_0, q$  都是正常数; 在这样情况下, 某行星的椭圆轨道根数中有哪些会变化 (不考虑其他摄动)? 并列出行星摄动运动方程进行讨论.

10. 若在某历元  $t_0$  时, 一行星的轨道为圆, 则此时行星的摄动运动方程可简化为怎样的形式?

## 第 四 章

1. 试写出四体问题的全部二阶摄动项的微商表达式 (即  $\dot{p}_i^{(j,k,l)}, \dot{q}_i^{(j,k,l)}, \dot{r}_i^{(j,k,l)}$  中,  $j+k+l=2$  的所有项表达式).

2. 试写出四体问题的全部三阶摄动项的微商表达式.

3. 说明 (4.28) 式定义的  $\Delta_1$  的几何意义, 并讨论展开式 (4.30) 式的收敛条件, 用太阳系各大行星的轨道根数进行粗略检验.

4. 摄动函数的展开过程和展开结果都是非常繁, 试分析一下展开式成为很繁的主要原因.

5. 如反过来讨论行星  $P'$  在行星  $P$  摄动下的运动, 则相应的摄动函数和展开式有哪些变化?

6. 拉普拉斯系数  $B'_s(\alpha)$  所满足的微分方程为 (4.58) 式,

试把它同超几何级数满足的微分方程

$$(x - x^2) \frac{d^2 F}{dx^2} + [c - (a + b + 1)x] \frac{dF}{dx} - abF = 0$$

进行比较, 其中  $F = F(a, b, c, x)$ , 为超几何级数[参看(1.165)式], 说明(4.58)式为上式的一种特例.

7. 在§4中, 引入了“纽康算子”的定义, 在(4.89)式里只给出了第一, 二阶纽康算子的公式, 即  $n = 1, 2$  的情况, 试求出第三阶纽康算子, 并讨论一下能否求出纽康算子的一般公式.

8. 当摄动行星和被摄动行星的平均角速度  $n, n'$  严格通约时, 相应的长周期摄动项的分母变成 0, 此时能否用这样的方法来讨论摄动运动?

9. 试分析研究太阳系稳定性问题的主要困难.

10. 试说明圆型限制性三体问题中雅哥比积分的力学意义, 并讨论椭圆型限制性三体问题是否存在类似的积分.

## 第 五 章

1. 在(5.29)式中, 若取  $a_0, a_1, a_2, a_3, m, l, p, q, r, s$  的另一组值, 相应的(5.30)式有什么差别? 精度是否有影响?

2. 以(5.30)式为标准, 写出三体问题摄动运动方程(3.21), (3.23)式的计算式子.

3. 一阶常微分方程组是否能用科威耳方法进行数值解? 只从原理上进行讨论, 不必得出具体公式.

4. 根据所用的电子计算机, 编出龙格-库塔方法和第二科威耳方法的计算程序.

5. 试分析恩克变换可以改进碰撞附近运动计算过程的原因, 并讨论还存在什么缺点.

6. 经过梯勒变换后, 圆型限制性三体问题的方程(5.52)

不再包含碰撞奇点,对同样长的时间间隔进行数值解时,用它是否会比用(5.40)式所需的步数少得很多?

## 二 天体力学中常用的天文常数

1. 新天文常数系统. 1964年国际天文学会通过的“国际天文学会天文常数系统”所决定的数值,已从1968年开始在各国天文年历中采用,现选列如下<sup>1)</sup>:

(1) 历书时的秒长: 1900.0时的回归年长度的31556925.9747分之一.

(2) 高斯引力常数

$$k = 0.017202098950000 = 3548''1876069651.$$

以上两个数值是由定义所确定的,是绝对数值,又叫做“定义常数”.

(3) 天文单位长度  $A = 149600000$  公里.

(4) 光速  $C = 299792.5$  公里/秒.

(5) 地球赤道半径  $a = 6378.160$  公里,

地球极半径  $b = 6356.775$  公里.

椭率  $f = \frac{1}{298.25} = 0.0033529.$

(6) 地心引力常数  $GE = 398603$  公里<sup>3</sup>/秒<sup>2</sup>,其中  $G$  为万有引力常数,  $E$  为地球质量.

(7) 地月质量比  $\mu = 81.30.$

(8) 月球恒星运动平均角速度(1900年初)  $n_{\odot}^* = 2.661699489 \times 10^{-6}$  弧度/秒.

(9) 黄经总岁差  $p = 50''2564 + 0''000222t,$

---

1) 参看 The System of Astronomical Constants 载 *IAU Symposium*, No. 21, 1965.

$$\text{赤经岁差 } m = 46''0850 + 0''000279t,$$

$$\text{赤纬岁差 } n = 20''0468 - 0''000085t.$$

$$(10) \text{ 黄赤交角 } \varepsilon = 23^\circ 27' 08'' 26 - 0'' 4684t.$$

$$(11) \text{ 章动常数 } N = 9'' 210.$$

以上的常数又叫做“初始常数”。其中(8)—(11)仍采用旧常数值,  $t$  为从 1900 年起算的儒略年数。

$$(12) \text{ 太阳视差 } \pi_{\odot} = 8'' 794.$$

$$(13) \text{ 一天文单位的光行时间 } \tau = 499^s 012.$$

$$(14) \text{ 光行差常数 } K = 20'' 496.$$

(15) 日心引力常数  $GS = 132718 \times 10^6$  公里<sup>3</sup>/秒<sup>2</sup>, 其中  $S$  为太阳质量。

$$(16) \text{ 日地质量比 } \frac{S}{E} = 332958.$$

$$(17) \text{ 日与地月系质量比 } \frac{S}{E(1+\mu)} = 328912.$$

以上两个数值不能用于行星运动理论, 只能用于地月运动理论。

$$(18) \text{ 地月平均距离 } a_D = 384400 \text{ 公里.}$$

$$(19) \text{ 月球地平视差 } \pi_D = 3422'' 608.$$

## 2. 其他天文常数.

$$(1) \text{ 黄道旋转速度 } \pi = 0'' 4711 - 0'' 000007t.$$

(2) 黄道旋转轴(升交点)黄经

$$\Pi = 173^\circ 57' 03'' 6 + 32'' 862t.$$

$$(3) \text{ 回归年 } 365^d 24219879 - 6^s 14 \times 10^{-9}t,$$

$$\text{恒星年 } 365^d 25636042 + 1^s 1 \times 10^{-9}t,$$

$$\text{近点年 } 365^d 25964134 + 3^s 04 \times 10^{-8}t,$$

$$\text{食年 } 346^d 620031 + 3^d 2 \times 10^{-7}t.$$

$$(4) \text{ 朔望月 } 29^d 5305882 - 2^s 0 \times 10^{-9}t,$$



恒星月  $27^{\circ}32'16.610 - 2^{\circ}0 \times 10^{-9}t$ ,  
 近点月  $27^{\circ}55'45.505 - 1^{\circ}4 \times 10^{-8}t$ ,  
 交点月  $27^{\circ}21'22.200$ .

(5) 地心纬度  $\varphi' = \varphi - 11'32''6267 \sin 2\varphi$   
 $- 1''1629 \sin 4\varphi - 0''0026 \sin 6\varphi$ ,

其中  $\varphi$  为地理纬度.

(6) 地心距

$$\rho = a(0.998327383 - 0.001676157 \cos 2\varphi$$

$$- 3.518 \times 10^{-6} \cos 4\varphi + 8 \times 10^{-9} \cos 6\varphi),$$

其中  $a$  为地球赤道半径.

(7) 地球自转角速度

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.09} = 7.29212 \times 10^{-5} \text{弧度/秒}.$$

3. 大行星轨道根数和质量. 其中轨道根数都是指在摄动计算过程所采用的平均轨道根数; 质量是给出太阳质量同行星质量之比, 选用 1964 年国际天文协会上公布的值, 括号中的值是天文年历中的采用值.

## 水 星

平黄经  $\lambda = 178^{\circ}10'44''68 + 538106654''80T + 1''084T^2$ ,  
 近日点经度  $\pi = 75^{\circ}53'38''51 + 5599''76T + 1''061T^2$ ,  
 升交点经度  $\Omega = 47^{\circ}08'45''40 + 4266''75T + 0''626T^2$ ,  
 轨道倾角  $i = 7^{\circ}00'10''37 - 6''699T - 0''066T^2$ ,  
 偏心率  $e = 0.20561421 + 2.046 \times 10^{-5}T - 3.0 \times 10^{-8}T^2$ ,  
 平均角速度  $n = 14732''4197380 - 1''355 \times 10^{-6}T$ ,  
 半长径  $a = 0.38709860$ ,  
 质量  $S/m = 6110000 \pm 40000$  (6000000).

其中  $T$  为从 1900 年 1 月 0<sup>h</sup>5(U. T.)起算的儒略世纪数,

以下相同。

### 金 星

$$\lambda = 342^{\circ}46'01''39 + 210669162''88T + 1''1148T^2,$$

$$\pi = 130^{\circ}09'49''8 + 5068''93T - 3''515T^2,$$

$$Q = 75^{\circ}46'46''73 + 3239''46T + 1''476T^2,$$

$$i = 3^{\circ}23'37''07 + 3''621T - 0''0035T^2,$$

$$e = 0.00682069 - 4.774 \times 10^{-5}T + 9.1 \times 10^{-8}T^2,$$

$$n = 5767''6697692 + 2''628 \times 10^{-7}T,$$

$$a = 0.72333162,$$

$$S/m = 408539 \pm 12 (408000).$$

### 地 球

$$\lambda = 99^{\circ}41'48''04 + 129602768''13T + 1''089T^2,$$

$$\pi = 101^{\circ}13'15''0 + 6189''03T + 1''63T^2 + 0''012T^3,$$

$$e = 0.01675104 - 4.180 \times 10^{-5}T - 1.26 \times 10^{-7}T^2,$$

$$n = 3548''1928323 - 1''103 \times 10^{-6}T,$$

$$a = 1.00000023.$$

### 火 星

$$\lambda = 293^{\circ}44'51''46 + 68910103''83T + 1''1184T^2,$$

$$\pi = 334^{\circ}13'05''53 + 6626''73T + 0''4675T^2 - 0.0043T^3,$$

$$Q = 48^{\circ}47'11''19 + 2775''57T - 0''005T^2 - 0''0192T^3,$$

$$i = 1^{\circ}51'01''20 - 2''430T + 0''0454T^2,$$

$$e = 0.09331290 + 9.2064 \times 10^{-5}T - 7.7 \times 10^{-8}T^2,$$

$$n = 1886''5186207 + 4''63 \times 10^{-7}T,$$

$$a = 1.52368840,$$

$$S/m = 3050000 (3093500).$$

木 星

轨道历元: 1850年 1月 0<sup>h</sup>5 (U. T.)

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 159^{\circ}56'25''.05, \\ \pi &= 11^{\circ}54'26''.72, \\ \Omega &= 98^{\circ}55'58''.16, \\ i &= 1^{\circ}18'41''.81, \end{aligned} \right\} 1850.0$$

$$\begin{aligned} e &= 0.04825382, \\ n &= 299''.12837656, \\ a &= 5.202802875, \\ S/m &= 1047.41 \pm 0.02 \quad (1047.355). \end{aligned}$$

土 星

轨道历元: 1850年 1月 0<sup>h</sup>5 (U. T.)

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 14^{\circ}49'39''.95, \\ \pi &= 90^{\circ}06'39''.53, \\ \Omega &= 112^{\circ}20'51''.38, \\ i &= 2^{\circ}29'39''.26, \end{aligned} \right\} 1850.0$$

$$\begin{aligned} e &= 0.05606075, \\ n &= 120''.45504214, \\ a &= 9.538843210, \\ S/m &= 3499.6 \pm 0.4 \quad (3501.6). \end{aligned}$$

天 王 星

轨道历元: 1900年 1月 0<sup>h</sup>5 (U. T.)

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 243^{\circ}21'44''.66, \\ \pi &= 169^{\circ}02'55''.6, \\ \Omega &= 73^{\circ}29'24''.9, \\ i &= 0^{\circ}46'21''.60, \end{aligned} \right\} 1900.0$$

$$\begin{aligned}
 e &= 0.04704433, \\
 n &= 42''23434, \\
 a &= 19.190978, \\
 S/m &= 22930 \pm 6(22869).
 \end{aligned}$$

### 海 王 星

轨道历元: 1900年 1月 0<sup>d</sup>5 (U. T.)

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 85^{\circ}01'30''63, \\
 \pi &= 43^{\circ}45'20''2, \\
 Q &= 130^{\circ}40'44''0, \\
 i &= 1^{\circ}46'45''32, \\
 e &= 0.00853341, \\
 n &= 21''53266, \\
 a &= 30.070672, \\
 S/m &= 19070 \pm 21 (19314).
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1900.0$$

### 冥 王 星

轨道历元: 1930年 9月 20<sup>d</sup>0 (U. T.)

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 275^{\circ}15'27''03, \\
 \omega &= 112^{\circ}39'29''74, \\
 Q &= 109^{\circ}37'55''99, \\
 i &= 17^{\circ}6'35''34, \\
 e &= 0.24706226, \\
 n &= 14''199460, \\
 a &= 39.672599, \\
 S/m &= 400000 \pm 40000 (360000).
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1950.0$$

4. 月球轨道根数. 轨道历元: 1900年 1月 0<sup>d</sup>5 (历书时).

$$\begin{aligned} \lambda &= 270^{\circ}434164 + 13^{\circ}1763965269d \\ &\quad - 0^{\circ}001133T^2 + 1^{\circ}9 \times 10^{-6}T^3, \\ \pi &= 334^{\circ}329556 + 0^{\circ}1114040803d \\ &\quad - 0^{\circ}010325T^2 - 1^{\circ}2 \times 10^{-3}T^3, \\ Q &= 259^{\circ}183275 - 0^{\circ}0529532222d \\ &\quad + 0^{\circ}002078T^2 + 2^{\circ} \times 10^{-6}T^3, \\ e &= 0.054900489, \\ i &= 5^{\circ}8'43''.427. \end{aligned}$$

其中  $d$  为 1900 年 1 月 0.5 历书时起算的历书日数,  $T$  为同一起算点的儒略世纪数(以 36525 历书日为单位)。

5. 最新行星质量数值. 近年来利用人造卫星和行星际火箭以及进一步精确研究大小行星的摄动, 得到了大行星质量的更精确值, 已在 1970 年国际天文协会上公布, 但尚未正式采用, 现列如下:

水 星	$5987000 \pm 32000,$
金 星	$408519 \pm 11,$
地月系	$328900.12 \pm 0.20,$
火 星	$3098709 \pm 9,$
木 星	$1047.366 \pm 0.007,$
土 星	$3498.1 \pm 0.4,$
天王星	$22800 \pm 107,$
海王星	$19325 \pm 26,$
冥王星	$1812000 \pm 50000.$

6. 章动表. 目前仍采用伍拉德 (E. W. Woolard) 在 1953 年给出的数表, 现列出如下 (长周期项和短周期项分开):

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= (-17''.2327 - 0''.01737T) \sin Q \\ &\quad + (-1''.2729 - 0''.00013T) \sin (2F - 2D + 2Q) \\ &\quad + (0''.2088 + 0''.00002T) \sin 2Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (0''.1261 - 0''.00031T) \sin M \\
& + (-0''.0497 + 0''.00012T) \sin (M' + 2F - 2D + 2Q) \\
& + (0''.0214 - 0''.00005T) \sin (-M' + 2F - 2D + 2Q) \\
& + (0''.0124 + 0''.00001T) \sin (2F - 2D + Q) \\
& + (0''.0016 - 0''.00001T) \sin 2M' \\
& + (-0''.0015 + 0''.00001T) \sin (2M' + 2F - 2D + 2Q) \\
& + 0''.0045 \sin (-2M + 2F + Q) \\
& + 0''.0045 \sin (2M - 2D) \\
& - 0''.0021 \sin (2F - 2D) \\
& - 0''.0015 \sin (M' + Q) \\
& - 0''.0010 \sin (-M' + Q) \\
& + 0''.0010 \sin (2M - 2F) \\
& - 0''.0005 \sin (-2M + 2D + Q) \\
& - 0''.0005 \sin (-M' + 2F - 2D + Q) \\
& - 0''.0004 \sin (-2M' + 2F - 2D + Q) \\
& + 0''.0004 \sin (2M - 2D + Q) \\
& + 0''.0003 \sin (M' + 2F - 2D + Q) \\
& - 0''.0003 \sin (-2M + 2F + 2Q) \\
& - 0''.0003 \sin (M - D) \\
& - 0''.0002 \sin (M - M' - D).
\end{aligned}$$

以上是黄经章动长周期项。

$$\begin{aligned}
d\psi = & -(0''.2037 + 0''.00002T) \sin (2F + 2Q) \\
& + (0''.0675 + 0''.00001T) \sin M \\
& - (0''.0342 + 0''.00004T) \sin (2F + Q) \\
& - 0''.0261 \sin (M + 2F + 2Q) \\
& - 0''.0149 \sin (M - 2D) \\
& + 0''.0114 \sin (-M + 2F + 2Q) \\
& + 0''.0060 \sin 2D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 0''0058 \sin (M + Q) \\
&- 0''0057 \sin (-M + Q) \\
&- 0''0052 \sin (-M + 2F + 2D + 2Q) \\
&- 0''0044 \sin (M + 2F + Q) \\
&- 0''0032 \sin (2F + 2D + 2Q) \\
&+ 0''0028 \sin 2M \\
&+ 0''0026 \sin (M + 2F - 2D + 2Q) \\
&- 0''0026 \sin (2M + 2F + 2Q) \\
&+ 0''0025 \sin 2F \\
&+ 0''0019 \sin (-M + 2F + Q) \\
&+ 0''0014 \sin (-M + 2D + Q) \\
&- 0''0013 \sin (M - 2D + Q) \\
&- 0''0009 \sin (-M + 2F + 2D + Q) \\
&+ 0''0007 \sin (M' + 2F + 2Q) \\
&- 0''0007 \sin (M + M' - 2D) \\
&- 0''0006 \sin (-M' + 2F + 2Q) \\
&- 0''0006 \sin (M + 2F + 2D + 2Q) \\
&+ 0''0006 \sin (2M + 2F - 2D + 2Q) \\
&- 0''0006 \sin (2D + Q) \\
&+ 0''0006 \sin (M + 2D) \\
&+ 0''0005 \sin (M + 2F - 2D + Q) \\
&- 0''0005 \sin (-2D + Q) \\
&- 0''0005 \sin (2F + 2D + Q) \\
&- 0''0004 \sin (2M + 2F + Q) \\
&+ 0''0004 \sin (M - M') \\
&- 0''0004 \sin (M' - 2D) \\
&- 0''0004 \sin D \\
&+ 0''0004 \sin (M - 2F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 0''.0003 \sin (M + 2F) \\
&- 0''.0003 \sin (M + M') \\
&- 0''.0003 \sin (M - M' + 2F + 2Q) \\
&- 0''.0002 \sin (-2M + Q) \\
&- 0''.0002 \sin (-M + 2F - 2D + Q) \\
&+ 0''.0002 \sin (2M + Q) \\
&- 0''.0002 \sin (-M - M' + 2F + 2D + 2Q) \\
&- 0''.0002 \sin (-M' + 2F + 2D + 2Q) \\
&- 0''.0002 \sin (M + 2Q) \\
&- 0''.0002 \sin (3M + 2F + 2Q) \\
&+ 0''.0002 \sin (M + M' + 2F + 2Q).
\end{aligned}$$

以上是黄经章动短周期项。

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon = &(9''.2100 + 0''.00091T) \cos Q \\
&+ (0''.5522 - 0''.00029T) \cos (2F - 2D + 2Q) \\
&- (0''.0904 - 0''.00004T) \cos 2Q \\
&+ (0''.0206 - 0''.00006T) \cos (M' + 2F - 2D + 2Q) \\
&- (0''.0093 - 0''.00003T) \cos (-M' + 2F - 2D + 2Q) \\
&- 0''.0066 \cos (2F - 2D + Q) \\
&- 0''.0024 \cos (-2M + 2F + Q) \\
&+ 0''.0007 \cos (2M' + 2F - 2D + 2Q) \\
&+ 0''.0008 \cos (M' + Q) \\
&+ 0''.0005 \cos (-M' + Q) \\
&+ 0''.0003 \cos (-2M + 2D + Q) \\
&+ 0''.0003 \cos (-M' + 2F - 2D + Q) \\
&+ 0''.0002 \cos (-2M' + 2F - 2D + 2Q) \\
&- 0''.0002 \cos (2M - 2D + Q) \\
&- 0''.0002 \cos (M' + 2F - 2D + Q) \\
&+ 0''.0002 \cos (-2M + 2F + 2Q).
\end{aligned}$$



以上黄赤交角章动长周期项。

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon = & (0''.0884 - 0''.00005T) \cos(2F + 2Q) \\
 & + (0''.0113 - 0''.00001T) \cos(M + 2F + 2Q) \\
 & + 0''.0183 \cos(2F + Q) \\
 & - 0''.0050 \cos(-M + 2F + 2Q) \\
 & - 0''.0031 \cos(M + Q) \\
 & + 0''.0030 \cos(-M + Q) \\
 & + 0''.0023 \cos(M + 2F + Q) \\
 & + 0''.0022 \cos(-M + 2F + 2D + 2Q) \\
 & + 0''.0014 \cos(2F + 2D + 2Q) \\
 & - 0''.0011 \cos(M + 2F - 2D + 2Q) \\
 & + 0''.0011 \cos(2M + 2F + 2Q) \\
 & - 0''.0010 \cos(-M + 2F + Q) \\
 & - 0''.0007 \cos(-M + 2D + Q) \\
 & + 0''.0007 \cos(M - 2D + Q) \\
 & + 0''.0005 \cos(-M + 2F + 2D + Q) \\
 & - 0''.0003 \cos(M' + 2F + 2Q) \\
 & + 0''.0003 \cos(-M' + 2F + 2Q) \\
 & + 0''.0003 \cos(M + 2F + 2D + 2Q) \\
 & + 0''.0003 \cos(2D + Q) \\
 & - 0''.0003 \cos(M + 2F - 2D + 2Q) \\
 & + 0''.0003 \cos(-2D + Q) \\
 & + 0''.0003 \cos(2M + 2F + Q) \\
 & - 0''.0002 \cos(2M + 2F - 2D + 2Q) \\
 & + 0''.0002 \cos(2M + 2F + Q).
 \end{aligned}$$

以上是黄赤交角章动短周期项。

在上列式中， $M$ ， $M'$  为月球和太阳的平近点角； $F$  为月球的  $\lambda - Q$  或  $M + \pi - Q$ ； $D$  为月球和太阳的平黄经之差

$\lambda - \lambda'$ ;  $Q$  为月球轨道升交点平黄经. 它们的计算公式如下:

$$M = 296^{\circ}06'16''.59 + 477198^{\circ}50'56''.79T \\ + 33''.09T^2 + 0''.0518T^3,$$

$$M' = 358^{\circ}28'33''.00 + 35999^{\circ}02'59''.10T \\ - 0''.54T^2 - 0''.0120T^3,$$

$$F = 11^{\circ}15'03''.20 + 483202^{\circ}01'30''.54T \\ - 11''.56T^2 - 0''.0012T^3,$$

$$D = 350^{\circ}44'14''.95 + 445267^{\circ}06'51''.18T \\ - 5''.17T^2 + 0''.0068T^3,$$

$$Q = 259^{\circ}10'59''.79 + 1934^{\circ}08'31''.23T \\ + 7''.48T^2 + 0''.0080T^3.$$

其中  $T$  的意义同前.

### 三 用高斯方法计算小行星初轨

小行星名: P. O. 84 (紫金山天文台 84 号)

1. 初始数据(有 \* 号的是用来计算轨道的三个观测):

观测时间	(U. T.)	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$
1. * 1964年 10月	30 <sup>d</sup> 60000	0 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 34 <sup>s</sup> .59	+ 11 <sup>°</sup> 39'08''.8
2.	11月 3 <sup>d</sup> 72095	0 <sup>h</sup> 37 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup> .64	+ 9 <sup>°</sup> 30'04''.8
3.	7 <sup>d</sup> 66181	0 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup> 20 <sup>s</sup> .41	+ 7 <sup>°</sup> 33'01''.6
4.	9 <sup>d</sup> 62708	0 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup> 52 <sup>s</sup> .08	+ 6 <sup>°</sup> 37'21''.7
5. *	12 <sup>d</sup> 68472	0 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup> .22	+ 5 <sup>°</sup> 14'57''.8
6. *	12月 25 <sup>d</sup> 45972	1 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 58 <sup>s</sup> .62	- 4 <sup>°</sup> 24'44''.3

观测地点: 中国南京紫金山天文台. 坐标:

$\lambda = 7^{\text{h}}55^{\text{m}}17^{\text{s}}.02$  (E),  $\varphi' = +32^{\circ}03'59''.9$ ,  $\rho_0$  (地心距)  
 $= 6372.5$  (公里)  $= 0.9991063$  (地球赤道半径). 视差改正  
 计算: 上列观测时刻中有 \* 号者为参加轨道计算的三个观测

值。根据天文年历,地方恒星时  $S$  为,

$$S = (M - \lambda) + S^0 + M\mu.$$

其中  $M$  即用世界时 U. T. 表示的观测时间;  $S^0$  为当日格林尼治零时的恒星时;  $M\mu$  为平时化恒星时的改正值;  $S^0$  和  $M\mu$  都可查天文年历得出.

$M$ (U.T.)	10月30 <sup>d</sup> 60000	11月12 <sup>d</sup> 68472	12月25 <sup>d</sup> 45972
	(30 <sup>d</sup> 14 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup> .0)	(12 <sup>d</sup> 16 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup> .0)	(25 <sup>d</sup> 11 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup> .0)
$\lambda$	-7 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> .02		
$m$	10月30 <sup>d</sup> 930058	11月13 <sup>d</sup> 014778	12月25 <sup>d</sup> 789778
	(30 <sup>d</sup> 22 <sup>h</sup> 19 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> .02)	(13 <sup>d</sup> 0 <sup>h</sup> 21 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> .02)	(25 <sup>d</sup> 18 <sup>h</sup> 57 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> .02)
$S^0$	2 <sup>h</sup> 33 <sup>m</sup> 20 <sup>s</sup> .862	3 <sup>h</sup> 24 <sup>m</sup> 36 <sup>s</sup> .076	6 <sup>h</sup> 14 <sup>m</sup> 08 <sup>s</sup> .057
$\mu M$	2 <sup>m</sup> 21 <sup>s</sup> .933	2 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup> .975	1 <sup>m</sup> 48 <sup>s</sup> .750
$S$	10月31 <sup>d</sup> 0 <sup>h</sup> 54 <sup>m</sup> 59 <sup>s</sup> .815	11月13 <sup>d</sup> 3 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 35 <sup>s</sup> .071	12月26 <sup>d</sup> 1 <sup>h</sup> 13 <sup>m</sup> 13 <sup>s</sup> .827
	(13 <sup>o</sup> 44'57".30)	(57 <sup>o</sup> 08'46".05)	(18 <sup>o</sup> 18'27".45)
$\cos S$	0.9713455	0.5424986	0.9493844
$\sin S$	0.2376718	0.8400567	0.3141167
$\cos \varphi'$	0.8474309		
$\sin \varphi'$	0.5309056		
$\rho_0$	0.9991063 (地球赤道半径)		
$p_0$	8".86	8".89	8".95
$\Delta X$	-0.0000354	-0.0000198	-0.0000349
$\Delta Y$	-0.0000086	-0.0000307	-0.0000116
$\Delta Z$	-0.0000228	-0.0000229	-0.0000230
(X) (查天文年历)	-0.7928164	-0.6343008	+0.0600646
(Y)	-0.5481035	-0.6967466	-0.9005600
(Z)	-0.2376783	-0.3021430	-0.3905219
$X$	-0.7928518	-0.6343206	+0.0600297
$Y$	-0.5481121	-0.6967773	-0.9005716

$$Z \quad -0.2377011 \quad -0.3021659 \quad -0.3905449$$

2. 辅助量计算:

$\cos \alpha$	0.9865889	0.9848555	0.9336164
$\sin \alpha$	0.1632248	0.1733775	0.3582743
$\cos \delta$	0.9793908	0.9958059	0.9970363
$\sin \delta$	0.2019745	0.0914910	-0.0769333
$a$	0.9662561	0.9807249	0.9308494
$b$	0.1598609	0.1726503	0.3572125
$c$	0.2019745	0.0914910	-0.0769333
$2R \cos \theta$	1.8034582	1.5400766	0.4715418
$R^2$	0.9855427	0.9791655	0.9671581

列出基本方程

$$\begin{array}{cccccc} n_1 \rho_1 & \rho_2 & n_3 \rho_3 & n_1 & & n_3 \\ \textcircled{1} 0.9662561 & -0.9807249 & +0.9308494 & -0.7928518 & +0.6343206 & +0.0600297 \\ \textcircled{2} 0.1598609 & -0.1726503 & +0.3572125 & -0.5481121 & +0.6967773 & -0.9005716 \\ \textcircled{3} 0.2019745 & -0.0914910 & -0.0769333 & -0.2377011 & +0.3021659 & -0.3905449 \end{array}$$

先消去  $n_3 \rho_3$ , 得两个方程; 而后再消去  $n_1 \rho_1$  得

$$-D \rho_2 = n_1 d_1 - d_2 + n_3 d_3. \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} D &= +0.0745595, & d_1 &= +0.4708080, \\ d_2 &= +0.7187516, & d_3 &= +1.2121982. \end{aligned}$$

3. 第一次近似:

$t - t'$	42 <sup>d</sup> 77500	55 <sup>d</sup> 85972	13 <sup>d</sup> 08472
$K$	0.01720210		
$\tau$	0.7358198	0.9609045	0.2250847
$n_{1,3}^0$	0.7657575		0.2342425
$\nu_{1,3}^0$	0.0487413		0.0340695
$K_0$	0.9962313		

$$l_0 \quad 0.8616847$$

由此得到第一次近似的  $\rho_2, r_2$  方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= K_0 - \frac{l_0}{r_2^3}, \\ r_2^2 &= R_2^2 + 2R_2 \cos \theta_2 \rho_2 + \rho_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

用迭代法解 (2) 得出:

$\rho_2$	0.8242396		
$r_2^2$	2.9279285		
$r_2^{-3}$	0.1995995		
$v_1/r_2^3$	0.0097287	$v_3/r_2^3$	0.0068002
$n_1^0$	0.7657575	$n_3^0$	0.2342425
$n_1$	0.7754862	$n_3$	0.2410427

代入基本方程解出  $\rho_i$ , 即可求出相应的  $r_i$  和  $x_i, y_i, z_i$ :

	1	2	3
$\rho_i$	0.7719619	0.8242396	1.1759443
$r_i^2$	2.9736689	2.9279285	2.9045100
$r_i$	1.7244329	1.7111191	1.7042623
$x_i$	1.5387647	1.4426729	1.0345973
$y_i$	0.6715186	0.8390825	1.3206336
$z_i$	0.3936177	0.3775764	0.3000756

#### 4. 第二次近似: $A = 0^{\circ}005772$

$A\rho_i$	0.0044558	0.0047575	0.0067876
$t_i^0$	30^{\circ}5955442	12^{\circ}6799625	25^{\circ}4529324
$t^0 - t_i^0$	42^{\circ}7729699	55^{\circ}8573882	13^{\circ}0844183
$\tau_i^0$	0.7357849	0.9608644	0.2250795
$(\tau_i^0)^2$	0.5413794	0.9232604	0.0506608
$n_{1,3}^0$	0.7657531		0.2342469
$K^2$	11.2604066	11.0716657	11.7654490

$K$	3.3556530	3.3274113	3.4300801
$r + r'$	3.4153814	3.4286952	3.4355520
$(r + r')/2$	1.7076907	1.7143476	1.7177760
$K/3$	1.1185510	1.1091371	1.1433600
$\frac{r + r'}{2} + \frac{K}{3}$	2.8262417	2.8234847	2.8611360
$K^2 \left( \frac{r + r'}{2} + \frac{K}{3} \right)$	31.8246307	31.2606787	33.6625497
$h$	0.0170113	0.0295342	0.0015050
$\bar{y}$	1.0185240	1.0317097	1.0016691
$\bar{y}_2/\bar{y}_{1,3}$	1.0129459		1.0299905
$n_{1,3}$	0.7756665		0.2412721
$n_{1,3}^0 (\bar{y}_2/\bar{y}_{1,3} - 1)$	0.0099134		0.0070252
$v_{1,3}$	0.0496665		0.0351965
$K_0$	0.9961875		
$l_0$	0.8858498		

再用迭代法解方程组(2), 得出:

$\rho_2$	0.8173747		
$r_2^2$	2.9060865		
$r_2^{-3}$	0.2018539		
$v_{1,3}/r_2^3$	0.0100254		0.0071046
$n_{1,3}$	0.7757785		0.2413515

以  $n_1, n_3$  代入基本方程组算出  $\rho_i, r_i, x_i, y_i, z_i$  为:

$\rho_i$	0.7653040	0.8173747	1.1647672
$r_i^2$	2.9514267	2.9060865	2.8730772
$r_i$	1.7179717	1.7047248	1.6950154
$x_i$	1.5323314	1.4359403	1.0241931
$y_i$	0.6704543	0.8378973	1.3166410

$z_i$	0.3922730	0.3769483	0.3009355
5. 第二次近似值的改进:			
$K^2$	11.1537240	10.9643764	11.6772878
$K$	3.3397192	3.3112500	3.4172047
$r + r'$	3.3997402	3.4129871	3.4226965
$(r + r')/2$	1.6998701	1.7064936	1.7113482
$K/3$	1.1132397	1.1037500	1.1390682
$\frac{r + r'}{2} + \frac{K}{3}$	2.8131098	2.8102436	2.8504164
$K^2 \left( \frac{r + r'}{2} + \frac{K}{3} \right)$	31.3766503	30.8125686	33.2851326
$h$	0.0172542	0.0299638	0.0015220
$\bar{y}$	1.0187833	1.0321557	1.0016880
$\bar{y}_2/\bar{y}_{1,3}$	1.0131258		1.0304164
$n_{1,3}$	0.7758042		0.2413718
$n_{1,3}^0 \left( \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_{1,3}} - 1 \right)$	0.0100511		0.0071249
$\nu_{1,3}$	0.0497939		0.0352973
$K_0$	0.9961875		
$l_0$	0.8882931		

用迭代法解方程组 (2), 得:

$\rho_2$	0.8166769		
$r_2^2$	2.9038716		
$l/r_2^3$	0.1795106		
$\nu_{1,3}/r_2^3$	0.0100626		0.0071330
$n_{1,3}$	0.7758157		0.2413799

再用得出的  $n_1, n_3$  代入基本方程解出  $\rho_i, x_i, y_i, z_i$  为:

$\rho_i$	0.7646144	0.8166769	1.1643799
----------	-----------	-----------	-----------

$r_i^2$	2.9491280	2.9038716	2.8719924
$r_i$	1.7173025	1.7040750	1.6946954
$x_i$	1.5316651	1.4352560	1.0238326
$y_i$	0.6703440	0.8377768	1.3165026
$z_i$	0.3921337	0.3768845	0.3009653

由于以上得出的相邻两次的  $n_1$ ,  $n_3$  相差较大,故还需再改进一次,即再行计算:

$K^2$	11.1474288	10.9560032	11.6682764
$K$	3.3387765	3.3099854	3.4158859
$r + r'$	3.3987704	3.4119979	3.4213775
$(r + r')/2$	1.6993852	1.7059990	1.7106888
$K/3$	1.1129255	1.1033285	1.1386286
$\frac{r + r'}{2} + \frac{K}{3}$	2.8123107	2.8093275	2.8493174
$K^2\left(\frac{r + r'}{2} + \frac{K}{3}\right)$	31.3500333	30.7790011	33.2466230
$h$	0.0172689	0.0299964	0.0015238
$\bar{y}$	1.0187989	1.0321895	1.0016880
$\bar{y}_2/\bar{y}_{1,3}$	1.0131435		1.0304501
$n_{1,3}$	0.7758178		0.2413797
$n_{1,3}^0(\bar{y}_2/\bar{y}_{1,3} - 1)$	0.0100647		0.0071328
$v_{1,3}$	0.0498043		0.0352960
$K_0$	0.9961875		
$l_0$	0.8883376		

再代入方程组(2),用迭代法计算出:

$\rho_1$	0.8166640
$r_1^2$	2.9038307
$r_1^{-3}$	0.2020892



$l_0/r_2^3$	0.1795234	
$v_{1,3}/r_2^3$	0.0100649	0.0071329
$n_{1,3}$	0.7758180	0.2413798

上面得出的  $n_1, n_3$  与上次得出的比较, 差别在精度范围之内. 因此以  $n_1, n_3$  代入基本方程组, 重新计算出  $\rho_i, r_i, x_i, y_i, z_i$ , 并用以计算轨道根数.

$\rho_i$	0.7645989	0.8166640	1.1636189
$r_i^2$	2.9490763	2.9038307	2.8698620
$r_i$	1.7172875	1.7040630	1.6940667
$x_i$	1.5316502	1.4352433	1.0231242
$y_i$	0.6703416	0.8377746	1.3162308
$z_i$	0.3921306	0.3768833	0.3010239

#### 6. 轨道根数的求出:

$\sigma$	0.8705890		
$x_0$	-0.3103136	$\sigma r_1$	1.4950516
$y_0$	0.7326388	$r_0^2$	0.6346831
$z_0$	-0.0403607	$r_0$	0.7966700
$\sin(f_3 - f_1)$	0.4702707		
$\cos(f_3 - f_1)$	0.8825223		
$f_3 - f_1$	$28^\circ 03' 06''.72$		
$r_0 r_1$	1.3681114		
$r_0 r_1 / r_2$	1.4238340		
$\sqrt{p}$	1.4696665		
$p$	2.1599196		
$q_1$	0.2577507	$q_3$	0.2749909
$e \sin f_1$	-0.1010485		
$\lg f_1$	-0.3920397		
$f_1$	$338^\circ 35' 34''.26$	$f_3$	$6^\circ 38' 40''.98$

$f_1/2$	169°17'47"13	$f_2/2$	3°19'20"49
$\text{tg} \frac{f_1}{2}$	0.1890166	$\text{tg} \frac{f_2}{2}$	0.05805117
$e$	0.2768505	$e^2$	0.0766462
$e^0$	15°8623709		
$a$	2.3392112		
$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$	0.7525650		
$\text{tg} \frac{E_1}{2}$	0.1422473	$\text{tg} \frac{E_2}{2}$	0.0436873
$E_1$	343°48'29"84	$E_2$	5°00'10"86
$\sin E_1$	-0.2788522	$\sin E_2$	0.8720819
$e^0 \sin E_1$	-4°25'23"72	$e^0 \sin E_2$	1°22'59"98
$M_1$	348°13'53"56	$M_2$	3°37'10"86
$n$	0.2754898		
$t_0$ (軌道历元)	1965 .1. 0 <sup>h</sup> 00 (U. T.) $J_0$ 2438760.5		
$t_0 - t_{1,2}^0$	61 <sup>d</sup> 4044558		5 <sup>d</sup> 5470676
$M_0$	5°08'52"24		
$\frac{\cos f_1}{r_1}$	0.5421400	$\frac{\sin f_1}{r_0}$	-0.4581482
$\frac{\sin f_1}{r_1}$	-0.2125404	$\frac{\cos f_1}{r_0}$	1.1686273
$x_1 \frac{\cos f_1}{r_1}$	0.8303688	$x_0 \frac{\sin f_1}{r_0}$	0.1421696
$y_1 \frac{\cos f_1}{r_1}$	0.3634190	$y_0 \frac{\sin f_1}{r_0}$	-0.3356571
$z_1 \frac{\cos f_1}{r_1}$	0.2125897	$z_0 \frac{\sin f_1}{r_0}$	0.0184912
$x_1 \frac{\sin f_1}{r_1}$	-0.3255375	$x_0 \frac{\cos f_1}{r_0}$	-0.3626409

$y_1 \frac{\sin f_1}{r_1}$	-0.1424747	$y_0 \frac{\cos f_1}{r_0}$	0.8561700
$z_1 \frac{\sin f_1}{r_1}$	-0.0833436	$z_0 \frac{\cos f_1}{r_0}$	-0.0471666
$P_x$	0.6881992	$Q_x$	-0.6881784
$P_y$	0.6990761	$Q_y$	0.7136953
$P_z$	0.1940985	$Q_z$	-0.1305102
$E_{1950.0}$	23° 26' 44" 84		
$\cos \varepsilon$	0.9174370	$\sin \varepsilon$	0.3978812
$P_x \cos \varepsilon$	0.1780731	$P_y \sin \varepsilon$	0.2781492
$Q_x \cos \varepsilon$	-0.1197349	$Q_y \sin \varepsilon$	0.2839659
$\sin i \sin \omega$	-0.1000761	$\sin i \cos \omega$	-0.4037008
$\lg \omega$	0.2478967	$\omega$	193° 55' 21" 96
$\cos \omega$	-0.9706210	$\sin \omega$	-0.2406137
$P_y \cos \omega$	-0.6785379	$Q_y \sin \omega$	-0.1717249
$P_x \cos \omega$	-0.6679806	$Q_x \sin \omega$	0.1655852
$\cos Q$	-0.8335658	$\sin Q$	-0.5524227
$\lg Q$	0.6627224	$Q$	213° 31' 59" 98
$P_x \sin \omega$	-0.1655902	$Q_x \cos \omega$	0.6679604
$\sin i$	0.4159201	$\cos i$	0.9093946
$\lg i$	0.4573593	$i$	24° 34' 38" 97

将上面计算的轨道根数归纳如下:

轨道历元	1965年1月0 <sup>d</sup> 00 (U. T.) = JD 2438760.5		
$a$	2.3392112	$i$	24° 34' 38" 97
$e$	0.2768505	$Q$	213° 31' 59" 98
$\pi$	0° 2754898	$\omega$	193° 55' 21" 96
$M_0$	5° 08' 52" 24		

### 7. 星历表计算, 同观测值比较

	1	2	3
$M$	$348^{\circ}13'53''56$	$351^{\circ}50'10''20$	$3^{\circ}37'10''86$
$E$	$343^{\circ}48'29''84$	$348^{\circ}44'18''37$	$5^{\circ}00'10''86$
$\sin E$	-0.2788522	-0.1952880	0.0872082
$\cos E$	0.9603340	0.9807459	0.9961911
$\cos E - e$	0.6834835	0.7038954	0.7193406
$a(\cos E - e)$	1.5988122	1.6465600	1.6826896
$a\sqrt{1-e^2}$	2.2477784		
$a\sqrt{1-e^2} \sin E$	-0.6267980	-0.4389641	0.1960247
$P_x a(\cos E - e)$	1.1003013	1.1331613	1.1580256
$Q_x a \sqrt{1-e^2} \sin E$	0.4313488	0.3020856	-0.1349000
$x$	1.5316501	1.4352469	1.0231256
$P_y a(\cos E - e)$	1.1176914	1.1510707	1.1763281
$Q_y a \sqrt{1-e^2} \sin E$	-0.4473428	-0.3132866	0.1399019
$y$	0.6703486	0.8377841	1.3162300
$P_z a(\cos E - e)$	0.3103270	0.3195948	0.3266076
$Q_z a \sqrt{1-e^2} \sin E$	0.0818035	0.0572893	-0.0255832
$z$	0.3921305	0.3768841	0.3010244
$\rho \cos \alpha \cos \delta$	0.7387983	0.8009263	1.0831553
$\rho \sin \alpha \cos \delta$	0.1222365	0.1410068	0.4156584
$\rho \sin \delta$	0.1544294	0.0747182	-0.0895205
$\operatorname{tg} \alpha$	0.1654531	0.1760546	0.3837477
$\rho \cos \delta$	0.7488422	0.8132440	1.1601712
$\operatorname{tg} \delta$	0.2062242	0.0918767	-0.0771614
$\alpha_c$	$9^{\circ}23'40''76$	$9^{\circ}59'05''51$	$20^{\circ}59'39''09$
$\delta_c$	$11^{\circ}39'08''72$	$5^{\circ}14'57''88$	$-4^{\circ}24'44''21$
$\Delta \alpha$	-1''91	-2''21	+0''21
$\Delta \delta$	+0''08	-0''08	+0''09

$$O-C \begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta & -1''.87 & -2''.20 & +0''.21 \\ \Delta\delta & +0''.08 & -0''.08 & +0''.09 \end{cases}$$

以上结果表明：初轨计算的内符合精确到 0.1 时秒和角秒。下面再用未参加轨道计算的其他三个观测值检验。

	1	2	3
$t^0$	3 <sup>d</sup> 7163992	7 <sup>d</sup> 6571683	9 <sup>d</sup> 6223930
$M$	-10°37'59".53	-9°32'51".22	-9°00'21".18
$E$	-14°38'35".35	-13°09'30".91	-12°24'59".70
$\sin E$	-0.2527981	-0.2276471	-0.2150180
$\cos E$	0.9675190	0.9737502	0.9766101
$\cos E - e$	0.6906686	0.6968997	0.6997596
$a(\cos E - e)$	1.6156197	1.6301956	1.6368855
$a\sqrt{1-e^2}$	2.2477784		
$a\sqrt{1-e^2} \sin E$	-0.5682342	-0.5117002	-0.4833128
$P_x a(\cos E - e)$	1.1118682	1.1218993	1.1265033
$Q_x a \sqrt{1-e^2} \sin E$	0.3910465	0.3521410	0.3326054
$x$	1.5029147	1.4740403	1.4591087
$P_y a(\cos E - e)$	1.1294411	1.1396308	1.1443075
$Q_y a \sqrt{1-e^2} \sin E$	-0.4055461	-0.3651980	-0.3449381
$y$	0.7238950	0.7744328	0.7993694
$P_z a(\cos E - e)$	0.3135894	0.3164185	0.3177170
$Q_z a \sqrt{1-e^2} \sin E$	0.0741604	0.0667821	0.0630772
$z$	0.3877498	0.3832006	0.3807942
$\rho \cos \alpha \cos \delta$	0.7558938	0.7744756	0.7844609
$\rho \sin \alpha \cos \delta$	0.1254817	0.1308137	0.1343368
$\rho \sin \delta$	0.1282381	0.1040859	0.0923952
$\lg \alpha$	0.1660044	0.1689062	0.1712473
$\rho \cos \delta$	0.7662383	0.7854455	0.7958759

$\operatorname{tg} \delta$	0.1673606	0.1325183	0.1160905
$\alpha_c$	$9^{\circ}25'31''.44$	$9^{\circ}35'13''.65$	$9^{\circ}43'02''.99$
$\delta_c$	$9^{\circ}30'03''.61$	$7^{\circ}32'55''.52$	$6^{\circ}37'18''.68$
$\Delta\alpha$	$-2''.99$	$-0''.85$	$-5''.98$
$\Delta\delta$	$+1''.27$	$+6''.08$	$-3''.02$
O-C	$\begin{cases} \Delta\alpha \cos \delta & -2''.90 \\ \Delta\delta & +1''.27 \end{cases}$	$\begin{cases} -0''.83 \\ +6''.08 \end{cases}$	$\begin{cases} -5''.94 \\ -3''.02 \end{cases}$

检验结果可知,  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  都较大, 因此在正式使用时还需作轨道改进.

#### 四 用奥耳白尔方法计算彗星的抛物线初轨

彗星名: 1955 f (1955 IV); 观测地点: 南京紫金山天文台

##### 1. 初始数据

观测时间* (U. T.)	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$
1. 1955年10月21 <sup>d</sup> 56010	$19^{\text{h}}57^{\text{m}}56^{\text{s}}.65$	$+58^{\circ}58'33''.5$
2. 11月7 <sup>d</sup> 50135	$20^{\text{h}}26^{\text{m}}54^{\text{s}}.36$	$+57^{\circ}36'03''.4$
3. 11月12 <sup>d</sup> 51921	$20^{\text{h}}37^{\text{m}}19^{\text{s}}.25$	$+57^{\circ}14'29''.7$

\* 观测时间已消除光行差. 由于精度不高, 观测值在以下计算中准到角秒.

	1	2	3
X	-0.8845212	-0.7101374	-0.6458819
Y	-0.4187590	-0.6340024	-0.6880107
Z	-0.1816037	-0.2749520	-0.2983737
$\cos \alpha$	0.4922126	0.5979944	0.6337897
$\sin \alpha$	-0.8704750	-0.8015003	-0.7735054
$\cos \delta$	0.5153954	0.5358145	0.5410968

$a$	0.2536841	0.3204141	0.3429416
$b$	-0.4486388	-0.4294555	-0.4185413
$c$	0.8569525	0.8443357	0.8409603
$R_1^2$	0.9907168	$R_3^2$	0.9795490
$2R_1 \cos \theta_1$	0.3842864	$2R_3 \cos \theta_3$	0.3689186
$b_2 Z_2$	0.1180796	$c_2 X_2$	-0.5995944
$c_2 Y_2$	-0.5353109	$a_2 Z_2$	-0.2031433
$A$	+0.6533905	$B$	-0.5114959
$C$	-0.5081157	$C$	-0.5081157
$t_3 - t_2$	5 <sup>d</sup> 01786	$t_3 - t_1$	21 <sup>d</sup> 95911
$t_2 - t_1$	16 <sup>d</sup> 94125		

2. 第一次近似:

$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1$	-0.0401993	$Aa_3 + Bb_3 + Cc_3$	0.0108518
$M$	1.09702101	$2K$	0.0344042
$X_1 - X_3$	-0.2386393	$a_3 M - a_1$	0.1225949
$Y_1 - Y_3$	+0.2692517	$b_3 M - b_1$	-0.0105889
$Z_1 - Z_3$	+0.1167700	$c_3 M - c_1$	0.0657576
$g^2$	0.1430804	$g$	0.3782597
$h^2$	0.0194657	$h$	0.1395195
$2gh \cos \lambda$	-0.0488570	$2K(t_3 - t_1)$	0.7554856

由上列数据列出基本方程:

$$\begin{cases} S_g^2 = 0.1430804 - 0.0488570\rho_1 + 0.0194657\rho_1^2 \\ r_1^2 = 0.9907168 + 0.3842864\rho_1 + \rho_1^2 \\ r_3^2 = 0.9795490 + 0.3689186(M\rho_1) + (M\rho_1)^2 \\ S_d = (r_1 + r_3)\eta\mu, \quad \eta = 0.7554856(r_1 + r_3)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

给定  $\rho_1$  的近似值为 1.8852569, 并以此代入基本方程, 用逐次近似法迭代解出  $S_g$  和  $S_d$ , 直至  $|S_g - S_d|$  的误差在所要求的精度范围之内 (在此例中, 只准至小数点后面第五位.), 其过程为:

$\rho_1$	1.8852569	1.88631	1.886308
----------	-----------	---------	----------

$\rho_2$	3.5541936	3.5581654	3.5581579
$S_2^2$	0.1201573	0.1201831	0.1201831
$r_1^2$	5.2693890	5.2737655	5.2737572
$\rho_3$	2.0685229	2.0696784	2.0696762
$r_3^2$	6.0214526	6.0266605	6.0266506
$r_1$	2.2955150	2.2964681	2.2964662
$r_3$	2.4538648	2.4549258	2.4549238
$r_1 + r_3$	4.7493798	4.7513939	4.7513900
$\sqrt{r_1 + r_3}$	2.1793072	2.1797692	2.1797683
$(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}$	10.3503576	10.3569421	10.3569293
$\eta$	0.0729912	0.0729488	0.0729449
$\eta\mu$	0.0730072	0.0729648	0.0729609
$S_d$	0.3467389	0.3466845	0.3466657
$S_g$	0.3466371	0.3466743	0.3466743
$S_g - S_d$	-0.0001018	-0.0000102	+0.0000086

由于观测时间间隔较长,且  $t_2 - t_1$  与  $t_3 - t_1$  之间相差较大,故需作第二次近似。

### 3. 第二次近似及以后的改进:

$\tau$	0.0863177	0.3777428	0.2914251
$\tau_1/\tau_3$	0.2961917	$r_1 + r_3$	4.7513900
$\frac{4}{3} \frac{\tau_1\tau_2(\tau_3 - \tau_1)}{\tau_3(r_1 + r_3)^3}$	0.0002853	$\frac{4\tau_1^2(r_3 - r_1)}{(r_1 + r_3)^4}$	0.0000093
$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3} + \frac{4}{3} \frac{\tau_1\tau_2(\tau_3 - \tau_1)}{\tau_3(r_1 + r_3)^3} + \frac{4\tau_1^2(r_3 - r_1)}{(r_1 + r_3)^4}$	= 0.2964863		
$AX_1 + BY_1 + CZ_1$	-0.2714685	$AX_3 + BY_3 + CZ_3$	0.0815099
$M$	1.0983009	$m$	0.0942885
$m/\rho_1$	0.04998786	$(\rho_1 = 1.886308)$	
$(M)$	1.1482888		



将所得的 (M) 重行计算:

$$\begin{array}{rcll}
 a_3 M - a_1 & 0.1401119 & g^2 & 0.1430804 \\
 b_3 M - b_1 & -0.0319675 & h^2 & 0.0323630 \\
 c_3 M - c_1 & 0.1087128 & 2gh \cos X & -0.0586982
 \end{array}$$

代入基本方程, 得:

$$\begin{cases}
 S_g^2 = 0.1430804 - 0.0586982\rho_1 + 0.0323630\rho_1^2 \\
 r_1^2 = 0.9907168 + 0.3842864\rho_1 + \rho_1^2 \\
 r_3^2 = 0.9795490 + 0.3689186[(M)\rho_1] + [(M)\rho_1]^2 \\
 S_d = (r_1 + r_3)\eta\mu, \quad \eta = 0.7554856(r_1 + r_3)^{-\frac{1}{2}}
 \end{cases}$$

在第一次近似的基础上, 将上列基本方程组进行逐次迭代, 其过程与第一次近似类同, 结果得:

$$\begin{array}{rcl}
 \rho_1 & 1.61231 \\
 \rho_1^2 & 2.5995435 \\
 S_g^2 & 0.1325697 \\
 r_1^2 & 4.2098491 \\
 \rho_3 & 1.8513975 \\
 r_3^2 & 5.0902367 \\
 r_1 & 2.2561553 \\
 r_3 & 2.0517917 \\
 r_1 + r_3 & 4.3079470 \\
 \sqrt{r_1 + r_3} & 2.0755594 \\
 (r_1 + r_3)^{\frac{1}{2}} & 8.9413999 \\
 \eta & 0.0844930 \\
 \eta\mu & 0.0845185 \\
 S_d & 0.3641012 \\
 S_g & 0.3641013 \\
 S_g - S_d & +0.0000001
 \end{array}$$

由于 (M) 与第一次近似的 M 值相差较大, 故需再进行改进,

即在第二次近似的基础上计算:

$n_1/n_3$	0.2965921		
$M$	1.0986928	$m$	0.09164378
$m/\rho_1$	0.0568400	$(\rho_1 = 1.61231)$	
$(M)$	1.1555328		
$a_3(M) - a_1$	0.1425962	$g^2$	0.1430804
$b_3(M) - b_1$	-0.0349994	$h^2$	0.0347388
$c_3(M) - c_1$	0.1148047	$2gh \cos \lambda$	-0.0600940

列出基本方程组:

$$\begin{cases} S_g^2 = 0.1430804 - 0.0600940\rho_1 + 0.0347388\rho_1^2 \\ r_1^2 = 0.9907168 + 0.3842864\rho_1 + \rho_1^2 \\ r_3^2 = 0.9795490 + 0.3689186[(M)\rho_1] + [(M)\rho_1]^2 \\ S_d = (r_1 + r_3)\eta\mu, \quad \eta = 0.7554856(r_1 + r_3)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

再行迭代, 逐次近似得出:

$\rho_1$	1.57385
$\rho_1^2$	2.4770038
$S_g^2$	0.1345496
$r_1^2$	4.0725298
$\rho_3$	1.8186353
$r_3^2$	4.9579578
$r_1$	2.0180597
$r_3$	2.2266472
$r_1 + r_3$	4.2447069
$\sqrt{r_1 + r_3}$	2.0602686
$(r_1 + r_3)^{\frac{1}{2}}$	8.7452363
$\eta$	0.0863882
$\eta\mu$	0.0864156
$S_d$	0.3668089

$$S_g \quad 0.3668107$$

$$S_g - S_d \quad +0.0000018$$

4. 计算轨道根数:

	1		3
$\rho_1$	1.57385	$\rho_3$	1.8186353
$x$	1.2837819		1.2695676
$y$	-0.2873312		-0.0731633
$z$	1.5303184		1.8277738
$r^2$	4.0725296		4.9579118
$r$	2.0180510		2.2266369
$\sigma$	1.0921826		
$x_0$	-0.1325566		
$y_0$	+0.2406548		
$z_0$	+0.1563867		
$r_0^2$	0.0999428		
$r_0$	0.3161373		
$\sin 2f$	0.1419797	$\cos 2f$	0.9898696
$\operatorname{tg} 2f$	0.1434327	$2f$	$8^\circ 09' 45'' 0$
$\sin f$	0.07117103	$\cos f$	0.99746412
		$\operatorname{ctg} f$	14.015030
$\frac{r_1}{r_3}$	0.9063224	$\sqrt{\frac{r_1}{r_3}}$	0.9520097
$\sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \operatorname{csc} f$	13.3763654		
$\frac{1}{2} \nu_1$	$32^\circ 33' 54'' 00$	$\frac{1}{2} \nu_3$	$36^\circ 38' 46'' 5$
$\sigma_1$	0.6386646	$\sigma_3$	0.7439187
$q$	1.4333831	$\sqrt{q}$	1.1972398
$q^{\frac{3}{2}}$	1.7161033		

$M_1$	59.6445966	$M_2$	72.4408888
$t_1^0 - T$	102.356289	$t_2^0 - T$	124.316048
$T$	JD 2435299.203486 即 1955 年 7 月 11 <sup>d</sup> 203486		
$\nu_1$	65°07'48"		
$\cos \nu_1$	0.4205608	$\sin \nu_1$	0.9072643
$\frac{\cos \nu_1}{r_1}$	0.2083995	$\frac{\sin \nu_1}{r_0}$	2.8698426
$x_1 \frac{\cos \nu_1}{r_1}$	0.2675395	$x_0 \frac{\sin \nu_1}{r_0}$	-0.3804166
$y_1 \frac{\cos \nu_1}{r_1}$	-0.0598797	$y_0 \frac{\sin \nu_1}{r_0}$	0.6906414
$z_1 \frac{\cos \nu_1}{r_1}$	0.3189176	$z_0 \frac{\sin \nu_1}{r_0}$	0.4488052
$\frac{\sin \nu_1}{r_1}$	0.4495745	$\frac{\cos \nu_1}{r_0}$	1.3303106
$x_1 \frac{\sin \nu_1}{r_1}$	0.5771556	$x_0 \frac{\cos \nu_1}{r_0}$	-0.1763414
$y_1 \frac{\sin \nu_1}{r_1}$	-0.1291768	$y_0 \frac{\cos \nu_1}{r_0}$	0.3201456
$z_1 \frac{\sin \nu_1}{r_1}$	0.6879921	$z_0 \frac{\cos \nu_1}{r_0}$	0.2080429
$P_x$	0.6479561	$Q_x$	0.4008142
$P_y$	-0.7505211	$Q_y$	0.1909688
$P_z$	-0.1298876	$Q_z$	0.8960350
$\epsilon$	23°26'44".84		
$\cos \epsilon$	0.9174370	$\sin \epsilon$	0.3978812
$P_x \cos \epsilon$	-0.1191640	$P_y \sin \epsilon$	-0.2986182
$Q_x \cos \epsilon$	0.8220557	$Q_z \sin \epsilon$	0.0759829

$\sin i \sin \omega$	0.1794542	$\sin i \cos \omega$	0.7460728
$\text{ctg} \omega$	4.1574552	$\omega$	$13^{\circ}31'28''.66$
$\cos \omega$	0.9722695	$\sin \omega$	0.2338634
$P_y \cos \omega$	-0.7297088	$Q_y \sin \omega$	0.0446606
$P_x \cos \omega$	0.6299880	$Q_x \sin \omega$	0.0937358
$\sin Q$	-0.8440573	$\cos Q$	0.5362522
$\text{ctg} Q$	-0.6353268	$Q$	$302^{\circ}25'44''.00$
$P_x \sin \omega$	0.1515332	$Q_x \cos \omega$	0.3896994
$\cos i$	0.6412273	$\sin i$	0.7673516
$\lg i$	1.1966920	$i$	$50^{\circ}06'59''.85$

轨道根数归纳如下:

彗星过近日点时刻  $T$ : 1955 年 7 月 11<sup>d</sup>203486

$q$	1.4333831
$\omega$	$13^{\circ}31'28''.66$
$Q$	$302^{\circ}25'44''.00$
$i$	$50^{\circ}06'59''.85$

5. 同观测值相比较:

	1	2	3
$t$	2435401.56010	2435418.50135	2435423.51921
$M$	59.6445966	69.5167150	72.4408888
$\sigma$	0.6386646	0.7206454	0.7439187
$1 - \sigma^2$	0.5921075	0.4806702	0.4465850
$qP_x$	0.9287693	$2qQ_x$	1.1490406
$qP_y$	-1.0757843	$2qQ_y$	0.5474629
$qP_z$	-0.1861787	$2qQ_z$	2.5687228
$qP_x(1 - \sigma^2)$	0.5499313	0.4464317	0.4147744
$2qQ_x\sigma$	0.7338516	0.8280508	0.8547928
$X$	-0.8845212	-0.7101374	-0.6458819

$qP_y(1 - \sigma^2)$	-0.6369800	-0.5170974	-0.4804291
$2qQ_y\sigma$	0.3496452	0.3945266	0.4072679
Y	-0.4187590	-0.6340024	-0.6880107
$qP_z(1 - \sigma^2)$	-0.1102378	-0.0894906	-0.0831446
$2qQ_z\sigma$	1.6405523	1.8511383	1.9109209
Z	-0.1816037	-0.2749520	-0.2983737
$\rho \cos \alpha \cos \delta$	0.3992617	0.5643451	0.6236853
$\rho \sin \alpha \cos \delta$	-0.7060938	-0.7565732	-0.7611719
$\rho \sin \delta$	1.3487108	1.4866957	1.5294026
$\lg \alpha$	-1.7684987	-1.3406215	-1.2204423
$\rho \cos \delta$	0.8111586	0.9438688	0.9840559
$\lg \delta$	1.6626968	1.5751084	1.5541826
$\alpha$	$299^\circ 29' 10''$	$360^\circ 43' 12''$	$309^\circ 19' 49''$
$\delta$	$+ 58^\circ 58' 34''$	$57^\circ 35' 23''$	$57^\circ 14' 31''$
$\cos \delta$	0.5153954	0.5359782	0.5410927
$\Delta \alpha$	$+ 0''.25$	$- 23''.0$	$+ 0''.25$
$\Delta \delta$	$- 0''.5$	$+ 40''.0$	$- 0''.3$
O-C	$\begin{cases} \Delta \alpha \cos \delta + 0''.13 \\ \Delta \delta - 0''.5 \end{cases}$	$\begin{cases} - 12''.3 \\ + 40''.0 \end{cases}$	$\begin{cases} + 0''.14 \\ - 0''.3 \end{cases}$

[说明]:

在本例题中由于采用的三个观测时刻之间的时间间隔相差很大,即第二个观测值不在第一、第三观测值的中间,因此,计算结果与观测值相比较时,第二观测时刻的O-C相差较大。